SS 2011 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 5, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7 - a_n}.$$

(i) Zeige induktiv, daß die Folge nach unten durch 3 und nach oben durch 5 beschränkt ist.

(ii) Beweise, daß die Folge konvergiert.

Tip: Hauptsatz über monotone Folgen

(iii) Berechne den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 2. Berechne jeweils Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert ist:

(i) $a_n = 1 + (-1)^n$

(ii) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(iii) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$

Aufgabe 3.

(i) Beweise durch vollständige Induktion $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(ii) Berechne $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$.

Aufgabe 4. Untersuche auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+4^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n+3^n}$.

Abgabe: Montag, den 20.06.2011 in der Vorlesung