Einführung in die Topologie

Christoph Bock

Vorlesung

an der

Friedrich-Alexander-Universität

Erlangen-Nürnberg

Version vom 12. Dezember 2017

Vorwort

Der Begriff *Topologie* leitet sich von den griechischen Worten *τόπος* (dt.: der Ort) und *λόγος* (dt.: das Wort, die Lehre) ab. Die Topologie, als Teilgebiet der Mathematik, beschäftigt sich mit der relativen Lage – dem Ort –, die Punktmengen – sog. Räume – zueinander einnehmen; hierbei spielen im Gegensatz zur Geometrie quantitative Größen wie Abstände oder Winkel keine Rolle. Konkreter gesprochen, handelt es sich um die Lehre von Räumen zwischen denen man den Begriff der stetigen Abbildung definieren kann und das Studium letzterer. Natürlich soll der Begriff der Stetigkeit dabei so eingeführt werden, daß im Spezialfall die in der Analysis I eingeführten stetigen Abbildungen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ wiedererkannt werden. Eng verbunden mit der Definition der Stetigkeit ist die der Folgenkonvergenz. Auch diese läßt sich auf topologischem Niveau einführen.

Das vorliegende Skriptum gibt den Inhalt meiner Vorlesung *Einführung in die Topologie* aus dem WS 2009/2010 an der Universität Erlangen-Nürnberg und Teile des zugehörigen Seminares aus dem SS 2010 wieder. Das Skriptum gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil wird eine Einführung in die allgemeine Topologie gegeben, in der der Begriff des topologischen Raumes im Mittelpunkt steht. Das Thema des zweiten Teiles wird die elementare Homotopietheorie sein. Die Fundamentalgruppe, eine Homöomorphie-Invariante – d.h., daß sie unter einem Homöomorphismus[1] erhalten bleibt –, wird eingeführt und die Existenz der universellen Überlagerung bewiesen. Im dritten Teil werden differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen zwischen solchen studiert. Wir definieren ferner den Tangentialraum an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dessen Kenntnis es uns ermöglicht, von Immersionen und Untermannigfaltigkeiten zu sprechen. Zum Abschluß beweisen wir den Einbettungssatz von Whitney für kompakte Mannigfaltigkeiten.

Ich habe mich bei der Ausarbeitung der o.g. Vorlesung sehr eng an verschiedenen Kapiteln aus Vorlesungen meines Diplomvaters W. Henke orientiert.

Für Hinweise auf Fehler, Kritik oder Lob bin ich dankbar. Kontakten können Sie mich per E-Mail an `bock at mi.uni-erlangen.de`.

Ich sollte an dieser Stelle anmerken, daß das vorliegende Skriptum nicht gegengelesen wurde. Ich kann nicht ausschließen, daß sich beim Übertrag meiner handschriftlichen Notizen auf die folgenden Seiten Fehler eingeschlichen haben. Ich entdecke bei jeder Durchsicht kleinere Ungenauigkeiten – sprich Fehler. Aber auch dies sollte für den Leser lehrend sein: Nicht sämtliche Resultate, die in der Literatur – egal, ob Skriptum oder Buch – angegeben sind, sind wahr. Der Leser sollte sich von jedem Beweis selbst überzeugen.

Erlangen, im August 2014

Christoph Bock

[1] d.i. eine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

Topologische, metrische und Hausdorff-Räume

Definition 1.1 (Topologischer Raum)**.**

(i) Seien M eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$.

$\mathcal{T}$ heißt eine *Topologie für M* genau dann, wenn gilt

(T1) $\varnothing \in \mathcal{T} \;\wedge\; M \in \mathcal{T}$.

(T2) Ist I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ die Menge U_i ein Element von $\mathcal{T}$, so gilt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(T3) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

(ii) Ein Paar $(M, \mathcal{T})$, bestehend aus einer Menge M und einer Topologie $\mathcal{T}$ für M, heißt ein *topologischer Raum*. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen dann die *offenen Mengen* des topologischen Raumes $(M, \mathcal{T})$.

Beispiel.

1.) Ist M eine Menge, so hat man die folgenden Topologien für M:

$\mathcal{T}_1 := \mathfrak{P}(M)$, die sog. *diskrete Topologie für M*, (alle Teilmengen von M sind offen).

$\mathcal{T}_2 := \{\varnothing, M\}$, die sog. *triviale Topologie für M*.

$\mathcal{T}_3 := \{\varnothing\} \cup \{U \in \mathfrak{P}(M) \,|\, M \setminus U \text{ endlich}\}$, (nur $\varnothing$ und die Komplemente endlicher Mengen sind offen).

2.) (Die kanonische Topologie für $\mathbb{R}$)

Wir definieren $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ durch

$$\forall_{U\subset\mathbb{R}} \left(U \in \mathcal{T} :\Longleftrightarrow \forall_{t_0\in\mathbb{R}} \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \left]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon\right[\subset U\right).$$

Nach Übung 1.1 ist $\mathcal{T}$ eine Topologie für $\mathbb{R}$, die sog. *kanonische Topologie für $\mathbb{R}$*.

Wir betrachten $\mathbb{R}$ im folgenden stets als topologischen Raum mit dieser Topologie.

