SS 2010 Dr. Ch. Bock

Elemente der Analysis I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Bestimme zu jeder der gegebenen Funktionen f die maximale Definitionsmenge D, den Wertebereiche W von f. Gib außerdem ggf. die Umkehrfunktion g von f sowie deren Definitionsmenge und Wertebereich an.

(i) $f(x) = |x|$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(iii) $f(x) = x + \sqrt{x}$

Aufgabe 2. Bestimme jeweils den Konvergenzradius:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Aufgabe 3. Betrachte die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sowie $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\forall_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\, g_n(x) = nx$ und $\forall_{x\in]\frac{1}{n},1]}\, g_n(x) = \frac{n}{n+1}(1-x)$. Zeige, daß die Folgen konvergieren und bestimme die Grenzfunktionen.

Aufgabe 4. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sei die Funktion

$$f_{\lambda,\mu}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} \lambda x + \mu, & \text{für } x < -1, \\ x^2 + \lambda\mu x + 1, & \text{für } -1 \le x \le 1, \\ \mu x + \lambda, & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

gegeben. Man bestimme alle Paare $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ für die f stetig ist.

bitte wenden

Aufgabe 5. Benutze das $\varepsilon - \delta$ Kriterium um zu zeigen, daß die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig sind.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$.

(ii) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x^3 + x + 1| + \sqrt{x^4 + 1}$.

(i) Zeige, daß f eine stetige Funktion ist.

(ii) Zeige, daß f eine Nullstelle besitzt und gib ein Intervall der Länge 1 an, in dem eine Nullstelle von f liegt.

(iii) Bestimme ein Intervall der Länge $\frac{1}{2}$, in dem f eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 7. Bestimme die folgende Grenzwerte, wenn sie existieren.

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{|x-2|}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{4x-2}$

(iii) $\lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x^2+2x}$

(iv) $\lim_{x\to -1} 2x^3 - 4$

(v) $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{h}$

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(vii) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4}\right)$

(viii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$

(ix) $\lim_{t\to -1}(4t - 2at + 3a)$ für $a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8. Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$ für die die folgende Grenzwerte existieren:

(i) $\lim_{x\to c} \frac{x^2-5x-6}{x-c}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+c}{x-2}$

Abgabe: Freitag, den 12.07.2010 in den Übungsgruppen