SS 2010 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis III

Probeklausur

Aufgabe 1. Zeige, daß die beliebige Vereinigung offener Mengen wieder offen ist.

Aufgabe 2. Zeige, daß die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-y^2}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Untersuche f auf Stetigkeit im Nullpunkt.

Aufgabe 4. Seien $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 2\}$ und $f\colon\ M \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y$.

a. Begründe (ohne zu rechnen), daß f ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt.

b. Berechne die globalen Extrema.

Aufgabe 5. Löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

a. $yy' = x^{-3}$, $y(2) = 0$

b. $y' = \tan(y)$, $y(\ln 2) = \frac{\pi}{2}$

c. $\sqrt{1 - x^2}y' = y^2$, $y(0) = 0$

d. $t^2 \frac{dy}{dt} - t = 1 + y + ty$, $y(1) = 0$

Aufgabe 6. Finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Welches ist der maximale Bereich $G \subset \mathbb{R}^2$, in dem (nach dem Satz von Peano) für jedes $(x, y) \in G$ eine lokale Lösung existiert?

a. $y' = e^{2x-y}$

b. $y' = \frac{xy-1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}y - \frac{1}{1-x^2}$

c. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$

Aufgabe 7. Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Aufgabe 8. Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 4y' - 2y = x$.