Bemerkung. Oft werden wir einen topologischen Raum mit einem einzigen Symbol – z.B. M – bezeichnen. Wir schreiben dann $\boxed{|M|}$ (oder auch einfach M) für die M zugrundeliegende Menge und $\boxed{\mathrm{Top}(M)}$ für die Topologie für M, also

$$M = \big(\underbrace{|M|}_{=M}, \mathrm{Top}(M)\big).$$

Definition 1.2. Seien M ein topologischer Raum, $N \subset M$ und $p \in M$.

(i) N heißt *offen* $:\Longleftrightarrow N \in \mathrm{Top}(M)$, vgl. 1.1(ii).

N heißt *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow M \setminus N$ offen.

Warnung. „Abgeschlossen" bedeutet nicht das Gegenteil von „offen". Z.B. sind $\varnothing$ und $|M| = M$ stets sowohl offen als auch abgschlossen. Dagegen ist die Teilmenge $]0,1]$ von $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen (in dem topologischen Raum $\mathbb{R}$).

(ii) N heißt *Umgebung von p in M* $:\Longleftrightarrow N$ offen und $p \in N$.

Die Menge aller Umgebungen von $p \in M$ bezeichnen wir mit $\boxed{\mathcal{U}^{\circ}(p, M)}$.

Definition 1.3 (Metrischer Raum)**.**

(i) Sei M eine Menge. Eine Funktion $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, die je zwei Punkten $p, q \in M$ ihren sog. *Abstand $d(p,q)$ bzgl. d* zuordnet, heißt eine *Metrik*[2] (oder *Abstandsfunktion*) *für M* genau dann, wenn für alle $p, q, r \in M$ gilt

(D1) $d(p,q) \geq 0 \;\wedge\; (d(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q)$ (Positiv-Definitheit),

(D2) $d(p,q) = d(q,p)$ (Symmetrie),

(D3) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ (Dreiecksungleichung).

(ii) Ein Paar (M, d), bestehend aus einer Menge M und einer Metrik d für M heißt ein *metrischer Raum*.

(iii) Ist (M, d) ein metrischer Raum, so definieren wir für alle $p \in M$ die *ε-Umgebung von p* (zur Nahmenswahl s.u. 1.4) durch

$$\boxed{U_\varepsilon(p)} := \{q \in M \mid d(p,q) < \varepsilon\}.$$

Beispiel.

1.) $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to R$, $(t, s) \mapsto |t - s|$, ist offenbar eine Metrik für $\mathbb{R}$.

2.) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit *Norm* $\|\ldots\| \to \mathbb{R}$, d.h. per definitionem, daß für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(N1) $\|v\| \geq 0 \;\wedge\; (\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0)$ (Positiv-Definitheit),

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (Homogenität),

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

Dann ist V in kanonischer Weise ein metrischer Raum mit der Metrik $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \|v - w\|$.

3.) Für eine beliebige Menge M ist $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, defiert durch

$$d(p,q) := \begin{cases} 0 & \text{für } p = q, \\ 1 & \text{für } p \neq q, \end{cases}$$

eine Metrik für M.

[2] vom griechischen $\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa o\varsigma$ (dt.: aus dem Meter)

Bemerkung. Auch einen metrischen Raum bezeichnen wir oft mit einem einzigen Symbol, z.B. M. Wir schreiben dann wieder $\boxed{|M|}$ (oder einfach M) für die M zugrundeliegende Menge und $\boxed{d_M}$ (oder einfach d) für die Metrik für M, also

$$M = \big(|M|, d_M\big).$$

Satz 1.4.
Vor.: *Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d.*
Beh.: *M ist in kanonischer Weise ein topologische Raum mit der Topologie*

$$\boxed{\mathcal{T}_d} := \{N \in \mathfrak{P}(M) \,|\, \forall_{p \in M} \exists_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} U_\varepsilon(p) \subset N\}. \tag{1}$$

Ferner gilt für alle $p \in M$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$U_\varepsilon(p) \in \mathcal{T}_d.$$

Beweis. 1.) $\mathcal{T}_d$ ist eine Topologie:

Ad (T1): $\varnothing, M \in \mathcal{T}_d$ ist klar.

Ad (T2): Seien I eine Menge und $U_i \in \mathcal{T}_d$ für jedes $i \in I$. Zu zeigen ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Zum Beweis hiervon sei $p \in \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$. Dann existiert $i_0 \in I$ mit $p \in U_{i_0}$. Wegen $U_{i_0} \in \mathcal{T}_d$ existiert weiter eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit

$$U_\varepsilon(p) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Damit ist gezeigt: $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Ad (T3): Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$ und sei $p \in U_1 \cap U_2$ beliebig. Für $i \in \{1, 2\}$ existiert wegen $p \in U_i \in \mathcal{T}_d$ eine reelle Zahl $\varepsilon_i \in \mathbb{R}_+$ mit $U_{\varepsilon_i}(p) \subset U_i$. Setzt man $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, so folgt

$$U_\varepsilon(p) \subset U_1 \cap U_2.$$

Damit ist gezeigt: $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

2.) Für $p \in M$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gilt $U_\varepsilon(p) \in \mathcal{T}_d$:

Sei $q \in U_\varepsilon(p)$, also gilt $d(p,q) < \varepsilon$. Wir setzen $\delta := \varepsilon - d(p,q) \in \mathbb{R}_+$ und behaupten $U_\delta(q) \subset U_\varepsilon(p)$.

