SS 2010 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis III

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } (x,y) \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, daß f in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist und daß die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ nicht symmetrisch ist.

Ist f zweimal setig partiell differenzierbar?

Aufgabe 2. Seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $f := xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Bestimme die zweite Taylorsche ganz-rationale Funktion von f in (a,a).

Aufgabe 3. Untersuche $f := x^3 + y^3 - 3x - 12y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema und gib ggf. die Art der Extrema an.

Aufgabe 4. Untersuche $f := 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema und gib ggf. die Art der Extrema an.

Aufgabe 5. Gegeben sei $f := (x^2 + 2y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 1)\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(i) Skizziere die Niveaulinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ und markiere die Bereiche, in denen f positiv bzw. negativ ist.

(ii) Bestimme Jordan- und Hesse-Matrix von f.

(iii) Bestimme alle lokalen Extrema von f.

Aufgabe 6. Begründe, daß $f := 2xy - x + y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf $[-2,2]^2$ ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum annimmt und bestimme diese.

Abgabe: Freitag, den 18.06.2010 in der Vorlesung