WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

(ii) Zeigen Sie durch Induktion, daß für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Definition. Für positive Zahlen a, b definiert man das **arithmetische, geometrische** und **harmonische Mittel** durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{ab}, \quad H(a,b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Aufgabe 2. (i) Beweisen Sie die Ungleichungen

$$H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$$

und zeigen Sie, daß eine Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

(ii) (**Das arithmetisch–geometrische Mittel.**) Es sei $0 < a < b$. Man definiere Intervalle $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, rekursiv durch $[a_1, b_1] := [a, b]$ sowie durch

$$a_{n+1} := G(a_n, b_n) \quad \text{und} \quad b_{n+1} := A(a_n, b_n).$$

Man zeige, daß sie eine Intervallschachtelung bilden. Man zeige ferner die Abschätzung

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{8a}(b_n - a_n)^2.$$

Die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegende Zahl heißt **arithmetisch–geometrisches Mittel** der Zahlen a und b und wird mit $M(a,b)$ bezeichnet.

Bitte wenden!

(iii) Die Schwingungsdauer eines (mathematischen) Pendels der Länge l beträgt

$$T(\varphi) = 2\pi\sqrt{l/g} \cdot \frac{b}{M(a,b)}\,, \quad \text{wobei} \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

ist (g Gravitationskonstante, φ maximaler Ausschlag). Für kleine Ausschläge gilt $T(\varphi) \cong T(0) = 2\pi\sqrt{l/g}$. Für den Fall $\varphi = \pi/2$ wählen wir $a = 1$, $b = \sqrt{2}$. Berechnen Sie a_n, b_n, $n = 1, 2, 3, 4$, und folgern Sie, daß $T(\pi/2) \cong 1,18 \cdot T(0)$, d.h. die Schwindungsdauer nimmt gegenüber kleinen Ausschlägen um ca. 18% zu.

Aufgabe 3. Zur Teilmenge $M := \{2^{-m} + n^{-1} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$ ermittle man gegebenenfalls Supremum, Infimum, Maximum, Minimum.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es genau eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die x, y und z enthält, nämlich

$$E = x + \operatorname{span}\{y - x, z - x\}\,.$$

Abgabe: Mittwoch, den 15.11.2006 in den Übungsgruppen