SS 2010 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Seien $i_1, i_2 \in \{0, \dots, 9\}$ Ziffern. Zeige, daß gilt

(i) $0,\overline{i_1} = \frac{1}{9} \cdot i_1$,

(ii) $0,\overline{i_1\, i_2} = \frac{1}{99} \cdot (10 \cdot i_1 + i_2)$,

wobei die Ausdrücke auf den linken Seiten als periodische Dezimalbrüche zu verstehen sind.

Aufgabe 2. Stelle die periodischen Dezimalbrüche $0,\overline{i_1\, i_2\, i_3}$ (mit $i_1, i_2 \in \{0, \dots, 9\}$) und $0,\overline{02439}$ als gewöhnliche Brüche dar.

Aufgabe 3. Beweise durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aufgabe 4. In der Ebene liegen $n \in \mathbb{N}_+$ verschiedene Geraden, so daß je zwei dieser Geraden sich schneiden; jedoch soll durch einen Schnittpunkt von zwei Geraden keine weitere Gerade hindurchgehen.
Die Geraden zerlegen die Ebene in eine gewisse Anzahl T_n von Gebieten. Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele:

Anzahl der Geraden n	Anzahl der Gebiete T_n
1	$2 = 1 + 1$
2	$4 = 2 + 2 = 1 + (1 + 2)$
3	$7 = 4 + 3 = 1 + (1 + 2 + 3)$

(i) Man veranschauliche sich die Verhältnisse anhand einer Skizze.

(ii) Erweitere die Tabelle um die Zeilen für $n = 4$ und $n = 5$.

(iii) Man stelle eine Vermutung für T_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ auf und beweise diese Vermutung mittels vollständiger Induktion.

bitte wenden

Aufgabe 5. Die sog. FIBONACCI-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, die um das Jahr 1202 von LEONARDO VON PISA (der der Sohn eines BONACCIO war, und den man deswegen auch „filius Bonacci“ oder kurz FIBONACCI nannte) entdeckt wurde, wird „rekursiv“ durch die folgende Vorschrift definiert:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \;:\; f_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \text{ oder } n = 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{für } n \geq 3 \end{cases} .$$

Wir setzen weiter

$$a := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \quad \text{und} \quad b := \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{5}) .$$

Damit sind a und b offenbar die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Zeige durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \;:\; f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (a^n - b^n) .$$

Aufgabe 6. Sei $m \in \mathbb{N}$. Neben $0! = 1$ definiert man für $m \in \mathbb{N}_+$ die sog. *Fakultät* $m! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ und bezeichnet für alle $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} &:= \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!} \quad \text{für } 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

als *Binomialkoeffizienten.* — Aus technischen Gründen setzen wir $\binom{m}{k} := 0$ für $m < k$.

Bemerkung. Die Binomialkoeffizienten spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wesentliche Rolle, so beispielsweise bei der Entwicklung des Binoms $(a + b)^m$, oder bei der Bestimmung von erzeugenden Funktionen für rekursiv definierte Folgen (ähnlich wie in Aufgabe 5.4).

(i) Beweise für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, m\}$:

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} &= \binom{m}{m-k} && \text{(Symmetrieeigenschaft)}, \\ \binom{m+1}{k+1} &= \binom{m}{k+1} + \binom{m}{k} && \text{(Rekursionsformel)} . \end{aligned}$$

(ii) Beweise durch vollständige Induktion:

$$\forall m \in \mathbb{N}\; \forall k \in \{0, \ldots, m\} \;:\; \binom{m}{k} \in \mathbb{N} .$$

Abgabe: Freitag, den 25.06.2010 in den Übungsgruppen