WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Sei $\big(X,d\big)$ ein vollständiger metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$ eine abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, daß der Teilraum $\big(A,d\big)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 2. (Lebesgue Lemma)
Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X,d) und $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von K durch offene Mengen in X. Zeigen Sie, daß es ein $r>0$ gibt derart, daß jede Kugel $B_r(x)$, $x\in K$, in einer der Mengen U_i liegt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konstante $a\in\mathbb{R}$, so daß die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & : \quad x\leq 2 \\ ax & : \quad x>2 \end{cases}$$

stetig in allen Punkten $x\in\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4. Seien $f,g\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} \sin(\frac{1}{x}) & : & x\neq 0 \\ 0 & : & x=0 \end{array}\right\}, \quad g(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x\sin(\frac{1}{x}) & : & x\neq 0 \\ 0 & : & x=0 \end{array}\right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Zu jedem $y\in[-1,1]$ existiert eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ und $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=y$ gilt.

(ii) f ist nicht stetig in 0.

(iii) g ist in allen Punkten $x\in\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 5. Sei $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc} \frac{2xy}{x^2+y^2} & : & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & : & (x,y)=(0,0) \end{array}\right\}.$$

bitte wenden

Zeigen Sie:

(i) Alle Beschränkungen von f auf achsenparallele Geraden sind stetig, und alle Beschränkungen von f auf Halbgeraden vom Nullpunkt aus $H_\theta = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r > 0\}$ sind konstant,

(ii) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig aber im Nullpunkt nicht stetig.

Aufgabe 6. (Zwischenwertsatz und antipodale Punkte)
Sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ die n–Sphäre. Zeigen Sie, daß es zu jeder stetigen Funktion $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ existiert, mit $f(x) = f(-x)$.
(Beispiel: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, in denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.)

Aufgabe 7. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B).$$

Seien ferner $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ reelle Zahlen. Bestimmen Sie den Rand des Rechteckes $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Besprechung in den Übungsgruppen im SS 2007