

Elemente der Analysis II

Probeklausur

Aufgabe 1. Zeige mittels der Definition (d.h. unter Verwendung des Differentialquotientens), daß $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Bestimme ferner die Ableitung.

Aufgabe 2. Zeige, daß $\sqrt[7]{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2, & \text{für } x < -1, \\ 6x - 12, & \text{für } -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{für } 2 < x, \end{cases}$$

in jeder reellen Zahl auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4. $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \exp\left(\frac{\sin(x) \cos(x)}{x-1}\right).$$

Begründe kurz, daß f differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 5. Betrachte $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(t) + e^t$.

(i) Zeige, daß f bijektiv ist.

(ii) Sei $g := f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Berechne $g'(e)$.

Tip: $f(1) = e$

Aufgabe 6. Für alle $x, y \in [-1, 1]$ zeige man

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2}(x^3 + x)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(y^3 + y)\right) \right| \geq \frac{1}{2} \cos(1) |x - y|.$$

bitte wenden

Aufgabe 7. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x + 1) \cos x.$$

- (i) Begründe, daß f beliebig oft differenzierbar ist und bestimme die ersten drei Ableitungen f' , f'' , und f''' von f .
- (ii) Bestimme die zweite und dritte Taylorsche ganz-rationale Funktion p_2 und p_3 von f in 0.
- (iii) Zeige für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6}(4 + |x|)|x|^3$.

Aufgabe 8. Untersuche die Funktion aus Aufgabe 3 auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe 9. Diskutiere den Verlauf der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t^2(t - 4),$$

d.h. bestimme die Extrema, die Wendestellen sowie Intervalle auf denen die Funktion konvex bzw. konkav ist und untersuche das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereiches.

Aufgabe 10. Untersuche, ob die folgenden Limits existieren:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(x)$

Aufgabe 11. Bestimme die folgenden Stammfunktionen:

- (i) $\int x^2 \sin(x) dx$
- (ii) $\int x^2 \sin(x^3) dx$
- (iii) $\int \frac{dx}{(x-2)(x-4)}$

Aufgabe 12. Berechne die folgenden Integrale:

- (i) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$
- (ii) $\int_0^\infty e^{-x} \cos(x) dx$
- (iii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$