SS 2010 Dr. Ch. Bock

# Elemente der Analysis I

Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Man beweise durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; n^3 \leq 3^n \;.$$

*Anleitung:* Nachdem man die Behauptung für $n = 0, 1, 2$ geprüft hat, führe man einen Induktionsanfang bei $n = 3$ und einen Induktionsschluß unter der Voraussetzung $n \geq 3$ durch. Man mache sich klar, warum dadurch die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen wird. — Das Vorgehen, den Induktionsanfang nicht bei $n = 0$, sondern bei einer anderen ganzen Zahl durchzuführen, bezeichnet man als *Verschobenen Induktionsanfang.*

**Aufgabe 2.** Zeige für alle $n \in \mathbb{N}_+$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

**Aufgabe 3.** Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge derart, daß gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, |a_{n+1} - a_n| \leq q\, |a_n - a_{n-1}|.$$

Zeige

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, |a_{n+1} - a_n| \leq q^n\, |a_1 - a_0|$,

(ii) $\forall_{n,m\in\mathbb{N}_+}\, \Big(m \geq n+1 \Longrightarrow |a_m - a_n| \leq \frac{q}{q-1}\, |a_{n+1} - a_n|\Big)$,

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

**Aufgabe 4.** Zeige $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ und $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l} = 1.$

bitte wenden

**Aufgabe 5.**

(i) Beweise oder widerlege die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k + 4^k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{3^k + 4^k}.$$

(ii) Zeige, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$ gegen $\displaystyle\frac{3}{4}$ konvergiert.

**Aufgabe 6.** Untersuche die angegebenen Reihen sowohl auf Konvergenz als auch auf absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{k+1}$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}}$, (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2(k+1)}}$,

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k+1)}{k^2+1}$, (vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, (vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!2^k}{k^k}$, (viii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$,

(ix) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{3/2}}{k^4 + 4k^2 + 1}$.

**Aufgabe 7.**

(i) Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2$ eine konvergente Reihe. Zeige, daß dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k a_{k+1}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ absolut konvergieren.

(ii) Gib eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ an, so daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ absolut konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2$ nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Es darf verwendet werden, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ genau dann konvergiert, wenn gilt $s > 1$.

Abgabe: Freitag, den 11.06.2010 in der Vorlesung