SS 2010 Dr. Ch. Bock

# Elemente der Analysis III

Übungsblatt 3

**Aufgabe 1.** Bestimme alle globalen Extrema der angegebenen Funktionen:

(i) $f := x^3 + x^2y + 2y^2 \colon \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \geq 0 \,\wedge\, b \geq 0 \,\wedge a + b \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

(ii) $f := (4y^2 - x^2)\exp(-x^2 - y^2) \colon \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^2 + b^2 \leq 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2.** $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := x^y + \ln(x)\left((\arctan(\sin(\cos(xy))))^3 - \ln(x+y)\right).$$

Berechne $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

**Aufgabe 3.** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sin(x)\arctan\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right), & \text{falls } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } (x,y) \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, daß $f$ in $(0,0)$ partiell nach $x$ differenzierbar ist und bestimme dort die erste partielle Ableitung nach $x$.

**Definition.** Es seien $n \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Ferner sei $p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0n}) \in M$ mit $\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \neq 0$.

Dann heißt

$$T_{p_0}\mathrm{Graph}(f) = \left\{ \left( p_0, f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\,(x_i - p_{0i}) \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

der *Tangentialraum an den Graphen* $\mathrm{Graph}(f) := \{(p, f(p)) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, p \in M\}$ *von* $f$ *in* $p_0$.

**Aufgabe 4.** Bestimme den Tangentialraum im Punkte $(1,-2,2)$ der Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung $z = 3x^2y + 2xy^2$ gegeben ist.

bitte wenden

**Aufgabe 5.**

(i) Bestimme drei nicht-negative reelle Zahlen, deren Summe gleich eins und deren Produkt maximal ist.

(ii) Bei der Post dürfen nur Pakete verschickt werden, bei denen die Summe aus Länge und Umfang (Umfang = 2 × Breite + 2 × Höhe) nicht größer als $c$ cm ist, wobei $c \in \mathbb{R}$. Welches Maß für Länge, Breite und Höhe muß man wählen, damit ein Paket größtmögliches Volumen hat und verschickt werden kann?

**Aufgabe 6.** Berechne ohne Verwendung eines Taschenrechners näherungsweise die reelle Zahl $2,02^{3,01}$. Differenziere hierzu

$$f\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^y$$

im Punkte $(x_0, y_0) = (2,3)$ und approximiere $f(x,y)$ durch $f(x_0,y_0) + \mathrm{d}_{(x_0,y_0)} f(x-x_0, y-y_0)$.

Tip: Verwende $x^y = \exp(y \ln(x))$ und $\ln(2) \approx 0,7$.

**Aufgabe 7.** Warum gibt es keine partiell differenzierbare Funktion $f\colon\ R^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{d}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \arctan(xy) \\ \exp(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

**Aufgabe 8.** Zeige, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \leq 1$ und $y \geq 0$ gilt

$$\frac{\exp(y)}{x} \geq 2 - x + y.$$

Tip: Wende den Taylorschen Satz im Punkte $(1,0)$ auf die Funktion $\frac{\exp(y)}{x}\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

Abgabe: Freitag, den 04.06.2010 in der Vorlesung