

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Darboux'scher Zwischenwertsatz für die Ableitung). Seien J ein offenes Intervall von \mathbb{R} , $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a, b \in J$ mit $a < b$ sowie $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Zeige, daß eine Zahl $t \in]a, b[$ mit $f'(t) = c$ existiert.

Tip: Beweise den Satz zunächst im Fall $c = 0$, $f'(a) < 0$ (bzw. $f'(a) > 0$), $f'(b) > 0$ (bzw. $f'(b) < 0$), und betrachte im allgemeinen Fall die Funktion $g(x) := f(x) - cx$.

Aufgabe 2. Bestimme bei den folgenden Clairaut'schen Differentialgleichungen jeweils die „einhüllende“ Lösung.

(i) $y(x) = x y'(x) + y'(x)^2$

(ii) $y(x) = x y'(x) + \exp(y'(x))$