Einführung in die Topologie

Übungsblatt 4

Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt per def. *offen*, wenn sie alle offenen Teilmengen von X auf offene Teilmengen von Y abbildet.

Aufgabe 1 (Produkttopologie)**.** Seien M_1, M_2 topologische Räume. Beweise:

(i) $\mathrm{Top}(M_1 \times M_2) := \{V \in \mathfrak{P}(M_1 \times M_2) \,|\, \forall_{(p_1,p_2)\in V} \exists_{U_i \in \mathrm{Umg}(p_i,M_i), i\in\{1,2\}} U_1 \times U_2 \subset V\}$ ist eine Topologie für $M_1 \times M_2$, die sog. *Produkttopologie*.

Im folgenden betrachten wir $M_1 \times M_2$ stets als topologischen Raum mit dieser Topologie.

(ii) Für $i \in \{1,2\}$ seien $(p_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in M_i und $p_i \in M_i$. Dann gilt:

$(p_{k1}, p_{k2})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $M_1 \times M_2$ gegen (p_1, p_2)
$\iff \forall_{i\in\{1,2\}} (p_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in M_i gegen p_i.

(iii) Die Abbildungen $\pi_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$, $(p_1, p_2) \mapsto p_i$, $i \in \{1,2\}$, sind stetig und offen.

(iv) Seien N ein topologischer Raum und $f\colon N \to M_1 \times M_2$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig} \iff \forall_{i\in\{1,2\}}\, \pi_i \circ f\colon N \longrightarrow M_i \text{ ist stetig.}$$

Insbes. sind für alle $p_1 \in M_1$ und alle $p_2 \in M_2$ die Abbildungen $(\mathrm{id}, p_2)\colon M_1 \to M_1 \times M_2$, $q_1 \mapsto (q_1, p_2)$ und $(p_1, \mathrm{id})\colon M_2 \to M_1 \times M_2$, $q_2 \mapsto (p_1, q_2)$ stetig.

Aufgabe 2 (Über den offenen Kern und die abgeschlossene Hülle)**.** Seien M ein topologischer Raum und $N, A, B \subset M$. Zeige:

(i) $\overset{\circ}{\widehat{M \setminus N}} = M \setminus \overline{N}$, $\quad \overline{M \setminus N} = M \setminus \overset{\circ}{N}$,

(ii) $A \subset B \Longrightarrow (\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \wedge \overline{A} \subset \overline{B})$,

(iii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(iv) $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, $\quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
und belege durch Beispiele, daß sich die Inklusionen i.a. nicht zu Mengengleichheiten verschärfen lassen.

bitte wenden

Aufgabe 3 (Charakterisierung der Stetigkeit durch die abgschlossene Hülle)**.** Seien M, N topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeige, daß f genau dann stetig ist, wenn gilt $\forall_{A \subset M} f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (d.h. $\overline{A} \subset \overset{-1}{f}(\,\overline{f(A)}\,)$).

Aufgabe 4 (Über den Wegzusammenhang und den Zusammenhang in Vektorräumen)**.** Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige:

(i) Für alle $v, w \in V$ ist $c\colon [0,1] \to V$, $t \mapsto v + t(w - v)$, ein stetiger Weg in V.

(ii) V ist wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend.

(iii) Jede offene zusammenhängende Teilmenge G von V ist wegzusammenhängend.

Tip („klassischer" Zusammenhangsschluß): Zeige, daß für $p \in G$ sowohl U als auch $G \backslash U$ offen ist, wobei $U := \{q \in G \,|\, \text{Es gibt einen stetigen Weg in } G \text{ von } p \text{ nach } q.\}$.

Besprechung: Dienstag, den 24.11.2009