WS 2009/2010 Dr. Ch. Bock

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Bestimme die Lösung (incl. Definitionsbereich) der AWA

$$y'(x) = -\sin(x)\frac{y^2(x)+1}{y(x)}, \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 2 (Notwendige Bedingung für die Verzweigung von Lösungen der Differentialgleichung mit getrennten Variablen)**.** Seien $f\colon J_1 \to \mathbb{R}$ und $g: J_2 \to \mathbb{R}$ steige Funktionen, wobei $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ Intervalle seien. Ferner seien $(x_0, y_0) \in J_1 \times J_2$, $g(y_0) = 0$ und $g(y) \neq 0$ für $y \in]y_0, y_0 + \delta]$ für ein $\delta \in \mathbb{R}_+$.

Es existiere eine Lösung der AWA

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

die ,,von der konstanten Lösung vom Wert y_0 in (x_0, y_0) nach rechts oben abzweigt", d.h. per def. daß für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ hinreichend klein gilt

$$\forall_{x \in]x_0, x_0+\varepsilon]}\, y(x) > y_0.$$

Zeige:

(i) $\lim_{y \to y_0+} \int_y^{y_0+\delta} \frac{ds}{g(s)} \in \mathbb{R}$,

d.h. $\frac{1}{g}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über $[y_0, y_0 + \delta]$.

(ii) $\forall_{C \in \mathbb{R}_+} \exists_{y \in]y_0, y_0+\delta]}\, |g(y) - g(y_0)| > C|y - y_0|$,

d.h. ,, $g|_{[y_0, y_0+\delta]}$ genügt keiner Lipschitz-Bedingung."

(iii) g ist in y_0 nicht (rechtsseitig) differenzierbar.

Besprechung: Mittwoch, den 28.10.2009