WS 2009/2010 Dr. Ch. Bock

Einführung in die Topologie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Beweise, daß gemäß 1.1 Bsp. 2.) der Vorlesung eine Topologie für die Menge der reellen Zahlen definiert wird.

Definition. Wir setzen $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dabei bezeichnen $-\infty, \infty$ zwei voneinander verschiedene Objekte, die nicht reelle Zahlen sind. Wir erweitern die Ordnungsrelation „$<$" in $\mathbb{R}$ zu einer Ordnungsrelation „$<$" in $\widehat{\mathbb{R}}$, indem wir $-\infty < \infty$ und $\forall_{a\in\mathbb{R}} \ -\infty < a \wedge a < \infty$ setzen. Wir erinneren an die Analysis I, wo man für eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sup M &:= \infty, \quad \text{falls } M \text{ nicht nach oben beschränkt,} \\ \sup M &:= -\infty, \quad \text{falls } M \text{ nicht nach unten beschränkt,} \end{aligned}$$

und für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n := \infty \quad &:\iff \quad \forall_{C\in\mathbb{R}} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} \ a_n > C, \\ \lim_{n\to\infty} a_n := -\infty \quad &:\iff \quad \forall_{C\in\mathbb{R}} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} \ a_n < C \end{aligned}$$

setzt.

Aufgabe 2 (Die kanonische Topologie für $\widehat{\mathbb{R}}$)**.** Zeige, daß durch

$$\{U \subset \widehat{\mathbb{R}} \,|\, U \cap \mathbb{R} \in \mathrm{Top}(\mathbb{R}) \wedge (\infty \in U \Rightarrow \exists_{a\in\mathbb{R}}]a, \infty] \subset U) \wedge (-\infty \in U \Rightarrow \exists_{a\in\mathbb{R}} [-\infty, a[\subset U)\}$$

eine Topologie für $\widehat{\mathbb{R}}$ definiert wird, die sog. *kanonische Topologie für* $\widehat{\mathbb{R}}$.

Wir betrachten $\widehat{\mathbb{R}}$ im folgenden stets als topologischen Raum mit dieser Topologie.

Aufgabe 3 (Über abgeschlossene Mengen)**.** Sei M ein topologischer Raum. Zeige:

(i) $\emptyset$ und M sind abgeschlossen.

(ii) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(iii) Die Vereinigung zweier (also auch endlich vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

bitte wenden

Aufgabe 4 (Die „Springer-Metrik" auf dem Schachbrett)**.** Sei M die 64-elementige Menge der Felder eines Schachbrettes und $d\colon\ M \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall_{p,q\in M}\, d(p,q) \quad := \quad \text{die minimale Anzahl von Springer-Zügen, welche man benötigt, um von } p \text{ nach } q \text{ zu gelangen.}$$

(i) Zeige, daß d eine Metrik für M ist.

(ii) Trage in ein Schema des Schachbrettes den Abstand $d(a8,\ldots)$ vom Feld $a8$ ein.

Besprechung: Dienstag, den 27.10.2009