WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Man zeige, daß $(G, \cdot)$ abelsch ist, wenn eine der Bedingungen

(i) $\forall_{a \in G}\ a^2 = e$,

(ii) $\forall_{a,b \in G}\ a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$,

(iii) $\forall_{a,b \in G}\ b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \cdot a = e$

erfüllt ist. In welchen Fällen gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 2. Welche der folgenden Teilmengen M_i des $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ sind Vektorräume über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$?

$M_1 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R}\ \wedge\ x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}\}$

$M_2 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_2\}$

Aufgabe 3. Man beweise oder widerlege, daß die Vereinigung bzw. der Schnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraumes wieder ein Untervektorraum ist.

Definition. Seien W_1, W_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Wir setzen

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1\ \wedge\ w_2 \in W_2\}.$$

Gilt $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, so schreiben wir $V = W_1 \oplus W_2$ und nennen V die **direkte Summe von W_1 und W_2**.

Aufgabe 4. Seien W_1, W_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Beweisen Sie:

(i) $W_1 \cup W_2$ ist genau dann Untervektorraum von V, wenn entweder $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$ gilt.

(ii) Es ist $V = W_1 \oplus W_2$ genau dann, wenn zu jedem $v \in V$ genau ein $w_1 \in W_1$ und genau ein $w_2 \in W_2$ mit $v = w_1 + w_2$ existieren.

Abgabe: Mittwoch, den 6.12.2006 in den Übungsgruppen