WS 2009/2010 Dr. Ch. Bock

Einführung in die Topologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Seien M, N, Q differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ differenzierbare Abbildungen. Zeige:

(i) $f\colon M \longrightarrow N$ konstant $\Longrightarrow \forall_{p\in M}\, f_{*p} = 0$,

(ii) $\forall_{p\in M}\, (g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$,

(iii) $\forall_{p\in M}\, (\mathrm{id}_M)_{*p} = \mathrm{id}_{T_pM}$,

(iv) $f\colon M \longrightarrow N$ Diffeomorphismus
$\Longrightarrow \forall_{p\in M}\, f_{*p}\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus mit

$$(f_{*p})^{-1} = (f^{-1})_{*f(p)}.$$

(v) Seien $u \in \mathcal{A}_M$ und $p \in Gu \subset M$. Dann gilt:

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,\dim M\}}\ \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = (u^{-1})_{*u(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{u(p)},$$

d.h. $u_{*p} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{u(p)}$.

Aufgabe 2. Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

$$\pi\colon \dot{\bigcup_{p\in M}} T_pM \longrightarrow M$$

bezeichne die Abbildung, die jedem Tangentenvektor seinen Fußpunkt zuordnet. Zeige:

Es existiert genau eine differenzierbare Mannigfaltigkeit TM mit zugrundeliegender Menge $\dot\bigcup_{p\in M} T_pM$ derart, daß $\overline{u} \in \mathcal{A}_{TM}$ für jedes $u \in \mathcal{A}_M$, wobei $\overline{u}\colon G\overline{u} := \overline{\pi}^1(Gu) \to u(Gu) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definiert ist durch

$$\overline{u}(z) := ((u \circ \pi)(z), z \cdot u).$$

Für $(a, (b_1, \ldots, b_m)) \in u(Gu) \times \mathbb{R}^m$ gilt ferner

$$\overline{u}^{-1}(a, (b_1, \ldots, b_m)) = \sum_{i=1}^m b_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{u^{-1}(a)}.$$

$\overline{u}$ heißt die *zu der Karte u von M assoziierte Bündelkarte von TM.*

TM heißt das *Tangentialbündel von M.*

Besprechung: Dienstag, den 09.02.2010