WS 2009/2010 Dr. Ch. Bock

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Beweise Satz 6.3 der Vorlesung.

Aufgabe 2 (Lösung einer AWA mit einem Potenzreihenansatz)**.** Wir betrachten die Riccati-Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = -\frac{x^2}{2} + y(x)^2, \quad y(0) = 1.$$

Es ist bereits klar (nach 3.20 der Vorlesung), daß genau eine maximale Lösung $y\colon J \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe existiert, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in J$ ist. Zeige:

$]-1,1[\subset J$, auf $]-1,1[$ existiert eine Potenzreihenentwicklung $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und für die Koeffizienten a_k lassen sich explizite Rekursionsformeln angeben.

Tip: Nehme an, $y(x)$ sei um 0 in eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ entwickelbar. Leite dann durch Koeffizientenvergleich eine eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ her und zeige $|a_k| \leq 1$ für alle k. Folgere hieraus die Behauptung.

Aufgabe 3. Finde eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ vom Konvergenzradius ∞ derart, daß $y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung der Differentialgleichung

$$xy''(x) = y(x)$$

ist. a_k soll explizit als Funktion von k angegeben werden.

Besprechung: Mittwoch, den 13.01.2010

***

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Jahr 2010!