WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, daß die Binominalreihe

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent ist.

(ii) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ definieren wir $B_\alpha(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Bilden Sie das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\sum_{n\geq 0} \binom{\beta}{n} x^n$ und zeigen Sie $B_\alpha(x) B_\beta(x) = B_{\alpha+\beta}(x)$ für $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Hinweis: Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei $\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_x(\alpha) = B_\alpha(x)$ für $\alpha, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Zeigen Sie, daß gilt $\varphi_x(\alpha+\beta) = \varphi_x(\alpha)\varphi_x(\beta)$, d.h. φ_x ist eine Lösung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Leiten Sie für $\alpha \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ her: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Hinweis: Satz 4.4.2.

Kommentar: Die Formel wurde von Newton entdeckt und von Euler bewiesen. Für die Übertragung auf irrationale Exponenten α (Satz 4.4.5) müsste man die Monotonie (oder Stetigkeit) von $B_\alpha(x)$ in α zeigen, was im Augenblick mühsam wäre. Später werden wir dieses Ergebnis als *Taylorreihe* bekommen.

Aufgabe 2.

(i) Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

monoton fallend und beschränkt ist.

Hinweis: Logarithmieren Sie die Ungleichung $(1 + \frac{1}{n})^n < e$.

Der Grenzwert $c := \lim_{n\to\infty} a_n = 0{,}5772\ldots$ heißt *Eulersche Konstante.*

bitte wenden

(ii) Zeigen Sie, daß gilt $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})=\log(2)$.

(iii) Zeigen Sie durch Induktion

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

und leiten Sie her $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log(2)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Familie $\left(\frac{1}{(2n)^m}\right)_{m\geq 2, n\geq 1}$ summierbar ist und berechnen Sie ihre Summe.

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$\begin{aligned} H_a &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\} \\ H_b &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0\}. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie $\dim H_a = \dim H_b = n-1$.

(ii) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} a, b \text{ linear abhängig} &\Leftrightarrow H_a = H_b \\ a, b \text{ linear unabhängig} &\Leftrightarrow H_a + H_b = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Besprechung: Mittwoch, den 24.1.2007 in den Übungsgruppen