WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 12

Hinweis: Die Klausur findet am Samstag, dem 3. Februar 2007, von 9.30 - 12.30 Uhr in den Hörsälen II und III der Chemischen Institute statt. Wenn Sie an der Klausur teilnehmen wollen, ist es notwendig, daß Sie bei den jeweiligen Prüfungsämtern angemeldet sind und erfolgreich an den Übungen teilgenommen haben. Wenn Sie zur Klausur angemeldet sind und am 3. Februar nicht erscheinen, wird die Prüfung als nicht bestanden bewertet. Bringen Sie Ihren Personal- und Studentenausweis sowie Schreibutensilien mit! Das Papier wird vom Institut gestellt. Weitere Hilfsmittel wie Bücher, Manuskripte oder Taschenrechner sind nicht zugelassen. Korrigiert wird nur die mit Füller oder Kugelschreiber gefertigte Reinschrift.

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n+1}, \frac{2^n-1}{2^n+1}, \frac{1}{n}, \sqrt[n]{n})$.

Definition. Zwei Metriken d, d' auf einer Menge X heißen **äquivalent**, wenn es $C, C' > 0$ gibt derart, daß gilt:

$$\forall_{x,y\in X}\ d(x,y) \le C d'(x,y)\ \wedge\ d'(x,y) \le C' d(x,y)$$

Aufgabe 2.

(i) Wir definieren für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{und} \quad d_\infty(x,y) := \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

Zeigen Sie, daß d_1 und d_∞ Metriken sind.

(ii) Zeigen Sie, daß die Metriken d_1, d_E, d_∞ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Aufgabe 3. Seien $A \neq \emptyset$ eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{B}(A), d_\infty)$.

(i) Sei $x \in A$. Leiten Sie aus der Ungleichung $|f_n(x) - f_m(x)| \le d_\infty(f_n, f_m)$ her, daß $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Es sei $f\colon A \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.Weiter seien $\varepsilon > 0$ und $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{x\in A}\forall_{m,n\ge n(\varepsilon)}\ |f_n(x) - f_m(x)| \le d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Beweisen Sie durch Grenzübergang für $m \to \infty$, daß gilt:

$$\forall_{x\in A}\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

bitte wenden

(iii) Zeigen Sie mit obiger Ungleichung (1), daß gilt $f \in \mathcal{B}(A)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{B}(A)$. Daher ist $(\mathcal{B}(A), d_\infty)$ vollständig.

Aufgabe 4. Wir bezeichnen mit ℓ_1 die Menge aller komplexen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent ist. Außerdem setzen wir für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$:

$$d_1(a,b) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

Zeigen Sie, daß (ℓ_1, d_1) ein vollständiger metrischer Raum ist.
Tip: Verwenden Sie die Beweisidee von Aufgabe 3.

Aufgabe 5. Lösen sie mit dem Iterationsverfahren des Banachschen Fixpunktsatzes die Gleichung $x^3 + 12x - 1 = 0$ auf $[0,1]$ mit einem Fehler kleiner 10^{-3}.

Aufgabe 6. Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $[0,1] \to [0,1]$, definiert durch

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in[0,1]}\ f_n(x) = x^n.$$

Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,1] & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1) \\ 1 & : \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$$

konvergiert, d.h. $\forall_{x\in[0,1]}\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Zeigen Sie weiter, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht <u>gleichmäßig</u> gegen f konvergiert.

Aufgabe 7. Seien U, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie:

(i) $g \circ f\colon U \to W$ ist linear.

(ii) Ist f bijektiv, so ist f^{-1} ebenfalls linear.

(iii) Sind f und g Isomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein Isomorphismus.

(iv) Auf der Menge $\mathfrak{V}_\mathbb{K}$ aller $\mathbb{K}$-Vektorräume wird durch

$$\forall_{V_1,V_2\in\mathfrak{V}_\mathbb{K}}\ V_1 \sim V_2 \ :\Leftrightarrow\ V_1 \text{ ist isomorph zu } V_2$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert.

Besprechung in den Übungsgruppen im SS 2007