WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 14

Hinweis: Die Nachklausur findet am Freitag, dem 23. März 2007, von 9 - 13 Uhr im Hörsaal des Mathematischen Instituts statt. Wenn Sie an der Klausur teilnehmen wollen, ist es u.a. notwendig, daß Sie bei den jeweiligen Prüfungsämtern angemeldet sind und erfolgreich an den Übungen teilgenommen haben. Wenn Sie zur Klausur angemeldet sind und am 23. März nicht erscheinen, wird die Prüfung als nicht bestanden bewertet. Bringen Sie Ihren Personal- und Studentenausweis sowie Schreibutensilien mit! Das Papier wird vom Institut gestellt. Weitere Hilfsmittel wie Bücher, Manuskripte oder Taschenrechner sind nicht zugelassen. Korrigiert wird nur die mit Füller oder Kugelschreiber gefertigte Reinschrift.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \dfrac{2}{3}$ b) $\lim\limits_{x\searrow 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^3-1}\right) = \infty$ c) $\lim\limits_{x\searrow 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right) = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = 0$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2+5x}) = -\dfrac{5}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x = e^{-3}$

Aufgabe 2.

(i) Zeigen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ b) $\lim\limits_{x\nearrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(ii) Benutzen Sie die Stetigkeit der Exponentialfunktion, um zu zeigen, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

(iii) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$$

(iv) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$$

bitte wenden

Aufgabe 3. Es seien $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Beweisen Sie, daß es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$ gibt.

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die Aussage für ein nicht kompaktes Intervall i.a. falsch ist.

Aufgabe 4. Seien $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $f_\vartheta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung, die jedem Punkt mit Polarkoordinaten (r,φ) den Punkt mit Polarkoordinaten $(r,\varphi+\vartheta)$ zuordnet. f_ϑ heißt *Rotation um den Winkel* ϑ.

(i) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f_\vartheta(x_1,x_2)$ und zeigen Sie, daß f_ϑ linear ist.

(ii) Finden Sie die zu f_ϑ assoziierte Matrix bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(iii) Zeigen Sie für $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$ $\;f_{\vartheta_1+\vartheta_2} = f_{\vartheta_1} \circ f_{\vartheta_2}$ und $f_{\vartheta_1}^{-1} = f_{-\vartheta_1}$.

(iv) a) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \\ \vartheta & \mapsto & f_\vartheta \end{array}$$

ist ein Gruppen-Homomorphismus.

b) $\{f_\vartheta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.

Besprechung in den Übungsgruppen im SS 2007