WS 2011/2012 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Die folgenden vier Aussagen über monotone Funktionen sind falsch. Gib jeweils ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist f injektiv.

(ii) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. per def. differenzierbar mit stetiger Ableitung) und streng monoton fallend, so gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, so ist f bijektiv.

(iv) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so hat f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen.

Aufgabe 2. Man zeige, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

in 0 stetig aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Man zeige, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

differenzierbar ist und daß f' in 0 unstetig ist.

Aufgabe 4. Beweise, daß $\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$ genau eine reelle Nullstelle besitzt.
Tip: Satz von Rolle

Abgabe: Montag, den 4.12.2011 in den Übungen