WS 2006/07

Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Seien $a, x_1 > 0$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist (im Fall $0 < x_1 < \sqrt{a}$ nur für $n \geq 2$) und für $n \geq 2$:

$$\frac{a}{x_n} \leq \sqrt{a} \leq x_n.$$

Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{x_n} = \sqrt{a}$.

Berechnen Sie x_n für $a = x_1 = 2$ und $n = 2, 3, 4, 5$. Welchen Wert gibt ein Taschenrechner für $\sqrt{2}$ an?

Aufgabe 2. Studieren Sie die Konvergenz der folgenden Folgen mittels des Monotoniekriteriums:

a) $(n^2 + (-1)^n)_{n\geq 1}$ b) $(\frac{2n+1}{n+1})_{n\geq 1}$ c) $(\frac{2^n}{n!})_{n\geq 1}$

Berechnen Sie die Grenzwerte!

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+1} \sin(\frac{n\pi}{2}), \\ b_n &= \left\{ \begin{array}{lcl} x^n & : & n \text{ gerade} \\ y^n & : & n \text{ ungerade} \end{array} \right\}, \\ c_n &= (1 + \frac{\cos(n\pi)}{n})^n, \end{aligned}$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ seien.

Aufgabe 4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Ergänzen Sie $(1, -1, 1), (1, \alpha, \alpha^2)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Abgabe: Mittwoch, den 20.12.2006 in den Übungsgruppen