Beweis hiervon: Sei $r \in U_\delta(q)$, d.h. $d(q,r) < \delta$. Dann folgt

$$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon,$$

d.h. $r \in U_\varepsilon(p)$. □

Definition 1.5 (Hausdorff-Raum)**.** Ein topologischer Raum M heißt *hausdorffsch* (oder *Hausdorff-Raum*) genau dann, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. D.h. genau

$$\forall_{p,q \in M, p \neq q} \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} \exists_{V \in \mathcal{U}^\circ(q,M)} \, U \cap V = \varnothing.$$

Beispiel. Seien M eine mindestens zweipunktige Menge und $\mathcal{T}$ die triviale Topologie für M. Dann ist $(M, \mathcal{T})$ nicht hausdorffsch.

Satz 1.6. *Ist M ein Hausdorff-Raum, so ist für jedes $p \in M$ die Menge $\{p\}$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $p \in M$ fest gewählt. Zu zeigen ist, daß $M \setminus \{p\}$ offen ist.

Zu jedem $\in M \setminus \{p\}$ existieren nach Voraussetzung disjunkte Umgebungen U_q und V_q von p und q. Wegen $q \in V_q$ gilt insbesondere $p \notin V_q$, d.h. $V_q \subset M \setminus \{p\}$. Hieraus folgt:

$$M \setminus \{p\} = \bigcup_{q \in M \setminus \{p\}} V_q.$$

Mit (T2) folgt die Behauptung. □

Satz 1.7. *Jeder metrische Raum ist als topologischer Raum hausdorffsch.*

Beweis. Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d und seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{2} d(p,q) \in \mathbb{R}_+$. Nach 1.4 sind $U := U_\varepsilon(p)$ und $V := U_\varepsilon(q)$ offene Teilmengen von M. Dann gilt $U \cap V = \varnothing$:

Angenommen es existiert $r \in U \cap V$, d.h. $d(p,r) < \varepsilon$ und $d(q,r) < \varepsilon$. Dann folgt

$$2\varepsilon = d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

Widerspruch! □

Bemerkung 1.8. Jeder normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\ldots\|)$ ist in kanonischer Weise ein metrischer Raum mit Metrik d, definiert durch $d(p,q) := \|p-q\|$. Jeder metrische Raum (M,d) ist in kanonischer Weise ein hausdorffscher topologischer Raum mit der Topologie $\mathrm{Top}(M)$ wie in (1).

Also kurz: normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume $\subset$ metrische Räume $\subset$ hausdorffsche topologische Räume.

Alle Begriffe, die für Objekte einer dieser Klassen definiert sind, sind daher automatisch auch für Objekte einer enthaltenen Klasse definiert.

Konvergenz von Folgen

1.9 (Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen)**.**

Definition 1. Seien M ein topologischer Raum, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und sei $p \in M$. Wir definieren dann:

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert (in M) gegen p* $:\Longleftrightarrow \forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} \, p_n \in U$

Lemma. *Sind M ein Hausdorff-Raum und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, die sowohl gegen $p \in M$ als auch gegen $q \in M$ konvergiert, so gilt $p = q$.*

Beweis. Angenommen $p \neq q$. Nach Voraussetzung existieren $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ und $V \in \mathcal{U}^\circ(q,M)$ mit $U \cap V = \varnothing$. Weiter existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_1} \, p_n \in U \quad \text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_2} \, p_n \in V,$$

also folgt für $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$: $p_{n_0} \in U \cap V$, Widerspruch! □

Warnung. Das Lemma ist i.a. falsch, wenn M nicht hausdorffsch ist. Ist z.B. M ein topologischer Raum, der mit der trivialen Topologie $\mathrm{Top}(M) = \{\varnothing, M\}$

versehen ist, so konvergiert jede Folge in M gegen jedes Element von M.

Definition 2. Sind daher M ein Hausdorff-Raum und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $p \in M$ konvergiert, so ist p mit dieser Eigenschaft (nach dem Lemma) eindeutig bestimmt, und wir setzen

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n} := p$$

und nennen p den *Grenzwert* oder *Limes von* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für n gegen unendlich.*

Übungsaufgabe. *Seien A eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes M und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Ist dann $p \in M$ derart, daß $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert, so gilt $p \in A$.*

Beweis. Da A abgeschlossen ist, ist $M \setminus A$ offen. Angenommen $p \in M \setminus A$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}\, p_n \in M \setminus A$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 1.10 (Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen). *Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d, (also M hausdorffsch nach 1.7.) Dann gilt für alle Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M und alle $p \in M$:*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}} \big(n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{p_n \in U_\varepsilon(p)}_{\Leftrightarrow\, d(p_n,p) < \varepsilon}\big). \tag{2}$$

Die rechte Seite von (2) besagt gerade, daß $\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0$ im Sinne der Analysis I gilt.

Beweis. „$\Rightarrow$" ist klar, da jede ε-Umgebung nach 1.4 offen ist.

