WS 2009/2010 Dr. Ch. Bock

Einführung in die Topologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei M ein metrischer Raum. Zeige, daß jede kompakte Teilmenge K von M beschränkt und abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (Quotiententopologie)**.** Seien M ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation in M. $M_\sim := M/\sim$ sei die Menge aller Äquivalenzklassen und $\pi\colon M \to M_\sim$, $a \mapsto [a]$, die Projektion. Zeige:

(i) (a) $\operatorname{Top}(M_\sim) := \{U \subset M_\sim \mid \overline{\pi}^1(U) \in \operatorname{Top}(M)\}$ ist eine Topologie für $M_\sim$.

(b) $\pi\colon M \to M_\sim$ ist stetig und $\operatorname{Top}(M_\sim)$ ist die „feinste" (d.h. per def. die Topologie mit den meisten offenen Mengen) mit dieser Eigenschaft.

$\operatorname{Top}(M_\sim)$ heißt die *Quotiententopologie* von $M_\sim$. Wir schreiben kurz $M_\sim$ für den *topologischen Quotientenraum* $\big(M_\sim, \operatorname{Top}(M_\sim)\big)$.

(ii) M kompakt $\Longrightarrow M_\sim$ kompakt.

(iii) Seien N ein weiterer topologischer Raum und $f\colon M_\sim \to N$ eine Abbildung. Dann ist $f\colon M_\sim \to N$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi\colon M \to N$ stetig ist.

Aufgabe 3.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Auf S^n definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$p \sim q \;:\Longleftrightarrow\; p = q \vee p = -q.$$

Zeige, daß der topologische Quotientenraum $P^n(\mathbb{R}) := S^n/\sim$ hausdorffsch, kompakt und zusammenhängend ist.

$P^n(\mathbb{R})$ heißt der *n-dimensionale reelle projektive Raum.*

(ii) Auf $\mathbb{R}$ wird durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation definiert. Zeige, daß der topologische Quotientenraum $\mathbb{R}/\sim$ nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 4. Beweise Satz 2.2 der Vorlesung.

Besprechung: Dienstag, den 1.12.2009