SS 2010 Dr. Ch. Bock

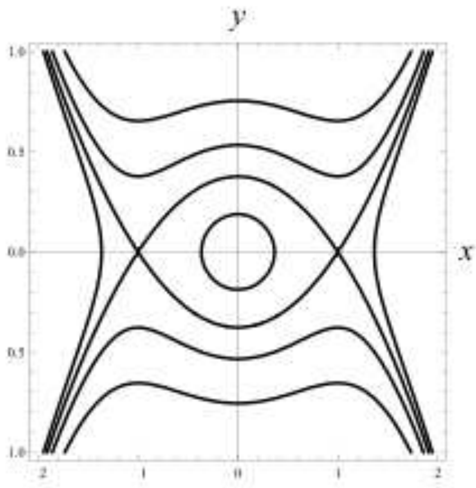
Elemente der Analysis III

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Bestimme alle lokalen Extrema der mit ihren *Niveaulinien*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\},\ c \in \mathbb{R},$$

dargestellten Funktin $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x^2 - x^4 + 7y^2$.



Definition. Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(i) Eine C^∞-Abbildung $X\colon\ M \to \mathbb{R}^n$, die jedem $p \in M$ einen Vektor $X(p) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet, heißt ein *Vektorfeld auf* M.

(ii) Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)\colon\ M \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf M, so heißt

$$\operatorname{div} X\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R},\ p \longmapsto \operatorname{div}_p X := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(p),$$

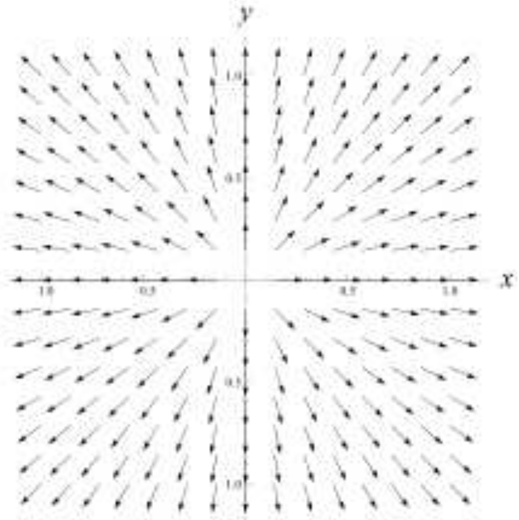
die *Divergenz von* X.

Die Divergenz ist also die Summe der Diagonalelemente der Jacobi-Matrix von X.

bitte wenden

Aufgabe 2. Berechne die Divergenz $\operatorname{div} X$ des abgebildeten Vektorfeldes

$$X\colon\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



Aufgabe 3. Berechne ohne Verwendung eines Taschenrechners näherungsweise die reelle Zahl $2,02^{3,01}$. Differenziere hierzu

$$f\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^y$$

im Punkte $(x_0,y_0) = (2,3)$ und approximiere $f(x,y)$ durch $f(x_0,y_0) + \mathrm{d}_{(x_0,y_0)} f(x-x_0, y-y_0)$.

Tip: Verwende $x^y = \exp(y\ \ln(x))$ und $\ln(2) \approx 0,7$.

Aufgabe 4. Berechne die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$,

(ii) $f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \exp(xy)\sin(x^2+y)$.

Abgabe: Freitag, den 21.05.2010 in der Vorlesung