WS 2009/2010 Ch. Bock

10. Übung zur Einführung in die Topologie

Aufg. 1

Seien M eine bel. Menge, $M \neq \emptyset$ und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung der Menge M und für jedes $\alpha \in A$ sei $u_\alpha : W_\alpha \to \mathbb{R}^n$ eine injektive Abb. derart, daß für alle $\alpha, \beta \in A$ gilt:

$u_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ und $u_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ sind offen in $\mathbb{R}^n$ u.
$u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \to u_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ ist ein Homöom. } (1)

Zeige:

(1) (a) M läßt sich auf genau eine Weise (durch Einführung einer Topologie) so zu einem topol. Raum machen, daß für alle $\alpha \in A$ gilt:

W_α ist offen in M

und

$u_\alpha : W_\alpha \to u_\alpha(W_\alpha)$ ist ein Homöom.

In Zukunft bezeichne M stets diesen topol. Raum.

(b) M ist hausdorffsch, falls für alle $\alpha, \beta \in A$ stets gilt:

zu je zwei verschiedenen Pkt-en $p_\alpha \in W_\alpha$, $p_\beta \in W_\beta$ von M existieren disj. Teilmengen U_α, U_β mit $p_\alpha \in U_\alpha \subset W_\alpha$, $p_\beta \in U_\beta \subset W_\beta$ derart, daß $u_\alpha(U_\alpha)$ und $u_\beta(U_\beta)$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind. } (2)

(c) M besitzt abzählbare Basis, falls gilt:

Die Überdeckung $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung. } (3)

(d) Im Falle der Gültigkeit von (2), (3) ist M eine n-dim. topol. Mgf.

b. w.

(ii) wir setzen nun zusätzl. voraus, daß (1) mit „C^∞-Diffeom." statt „Homöom." sowie (2), (3) gelten. Dann ist also M eine n-dim. topol. Mgf. und $\mathfrak{A} := \{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ist eine n-dim. diffb. Atlas für M, also exist. genau eine n-dim. diffb. Struktur $\mathfrak{A}_M$ für M (nämlich $\mathfrak{A}_M = \mathfrak{A}_{max}$) mit $u_\alpha \in \mathfrak{A}_M$ für alle $\alpha \in A$.

<u>Aufg. 2</u>

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. $\pi : S^n \to P^n(\mathbb{R})$ bezeichne die Projektion, vgl. Übung 5.3.

Zeige:

a) $P^n(\mathbb{R})$ besitzt eine abzählbare Basis.

b) Ist U offen in S^n und $\pi|_U$ inj., so ist $\pi(U)$ offen in $P^n(\mathbb{R})$ und $\pi|_U : U \to \pi(U)$ ist ein Homöom.

c) $\mathfrak{A} := \{u \circ (\pi|_{G_u})^{-1} \mid u \in \mathfrak{A}_{S^n} \wedge \pi|_{G_u} \text{ inj.}\}$ ist ein n-dim. diffb. Atlas für $P^n(\mathbb{R})$.

(Dabei bezeichne $\mathfrak{A}_{S^n}$ die „kanonische" diffbare Struktur von S^n mit $p_N, p_S \in \mathfrak{A}_{S^n}$.)

In Zukunft betrachten wir $P^n(\mathbb{R})$ mit der durch $\mathfrak{A}$ induzierten diffbaren Struktur $\mathfrak{A}_{max}$ als n-dim. diffb. Mgf.

Besprechung: Dienstag, den 26.01.2010