

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Bestimme die Lösung (incl. Definitionsbereich) der AWA

$$y'(x) = -\sin(x) \frac{y^2(x) + 1}{y(x)}, \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 2 (Notwendige Bedingung für die Verzweigung von Lösungen der Differentialgleichung mit getrennten Variablen). Seien $f: J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: J_2 \rightarrow \mathbb{R}$ steige Funktionen, wobei $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ Intervalle seien. Ferner seien $(x_0, y_0) \in J_1 \times J_2$, $g(y_0) = 0$ und $g(y) \neq 0$ für $y \in]y_0, y_0 + \delta]$ für ein $\delta \in \mathbb{R}_+$.

Es existiere eine Lösung der AWA

$$y'(x) = f(x) g(y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

die „von der konstanten Lösung vom Wert y_0 in (x_0, y_0) nach rechts oben abzweigt“, d.h. per def. daß für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ hinreichend klein gilt

$$\forall x \in]x_0, x_0 + \varepsilon] \quad y(x) > y_0.$$

Zeige:

(i) $\lim_{y \rightarrow y_0+} \int_y^{y_0+\delta} \frac{ds}{g(s)} \in \mathbb{R},$

d.h. $\frac{1}{g}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über $[y_0, y_0 + \delta]$.

(ii) $\forall C \in \mathbb{R}_+ \exists y \in]y_0, y_0 + \delta] |g(y) - g(y_0)| > C|y - y_0|,$

d.h. „ $g|_{[y_0, y_0 + \delta]}$ genügt keiner Lipschitz-Bedingung.“

(iii) g ist in y_0 nicht (rechtsseitig) differenzierbar.