Zu „$\Leftarrow$": Sei $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$. Nach Definition der Topologie von M (vgl. 1.4) existiert dann $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\varepsilon(p) \subset U$. Nach Voraussetzung gilt daher für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $p_n \in U_\varepsilon(p) \subset U$. □

Bemerkung. Die Aussage (2) zeigt, daß die Definition in 1.9 im Spezialfalle eines metrischen Raumes mit der Definition der Konvergenz der Analysis übereinstimmt.

Stetigkeit

Definition 1.11 (Stetigkeit). Seien M, N topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(i) Sei $p \in M$.

f heißt *stetig in p* $:\iff \forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(f(p),N)} \exists_{V\in\mathcal{U}^\circ(p,M)}\, f(V) \subset U$.

Es gilt:

f stetig in $p \implies$ Für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in M gegen p konvergiert, konvergiert auch die Folge $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in N gegen $f(p)$. (3)

[Denn sind $U \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$ beliebig und $V \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ wie oben gewählt, so gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $p_n \in V$, also auch $f(p_n) \in f(V) \subset U$.]

Bemerkung. Wir erwähnen ohne Beweis, daß in (3) i.a. nicht „$\Leftrightarrow$" anstelle von „$\Rightarrow$" gilt. Dagegen gilt stets „$\Leftrightarrow$", falls M und N sogar metrische Räume sind, s.u. 1.14.

(ii) f heißt *stetig* $:\Longleftrightarrow \forall_{p\in M}\, f$ ist stetig in p.

$\boxed{\mathcal{C}(M,N)}$ bezeichne die Menge aller stetigen Abbildungen $M \to N$.

Beispiel. Ist $q \in N$, so ist die konstante Abbildung $f\colon M \to N$ vom Wert q stetig.

[Denn sind $p \in M$ und $U \in \mathcal{U}^\circ(\underbrace{f(p)}_{=q}, N)$, so gilt zum einen $M \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und zum anderen $f(M) = \{q\} \subset U$.]

Satz 1.12. *Seien M, N topologische Räume (mit Topologien* $\mathrm{Top}(M), \mathrm{Top}(N)$*) und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt:*

$$f \textit{ ist stetig} \iff \forall_{U\in\mathrm{Top}(N)}\, \overset{-1}{f}(U) \in \mathrm{Top}(M) \tag{4}$$

$$\iff \forall_{A\subset N\, abgeschlossen}\, \overset{-1}{f}(A) \textit{ abgeschlossen in } M \tag{5}$$

Beweis. Zu (4): „$\Rightarrow$" Sei U offen in N. Wegen der Stetigkeit von f existiert zu jedem $p \in \overset{-1}{f}(U)$ – d.h. $U \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$ – ein $V_p \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ mit $f(V_p) \subset U$, d.h. $V_p \subset \overset{-1}{f}(U)$. Dann folgt

$$\overset{-1}{f}(U) = \bigcup_{p\in\overset{-1}{f}(U)} V_p, \tag{6}$$

und die rechte Seite von (6) ist offen nach (T2).

[(6) „$\subset$" gilt wegen $\forall_{p\in\overset{-1}{f}(U)}\, p \in V_p$ und „$\supset$" wegen $\forall_{p\in\overset{-1}{f}(U)}\, V_p \subset \overset{-1}{f}(U)$.]

„$\Leftarrow$" Sei $p \in M$ und $U \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$.

Dann gilt $p \in \overset{-1}{f}(U)$ und nach Voraussetzung ist $\overset{-1}{f}(U)$ offen in M, also $V := \overset{-1}{f}(U) \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und $f(V) = f(\overset{-1}{f}(U)) \subset U$.

Zu (5): Für jede Teilmenge A von N gilt

$$A \text{ abgeschlossen} \iff N \smallsetminus A \in \mathrm{Top}(N) \quad \text{und} \quad \overset{-1}{f}(N \smallsetminus A) = M \smallsetminus \overset{-1}{f}(A).$$

Daher folgt (5) aus (4). □

Satz 1.13. *Es seien M_1, M_2, M_3 topologische Räume sowie $f\colon M_2 \to M_3$ und $g\colon M_1 \to M_2$ zwei Abbildungen. Ferner sei $p \in M_1$. Dann gilt:*

(i) g stetig in p und f stetig in $g(p) \Longrightarrow f \circ g$ stetig in p.

(ii) g stetig und f stetig $\Longrightarrow f \circ g$ stetig.

Beweis. Zu (i): Zu $U_3 \in \mathcal{U}^\circ((f \circ g)(p), M_3)$ existiert zunächst wegen der Stetigkeit von f in $g(p)$ ein $U_2 \in \mathcal{U}^\circ(g(p), M_2)$ mit $f(U_2) \subset U_3$ und sodann wegen der Stetigkeit von g in p ein $U_1 \in \mathcal{U}^\circ(p, M_1)$ mit $g(U_1) \subset U_2$, also folgt

$$(f \circ g)(U_1) = f(g(U_1)) \subset f(U_2) \subset U_3.$$

Aus der Beliebigkeit von U_3 folgt die Behauptung von (i).

(ii) folgt trivial aus (i). □

Satz 1.14 (Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen)**.** *Seien M, N metrische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung sowie $p \in M$. Dann sind die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:*

(i) *f ist stetig in p.*

(ii) $\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \underbrace{\forall_{q\in M} \big(d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p),f(q)) < \varepsilon\big)}_{\Leftrightarrow\, f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))}$.

