WS 2009/2010 Dr. Ch. Bock

Einführung in die Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Beweise:

(i) $\| \ \|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty := \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$, ist eine Norm für $\mathbb{R}^n$, die sog. *Maximumsnorm* (oder L^∞*-Norm*).

(ii) Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$, $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ sowie $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $a_{ki}, b_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\lim_{k\to\infty} a_k = b$ in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty) \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \lim_{k\to\infty} a_{ki} = b_i$ (in $\mathbb{R}$).

(b) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, (d.h. per def. $\exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|_\infty \leq C$) $\iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} (a_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkte Folge (in $\mathbb{R}$).

(iii) Jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Tip: Der Fall $n = 1$ ist klar nach Satz von Bolzano-Weierstraß der Analysis I.

Aufgabe 2. Beweise $(**)$ in Satz 1.12 der Vorlesung.

Aufgabe 3. Beweise Satz 1.14 der Vorlesung.

Definition. Seien M eine Menge und N ein metrischer Raum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_n \colon M \to N$ sowie $f \colon M \to N$ eine weitere Abbildung.

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert (punktweise auf* M*) gegen* f (in Zeichen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$)
$:\iff \forall_{p\in M} \lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf* M *gegen* f
$:\iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{p\in M} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} d\big(f_n(p), f(p)\big) < \varepsilon$.

Aufgabe 4. Seien M, N metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Abbildungen $f_n \colon M \to N$, die gleichmäßig auf M gegen eine Abbildung $f \colon M \to N$ konvergiert.

Zeige, daß dann auch f stetig ist.

Besprechung: Dienstag, den 3.11.2009