SS 2010 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis I

Probeklausur

Aufgabe 1. Zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Aufgabe 2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 := 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n+1}{a_n+2} \qquad \text{für } n \geq 0$$

definiert.

(i) Zeige, daß (a_n) monoton fallend und beschränkt ist.

(ii) Berechne den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 3. Die Folge (b_n) sei durch

$$b_n = \frac{n^2+2n+2}{2n^2+4}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

definiert.

(i) Benutze den Satz der Vorlesung für konvergente Folgen um zu zeigen, daß (b_n) konvergiert und finde den Grenzwert b.

(ii) Sei $\epsilon = \frac{1}{1000}$. Bestimme ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$|b_n - b| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N_\epsilon.$$

Aufgabe 4. Begründe, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n-1)\sqrt{2n^2-1}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 n!}$

Aufgabe 5. Stelle $0,\overline{12}$ als rationale Zahl dar.

Aufgabe 6. Bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

bitte wenden

Aufgabe 7. $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a\exp(x) + bx^2 & \text{für } x < 0 \\ 2a - 1 & \text{für } x = 0 \\ a\sqrt{x} - b\ln(x^2 + e) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definiert, wobei $e = \exp(1)$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Begründe, daß $f_{a,b}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

(ii) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $f_{a,b}$ stetig in 0?.

Aufgabe 8. Betrachte $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$.

(i) Zeige, daß f stetig und streng monoton ist.

(ii) Bestimme den Wertebereich W_f von f.

(iii) Begründe die Existenz einer Umkehrfunktion f^{-1} von f und bestimmen sie. Gib außerdem Definitionsmenge und Wertebereich von f^{-1} an.

Aufgabe 9. Betrachte die Polynome $p, q\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = 2x^2+x+1$ und $q(x) = x^3+2x$.

(i) Begründe, daß es ein $a \in [1, 2]$ mit $p(a) = q(a)$ gibt.

(ii) Berechne ein Intervall von Länge $\frac{1}{4}$, das a enthält.

(iii) Begründe, daß es ein $c \in [1, 2]$ mit $q(c) = 5$ gibt.

Aufgabe 10. Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$ für die die folgende Grenzwerte existieren:

(i) $\lim_{x\to c} \frac{x^2-5x-6}{x-c}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+c}{x-2}$