(iii) *Für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$.*

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (iii)“ gilt nach (3).

Zu „(iii) $\Rightarrow$ (ii)“: Angenommen (ii) ist falsch. Dann existieren $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left(d(p_n,p) < \frac{1}{n+1} \wedge d(f(p_n),f(p)) \geq \varepsilon \right),$$

und dies widerspricht (iii).

Zu „(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Sei $U \in \mathcal{U}^\circ(f(p),N)$. Nach Definition der Topologie von N existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\varepsilon(f(p)) \subset U$. Wähle zu ε ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ gemäß (ii). Dann gilt $U_\delta(p) \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ (vgl. 1.4) und

$$\forall_{q\in U_\delta(p)} d(q,p) < \delta, \text{ also nach (ii): } d(f(q),f(p)) < \varepsilon,$$

d.h. $\forall_{q\in U_\delta(p)} f(q) \in U_\varepsilon(f(p)) \subset U$, also $f(U_\delta(p)) \subset U$. Damit ist (i) gezeigt. □

Bemerkung.

1.) Die Eigenschaft (iii) nennt man *Folgenstetigkeit von f in p.*

2.) Der letzte Satz zeigt, daß Definition 1.11 im Spezialfall metrischer Räume mit der Definition der Stetigkeit der Analysis II übereinstimmt.

Ist speziell $N = \mathbb{R}$ und $M \subset \mathbb{R}$, jeweils versehen mit der Metrik

$$(t_1,t_2) \longmapsto |t_1 - t_2|,$$

so zeigt der Satz, daß die Stetigkeitsdefinition 1.11 mit der der Analysis I übereinstimmt.

Topologische Teilräume

Definition 1.15 (Teilraumtopologie)**.** Seien M ein topologischer Raum und N eine Teilmenge von M sowie G eine Teilmenge von N.

G heißt *offen im Teilraum N von M* genau dann, wenn eine in M offene Menge H existiert mit

$$G = H \cap N.$$

Satz. *Seien M ein topologischer Raum (mit Topologie* $\mathrm{Top}(M)$*) und N eine Teilmenge von M. Dann ist*

$$\mathrm{Top}_M(N) := \{G \subset N \mid G \textit{ offen im Teilraum } N \textit{ von } M\}$$

eine Topologie für N, die sog. Teilraumtopologie von N bzgl. M.

Beweis als Übung. □

Wir betrachten eine Teilmenge eines topologischen Raumes stets als topologischen Raum mit der durch den umgebenden Raum induzierten Teilraumtopologie.

Sofern keine Verwechslungen auftreten können, schreiben wir auch $\mathrm{Top}(N)$ anstelle von $\mathrm{Top}_M(N)$.

Beispiel.

1.) Für $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir den $\mathbb{R}^n$ als Hausdorff-Raum mit der Topologie, die durch die Maximumsnorm $\|\ldots\|_\infty$ (vgl. Übung 2.1) induziert wird, vgl. 1.8. Wir betrachten dann weiter jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als topologischen Teilraum mit der Teilraumtopologie bzgl. $\mathbb{R}^n$.

2.) $]0,1]$ ist offene Teilmenge des topologischen Teilraumes $]-1,1]$ von $\mathbb{R}$.

3.) Die Teilraumtopologie von $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}$ bzgl. $\mathbb{R}$ ist die diskrete Topologie für $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}$.

Satz 1.16. *Seien M, N topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann folgt:*

(i) Für jede Teilmenge $\widetilde{M}$ von M und alle $p \in \widetilde{M}$ gilt:
$f\colon M \to N$ stetig in $p \Longrightarrow f|_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to N$ stetig in p.

(ii) Für jede Teilmenge $\widetilde{N}$ von N mit $f(M) \subset \widetilde{N}$ und alle $p \in M$ gilt:
$f\colon M \to N$ stetig in $p \Longleftrightarrow f\colon M \to \widetilde{N}$ stetig in p.

Beweis als Übung.

Bemerkung. Die Richtung „$\Leftarrow$“ in (i) ist i.a. falsch, wie das Beispiel $\widetilde{M} = \varnothing$ zeigt.

Satz 1.17. *Seien M ein hausdorffsch topologischer Raum und $N \subset M$. Dann ist der topologische Teilraum N von M hausdorffsch.*

Beweis. Seien $p, q \in N \subset M$ mit $p \neq q$. Dach Voraussetzung $U, V \in \mathrm{Top}(M)$ mit $p \in U$, $q \in V$ und $U \cap V = \varnothing$ existieren, folgt $U \cap N, V \cap N \in \mathrm{Top}(N)$, $p \in U \cap N$, $q \in V \cap N$ und $(U \cap N) \cap (V \cap N) = (U \cap V) \cap N = \varnothing$. □

Kompaktheit

Definition 1.18 (Kompaktheit)**.** Sei M ein topologischer Raum.

(i) M heißt *kompakt* genau dann, wenn jede Überdeckung von M durch offene Teilmengen von M besitzt eine endliche Teilüberdeckung; d.h. genauer: Zu jeder Abbildung $I \to \mathrm{Top}(M)$, $i \mapsto U_i$, einer beliebigen Menge I mit $\bigcup_{i \in I} U_i \supset M$ existieren endlich viele $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \supset M$.

