Prof. Dr. G. Marinescu
Dipl.-Math. Ch. Bock

Mathematik für Physiker

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Für $\alpha \in [0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\omega_\alpha(n) = (\cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha))^n \quad .$$

(i) Bestimmen Sie für $\alpha = 2/3$ die Häufungswerte der Folge $(\omega_\alpha(n))_{n\geq 1}$, und geben Sie jeweils eine konvergente Teilfolge an.

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dann enthält die Menge $\Omega_\alpha = \{\ \omega_\alpha(n) \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ nur endlich viele Punkte, nämlich die Häufungswerte der Folge $(\omega_\alpha(n))_{n\geq 1}$.

(iii) Sei α irrational, d.h. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dann hat die Folge $(\omega_\alpha(n))_{n\geq 1}$ unendlich viele Häufungswerte. (Hinweis: Satz von Bolzano–Weierstraß)

(iv) Für welche $\alpha \in [0,1)$ ist $(\omega_\alpha(n))_{n\geq 1}$ konvergent?

Zusatz: Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kann man zeigen, daß jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ Häufungswert von $(\omega_\alpha(n))_{n\geq 1}$ ist. Zum Beispiel ist $z = 1$ Häufungswert. Das bedeutet, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Zahlen $q, m \in \mathbb{N}$ mit $|q\alpha - m| < \varepsilon$.

Aufgabe 2. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq b_n$. Ferner bezeichne $b \in \mathbb{R}$ einen beliebigen Häufungswert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie $a \leq b$.

Aufgabe 3. Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Für $m < n$, $2 \leq k \leq n$ gilt $\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$.

(ii) Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

(iii) Für alle n gilt $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$. (Tip: (ii))

(iv) Zeigen Sie unter Verwendung von (i) bis (iii), daß $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Hierbei soll das entsprechende Resultat aus der Vorlesung nicht verwendet werden!

bitte wenden

Aufgabe 4. Untersuchen Sie, ob $\{1, t-1, t^2-t, t^3-t^2\}$ eine Basis des Vektorraumes aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich drei bildet.

Abgabe: Mittwoch, den 10.1.2007 in den Übungsgruppen

***

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und ein gutes neues Jahr!

***