

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (i) Geben Sie jeweils den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an: a) $\frac{2+i}{2-i}$ b) $(1+i)^4 + (1-i)^4$ c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(ii) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

Tip: $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

(iii) Beweisen Sie für alle $w, z \in \mathbb{C}$ das sog. *Parallelogramm-Gesetz*

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

und

$$|z\bar{w} + 1|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2),$$

$$|z\bar{w} - 1|^2 - |z - w|^2 = (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1).$$

Aufgabe 2. Ermitteln Sie jeweils Infimum, Supremum sowie ggf. Minimum und Maximum von $(-\infty, 7)$ und $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie:

$$(i) \quad (\sum_{k=1}^n a_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$$

$$(ii) \quad n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2}}$$

Tip: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Aufgabe 4. Zeigen Sie für alle $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$a) \quad \cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) = 4 \cos^3(\varphi) - 3 \cos(\varphi)$$

$$b) \quad \sin(3\varphi) = 3 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) = -4 \sin^3(\varphi) + 3 \sin(\varphi)$$

Tip: Betrachte $(\cos(\phi) + i \sin(\phi))^3$!