(ii) Sei $N \subset M$.

N heißt *kompakte Teilmenge von* M genau dann, wenn der Teilraum N von M kompakt ist. D.h. genau, daß jede Überdeckung von N durch offene Mengen des Teilraumes N von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Es gilt:

$$N \text{ ist kompakt} \iff \begin{array}{l}\text{Jede Überdeckung von } N \text{ durch} \\ \text{offene Teilmengen von } M \text{ besitzt} \\ \text{eine endliche Teilüberdeckung.}\end{array} \qquad (7)$$

[Zu (7): „⇒“ Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von N durch offene Teilmengen von M. Dann ist $(U_i \cap N)_{i\in I}$ eine Überdeckung von N durch offene Teilmengen des Teilraumes N von M, welche nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung

$$(U_{i_1} \cap N) \cup \ldots \cup (U_{i_k} \cap N) \supset N$$

besitzt, d.h. $(U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}) \cap N \supset N$.

„⇐“ Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von N durch offene Teilmengen des Teilraumes N von M. Nach Definition der Teilraumtopologie existiert für jedes $i \in I$ eine offene Menge U_i von M mit $V_i = U_i \cap N$. Dann ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von N durch offene Teilmengen von M, welche nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \supset N$ besitzt, und es gilt auch $V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_k} \supset N$.]

Beispiel.

1.) Jeder topologische Raum M mit $\#|M| < \infty$ ist trivialerweise kompakt.

2.) $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, da die Überdeckung $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

3.) Eine Teilmenge N von $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist, s. u. 1.47.

4.) Der Topologische Raum $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ ist kompakt, vgl. Übung 3.4(iii). $\widehat{\mathbb{R}}$ heißt deshalb auch die *Zweipunkt-Kompaktifizierung von* $\mathbb{R}$.

Satz 1.19 (Abgeschlossene Teilmengen von Kompakta sind kompakt)**.** *Seien M ein topologischer Raum, K eine kompakte Teilmenge von M und A eine abgeschlossene Teilmenge von M mit $A \subset K$. Dann ist A eine kompakte Teilmenge von M.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von A durch offene Teilmengen von M. Dann ist $(U_i)_{i\in I}$ zusammen mit der offenen Menge $M \smallsetminus A$ eine offene Überdeckung von K (sogar von M) durch offene Teilmengen von M. Wegen der Kompaktheit von K existieren daher endlich viele $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit

$$K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \cup (M \smallsetminus A),$$

also gilt auch (wegen $A \subset K$)

$$A \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}.$$

Nach (7) ist damit die Kompaktheit von A gezeigt. □

Satz 1.20 (Kompaktheitstreue stetiger Abbildungen)**.** *Seien $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und K eine kompakte Teilmenge von M. Dann ist $f(K)$ eine kompakte Teilmenge von N.*

Beweis. Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $f(K)$ durch offene Teilmengen von N. Wegen der Stetigkeit von f ist $U_i := \overline{f}^1(V_i)$ für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge von M, und es gilt

$$\bigcup_{i\in i} U_i = \bigcup_{i\in I} \overline{f}^1(V_i) = \overline{f}^1\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \supset \overline{f}^1(f(K)) \supset K.$$

Daher ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von K durch offene Teilmengen von M. Wegen der Kompaktheit von K existieren $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit

$$U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \supset K,$$

also gilt auch

$$V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_k} \supset f(U_{i_1}) \cup \ldots \cup f(U_{i_k}) = f(U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}) \supset f(K),$$

d.h. $f(K)$ ist kompakt. □

Satz 1.21 (Kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen)**.**
Vor.: *Sei M ein Hausdorff-Raum.*
Beh.: *Ist K eine kompakte Teilmenge von M, so ist K abgeschlossen in M.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß $M \setminus K$ eine offene Teilmenge von M ist. Wir zeigen

$$\forall_{p\in M\setminus K} \exists_{W_p \in \mathcal{U}^\circ(p,M)}\, W_p \in M \setminus K. \tag{8}$$

Aus (8) folgt offenbar $M \setminus K = \bigcup_{p\in M\setminus K} W_p$, und diese Menge ist nach (T2) offen in M.

Zu (8): Sei $p \in M \setminus K$ fest gewählt. Da M hausdorffsch ist, existieren zu jedem $q \in K$

$$U_q \in \mathcal{U}^\circ(q, M) \qquad \text{und} \qquad V_q \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$$

mit $U_q \cap V_q = \varnothing$.

