Elemente der Analysis II

Übungsblatt 9

Definition. Es seien $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon\ J \to \mathbb{R}$ eine zwei-mal differenzierbare Funktion.

(i) f heißt genau dann *konvex*, wenn gilt $\forall_{t \in J}\, f''(t) > 0$ (d.h. genau f' ist streng monoton wachsend).

(ii) f heißt genau dann *konkav*, wenn gilt $\forall_{t \in J}\, f''(t) < 0$ (d.h. genau f' ist streng monoton fallend).

(iii) Ist $t_0 \in J$ und besitzt f'' in t_0 einen Vorzeichenwechsel, so heißt t_0 eine *Wendestelle von* f.

Aufgabe 1.

(i) Skizziere eine konvexe und eine konkave Funktion sowie eine Funktion mit genau einer Wendestelle.

(ii) Diskutiere den Verlauf der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{2t}{t^2 - 1},$$

d.h. bestimme die Extrema, die Wendestellen sowie Intervalle auf denen die Funktion konvex bzw. konkav ist und untersuche das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereiches.

Aufgabe 2. Bestimme $\lim_{x \to 0} x^x$.

Aufgabe 3. Betrachte die Funktion $f\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$, die durch $f(t) = \frac{1}{1+t^4}$ gegeben ist.

Entwickele f in eine Potenzreihe, integriere diese gliedweise und begründe, daß letztere für alle $t \in\,]-1,1[$ konvergiert.

Warum wird dadurch tatsächlich eine Stammfunktion von f definiert?

bitte wenden

Aufgabe 4. Bestimme die folgenden Stammfunktionen:

(i) $\int \ln(x)\,dx$

(ii) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(iii) $\int \sin(\sqrt{x})\,dx$

(iv) $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

Abgabe: Freitag, den 21.01.2011 in der Vorlesung