SS 2010 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Verwende die Definition der Konvergenz, um zu überprüfen, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Bestimme ggf. den Grenzwert.

(i) $(1+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, (ii) $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (iii) $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (iv) $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$,

(v) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (vi) $\left(\frac{2^n}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ sei gegeben durch

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{\sin^3(n) - 3\cos(n)}{n}.$$

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bestimme man $a \in \mathbb{R}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_+$ derart, daß gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+} (n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Tip: $\forall_{x\in\mathbb{R}} |\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$.

Aufgabe 3. Zeige, daß die angegebenen Folgen konvergieren und bestimme die Grenzwerte.

(i) $\left(\frac{3n^2-n}{n^2+5}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$, (ii) $\left(\frac{3n^2-n}{n^2+5}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$, (iii) $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$.

Hinweis: Bei (iii) darf $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} = \exp(1)$ mit der *Eulerschen Zahl*

$$\mathrm{e} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \approx 2{,}718$$

verwendet werden.

Aufgabe 4. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ werde rekursiv durch

$$a_1 := \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_+} a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 + 3a_n}{2}$$

definiert.

(i) Zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ monoton wachsend und beschränkt ist.
Tip: Zeichne zunächst den Funktionsgraphen von $x \mapsto \frac{x^2+3x}{2}$ und $x \mapsto x$.

(ii) Begründe, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

bitte wenden

Aufgabe 5. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ werde rekursiv durch

$$a_1 := 5 \quad \text{und} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7-a_n}$$

definiert.

(i) Zeige induktiv, daß gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, 3 \le a_n \le 5$.

(ii) Begründe, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Abgabe: Freitag, den 28.05.2010 in der Vorlesung