$(U_q)_{q\in K}$ ist eine Überdeckung von K durch offene Teilmengen von M. Wegen der Kompaktheit von K existieren daher endlich viele Punkte $q_1, \ldots, q_k \in K$ mit $U_{q_1} \cup \ldots \cup U_{q_k} \supset K$. Nach (T3) gilt

$$W_p := V_{q_1} \cup \ldots \cup V_{q_k} \in \mathcal{U}^\circ(p, M),$$

und es folgt

$$K \cap W_p \subset (U_{q_1} \cup \ldots \cup U_{q_k}) \cap W_p = \underbrace{(U_{q_1} \cap \underbrace{W_p}_{\subset V_{q_1}})}_{\subset U_{q_1} \cap V_{q_1} = \varnothing} \cup \ldots \cup \underbrace{(U_{q_k} \cap \underbrace{W_p}_{\subset V_{q_k}})}_{\subset U_{q_k} \cap V_{q_k} = \varnothing} = \varnothing,$$

d.h. es gilt (8). □

Satz 1.22 (Über die Stetigkeit der Umkehrabbildung).
Vor.: *Sei $f\colon M \to N$ eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zusätzlich sei M kompakt und N hausdorffsch.*
Beh.: *Die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ ist stetig.*

Beweis. Sei $A \subset M$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von M. Nach (5) genügt es zu zeigen, daß dann auch das Urbild von A unter f^{-1} eine abgeschlossene Teilmenge von N ist. Dieses Urbild ist gleich

$$\{q \in N \,|\, f^{-1}(q) \in A\} \overset{f \text{ bij.}}{=} f(A).$$

Wegen der Kompaktheit von M ist A nach 1.19 eine kompakte Teilmenge von M, also ist nach 1.20 $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von N. Aus der Hausdorff-Eigenschaft von N folgt schließlich mit 1.21, daß $f(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von N ist. □

Definition 1.23 (Homöomorphismus). Seien M und N topologische Räume.

(i) Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

f heißt *Homöomorphismus von M auf N* genau dann, wenn f bijektiv und stetig mit stetiger Umkehrabbildung ist.

(ii) M und N heißen zueinander *homöomorph* genau dann, wenn ein Homöomorphismus von M auf N existiert.

Zusammenhang und Wegzusammenhang

Definition 1.24 (Zusammenhang). Sei M ein topologischer Raum.

(i) M heißt *zusammenhängend*

$:\Longleftrightarrow \forall_{U_1,U_2 \in \mathrm{Top}(M)} \left(M = U_1 \mathbin{\dot\cup} U_2 \Rightarrow U_1 = \varnothing \vee U_2 = \varnothing\right)$

(ii) Sei $N \subset M$

N heißt *zusammenhängende Teilmenge von M*

$:\Longleftrightarrow$ Der Teilraum N von M ist zusammenhängend.

$\Longleftrightarrow \forall_{U_1,U_2 \in \mathrm{Top}(M)} \left(N = (N \cap U_1) \mathbin{\dot\cup} (N \cap U_2) \Rightarrow N \cap U_1 = \varnothing \vee N \cap U_2 = \varnothing\right)$

Beispiel.

1.) Die Teilmenge $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+ \mathbin{\dot\cup} \mathbb{R}_-$ von $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.

2.) Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind gerade die Intervalle, s.u. 1.26.

3.) Eine Teilmenge N des Teilraumes $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\#N \leq 1$, d.h. $N = \varnothing$ oder N einpunktig. (Beweis als Übung.)

Satz 1.25.
Vor.: *Seien M ein topologischer Raum und $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von M mit $\bigcap_{i \in I} N_i \neq \varnothing$.*
Beh.: *Dann ist auch die Teilmenge $\bigcup_{i \in I} N_i$ von M zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U_1, U_2 \in \mathrm{Top}(M)$ mit

$$\bigcup_{i\in I} N_i = \left((\bigcup_{i\in I} N_i) \cap U_1 \right) \,\dot\cup\, \left((\bigcup_{i\in I} N_i) \cap U_2 \right) \subset U_1 \cup U_2.$$

Nach Voraussetzung existiert $p \in M$ mit $p \in \bigcap_{i\in I} N_i \subset U_1 \cup U_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß $p \in U_1$. Dann folgt offenbar

$$\forall_{i\in I}\, N_i = \underbrace{(N_i \cap U_1)}_{p\in} \,\dot\cup\, (N_i \cap U_2),$$

also wegen des Zusammenhanges von N_i (nach Voraussetzung)

$$\forall_{i\in I}\, N_i \cap U_2 = \varnothing,$$

d.h. $(\bigcup_{i\in I} N_i) \cap U_2 = \varnothing$. □

Satz 1.26. *Für jede Teilmenge N von $\mathbb{R}$ gilt:*
N zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R} \iff N$ ist ein Intervall.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Angenommen N ist kein Intervall, d.h. es existieren $t_1, t_2 \in N$ und $c \in \mathbb{R} \setminus N$ mit $t_1 < c < t_2$. Dann sind $U_1 :=]-\infty, c[$ und $U_2 :=]c, \infty[$ zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit

$$N \subset \mathbb{R} \setminus \{c\} = U_1 \,\dot\cup\, U_2.$$

Dann gilt $N = \underbrace{(N \cap U_1)}_{t_1\in} \,\dot\cup\, \underbrace{(N \cap U_2)}_{t_2\in}$, d.h. N ist nicht zusammenhängend.

