WS 2011/2012 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Beweise, daß die Reihen

$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und

$\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Aufgabe 2. Die Zuordnungen aus Aufgabe 1 definieren offenbar Funktionen

$$\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und heißen *Exponentialfunktion*, *Cosinus*, *Sinus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus*. Begründe ihre Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitungen.

Aufgabe 3. Beweise den Verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.11 der Vorlesung.

Tip: Wende den Satz von Rolle auf $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + \lambda\, g(x)$, mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$ an. Hierbei wird die Notation der Vorlesung verwendet.

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x) = \sin(a+b-x)\cos(x) + \cos(a+b-x)\sin(x),\ g(x) = \cos(a+b-x)\cos(x) - \sin(a+b-x)\sin(x)$$

gegeben sind.

Zeige, daß f und g konstant sind und leite daraus die Additionstheoreme für sin und cos her.

Abgabe: Montag, den 28.11.2011 in den Übungen