WS 2010/2011 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis II

Probeklausur

Aufgabe 1. Zeige mittels der Definition (d.h. unter Verwendung des Differentialquotientens), daß $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Zeige ferner $\sin'(x) = \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Aufgabe 2. Zeige, daß $\sqrt[7]{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2, & \text{für } x < -1, \\ 6x - 12, & \text{für } -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{für } 2 < x, \end{cases}$$

in jeder reellen Zahl auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4. $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \exp\big(\frac{\sin(x)\cos(x)}{x-1}\big).$$

Begründe kurz, daß f differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 5. Betrachte $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(t) + e^t$.

(i) Zeige, daß f bijektiv ist.

(ii) Sei $g := f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Berechne $g'(e)$.

Tip: $f(1) = e$

Aufgabe 6. Für alle $x, y \in [-1, 1]$ zeige man

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}\left(x^3 + x\right)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\left(y^3 + y\right)\right)\right| \geq \frac{1}{2}\cos(1)|x - y|.$$

bitte wenden

Aufgabe 7. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto (x+1)\cos x.$$

(i) Begründe, daß f beliebig oft differenzierbar ist und bestimme die ersten drei Ableitungen f', f'', und f''' von f.

(ii) Bestimme die zweite und dritte Taylorsche ganz-rationale Funktion p_2 und p_3 von f in 0.

(iii) Zeige für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6}(4+|x|)|x|^3$.

Aufgabe 8. Untersuche die Funktion aus Aufgabe 3 auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe 9. Diskutiere den Verlauf der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t^2(t-4),$$

d.h. bestimme die Extrema, die Wendestellen sowie Intervalle auf denen die Funktion konvex bzw. konkav ist und untersuche das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereiches.

Aufgabe 10. Untersuche, ob die folgenden Limites existieren:

(i) $\lim_{x\to 0} x\sin(x)$

(ii) $\lim_{x\to\infty} x\sin(x)$

Aufgabe 11. Bestimme die folgenden Stammfunktionen:

(i) $\int x^2 \sin(x)\, dx$

(ii) $\int x^2 \sin(x^3)\, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{(x-2)(x-4)}$

Aufgabe 12. Berechne die folgenden Integrale:

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$

(ii) $\int_0^\infty e^{-x}\cos(x)\, dx$

(iii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$