WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Seien M_1, M_2, M_3 Mengen und $f_1\colon M_1 \to M_2, f_2\colon M_2 \to M_3$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) f_1 und f_2 injektiv $\Rightarrow f_2 \circ f_1$ injektiv
(ii) f_1 und f_2 surjektiv $\Rightarrow f_2 \circ f_1$ surjektiv
(iii) f_1 und f_2 bijektiv $\Rightarrow f_2 \circ f_1$ bijektiv
(iv) Die Umkehrungen von (i), (ii) und (iii) sind i. a. falsch.
(v) $f_2 \circ f_1$ injektiv $\Rightarrow f_1$ injektiv
(vi) $f_2 \circ f_1$ surjektiv $\Rightarrow f_2$ surjektiv

Definition. Eine Menge R zusammen mit zwei Operationen $+\colon R \times R \to R$ und $\cdot\colon R \times R \to R$ heißt **kommutativer Ring**, wenn $(R, +, \cdot)$ die Axiome (A1) bis (A5), (A8) und (A9) aus § 1.3.1 der Vorlesung erfüllt.

Aufgabe 2. Seien $(R_1, +, \cdot)$ und $(R_2, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ zwei kommutative Ringe. Wir definieren zwei Operationen $\oplus, \odot\colon (R_1 \times R_2) \times (R_1 \times R_2) \to (R_1 \times R_2)$, indem wir für alle $r_1, s_1 \in R_1$ und $r_2, s_2 \in R_2$ setzen:

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) \oplus (s_1, s_2) &= (r_1 + s_1, r_2 \,\tilde{+}\, s_2) \\ (r_1, r_2) \odot (s_1, s_2) &= (r_1 \cdot s_1, r_2 \,\tilde{\cdot}\, s_2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) $(R_1 \times R_2, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring.
(ii) Gilt $R_1 \neq \{0_{R_1}\}$ und $R_2 \neq \{0_{R_2}\}$, so ist $(R_1 \times R_2, \oplus, \odot)$ kein Körper.

Definition. Seien M, N Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned} -M &:= \{-x \mid x \in M\} \\ M + N &:= \{x + y \mid x \in M \wedge y \in N\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Seien M, N nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß die folgenden Aussagen gelten:

(i) Ist M nach unten beschränkt, so ist $(-M)$ nach oben beschränkt und es gilt

$$\inf M = -\sup\,(-M).$$

bitte wenden

(ii) Sind M, N nach oben beschränkt, so ist $M + N$ nach oben beschränkt und es gilt

$$\sup\,(M+N) = \sup\,(M) + \sup\,(N).$$

(iii) Ist N nach unten beschränkt und $M \subset N$, so ist M nach unten beschränkt und es gilt

$$\inf M \geq \inf N.$$

Aufgabe 4. (i) Beweisen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ d) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > -1$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: $(1+a)^n > 1 + na$

Abgabe: Mittwoch, den 8.11.2006 in den Übungsgruppen