WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

(i) Zeigen Sie, daß die folgenden Reihen konvergent sind:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}$

(ii) Berechnen Sie die Summe der Reihe in a) bzw. b) exakt und die der in c) approximativ mit einem Fehler kleiner als 10^{-4}.

Aufgabe 2. Sei $z \in \mathbb{C}$. Studieren Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

(i) a) $\sum_{n=2}^{\infty} \log(\frac{n+2}{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(ii) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(iii) a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+1}{2n+3})^{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(3+(-1)^n\big)^n z^n$

Tip: Wenden Sie bei (i) die Definition oder das Vergleichskriterium, bei (ii) das Quotientenkriterium und bei (iii) das Wurzelkriterium an.

Aufgabe 3. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ $e_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $E_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(i) Verwenden Sie die Binominalformel, um zu zeigen, daß gilt

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^{k-1} (1 - \frac{l}{n})$$

und leiten Sie $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ e_n \le E_n$ her.

(ii) Seien $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_0 \ge 2$ fest und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m_0$ beliebig. Beweisen Sie

$$e \ge e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{m_0} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^{k-1} (1 - \frac{l}{n}).$$

Betrachten Sie den Grenzwert für $n \to \infty$, um zu zeigen, daß gilt: $\forall_{m\ge 2}\ e \ge E_m$

(iii) Beweisen Sie mittels (i) und (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

bitte wenden

(iv) Zeigen Sie schließlich für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^j} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

und berechnen Sie e approximativ mit einem Fehler kleiner als 10^{-6}.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{F}_{null}$ der Vektorraum der Nullfolgen in $\mathbb{C}$. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folge $(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n^{(m)} := \delta_n^m$.

Zeigen Sie, daß die Folgen $(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig sind und $\dim \mathcal{F}_{null} = \infty$.

Abgabe: Mittwoch, den 17.1.2007 in den Übungsgruppen