„$\Leftarrow$“ Angenommen N ist ein Intervall und N ist nicht zusammenhängend, d.h. es existieren $U_1, U_2 \in \mathrm{Top}(\mathbb{R})$ mit

$$N = \underbrace{(N \cap U_1)}_{\neq\varnothing} \,\dot\cup\, \underbrace{(N \cap U_2)}_{\neq\varnothing}. \tag{9}$$

Wir wählen $a \in N \cap U_1$ und $b \in N \cap U_2$. Ohne Einschränkung gelte $a < b$. Wegen der Intervalleigenschaft von N gilt

$$[a, b] \subset N. \tag{10}$$

Wir setzen

$$M := \{t \in [a, b] \,|\, [a, t] \subset U_1\} \ni a$$

sowie $c := \sup M \in [a, b] \overset{(10)}{\subset} N$. Dann folgt zunächst

$$[a, c[\,\subset U_1. \tag{11}$$

[Zu (11): Angenommen es existiert ein $s \in [a, c[$ mit $s \notin U_1$. Dann gilt einerseits $s < c$ und andererseits (nach Definition von M)

$$s > t \text{ für alle } \underbrace{t \in M,}_{\Rightarrow [a,t] \subset U_1}$$

insbesondere ist s obere Schranke von M und $s < c = \sup M$, Widerspruch!]

Wir behaupten, daß dann gilt

$$c \notin U_1, \tag{12}$$

$$c \notin U_2. \tag{13}$$

Aus (12), (13), $c \in N$ und (9) ergibt sich ein Widerspruch.

[Zu (12): Angenommen $c \in U_1$. Dann folgt aus (9) wegen $c \in N$: $c \notin U_2$, also wegen $c \in [a, b]$ und $b \in U_2$: $c \in [a, b[$, insbesondere $c < b$.

Hieraus folgt weiter wegen $c \in U_1$ und der Offenheit von U_1 in $\mathbb{R}$ die Existenz einer Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $c + \varepsilon \leq b$ und $[c, c + \varepsilon] \subset U_1$, also gilt auch nach (11): $[a, c + \varepsilon] = [a, c[\cup [c, c + \varepsilon] \subset U_1$, also (nach Definition von M) $c + \varepsilon \in M$, im Widerspruch dazu, daß c obere Schranke von M ist. Damit ist (12) gezeigt.

Zu (13): Angenommen $c \in U_2$. Dann folgt aus (9) wegen $c \in N$: $c \notin U_1$, also wegen $a \in U_1$: $c \in]a, b]$, insbesondere $c > a$. Hieraus folgt weiter wegen $c \in U_2$ und der Offenheit von U_2 in $\mathbb{R}$ die Existenz einer Zahl $c - \varepsilon \geq a$ und $c - \varepsilon \in U_2$, also auch nach (11): $c - \varepsilon \in [a, c[\subset U_1$. Daher gilt $c - \varepsilon \in U_1 \cap U_2$ und $c - \varepsilon \in [a, c] \subset [a, b] \overset{(10)}{\subset} N$, im Widerspruch zu (9). Damit ist (13) gezeigt.] □

Definition 1.27 (Wegzusammenhang)**.** Sei M ein topologischer Raum.

(i) Ein *Weg in M* ist per definitionem eine stetige Abbildung $J \to M$ eines Intervalles J von $\mathbb{R}$ in M.

(ii) M heißt *wegzusammenhängend* genau dann, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein Weg c: $[0, 1] \to M$ in M mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ existiert.

(iii) Sei $N \subset M$.

N heißt *wegzusammenhängende Teilmenge von M* genau dann, wenn der topologische Teilraum N von M wegzusammenhängend ist, d.h. genau, daß zu je zwei Punkten $p, q \in N$ ein Weg c: $[0, 1] \to N$ in N mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ existiert. Nach 1.16(ii) ist dies genau dann der Fall, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in N$ ein Weg c: $[0, 1] \to M$ in M mit $c([0, 1]) \subset N$, $c(0) = p$ und $c(1) = q$ existiert.

Bemerkung. Seien $p, q \in M$. Äquivalent zur Forderung der Existenz eines Weges c: $[0, 1] \to M$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ ist die Forderung, daß $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ein Weg $\tilde{c}$: $[a, b] \to M$ mit $\tilde{c}(a) = p$ und $\tilde{c}(b) = q$ existieren.

[Definiere $c := \tilde{c} \circ (a + (b - a)x)$.]

Satz 1.28 ((Weg-)Zusammenhangstreue stetiger Abbildungen)**.** *Sei f: $M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt:*

(i) Ist Z eine zusammenhängende Teilmenge von M, so ist $f(Z)$ eine zusammenhängende Teilmenge von N.

(ii) Ist W eine wegzusammenhängende Teilmenge von M, so ist $f(W)$ eine wegzusammenhängende Teilmenge von N.

Beweis. Zu (i): Seien Z eine zusammenhängende Teilmenge von M und $U_1, U_2 \in \mathrm{Top}(N)$ mit $f(Z) = (f(Z) \cap U_1) \uplus (f(Z) \cap U_2)$. Da f stetig ist, folgt $\overset{-1}{f}(U_1), \overset{-1}{f}(U_2) \in \mathrm{Top}(M)$. Weiterhin gilt $Z = (Z \cap \overset{-1}{f}(U_1)) \uplus (Z \cap \overset{-1}{f}(U_2))$. Wegen des Zusammenhanges von Z existiert daher $i \in \{1,2\}$ mit $Z \cap \overset{-1}{f}(U_i) = \varnothing$, also $f(Z) \cap U_i = \varnothing$.

Zu (ii): Seien W eine wegzusammenhängende Teilmenge von M und $\tilde{p}, \tilde{q} \in f(W)$, etwa $\tilde{p} = f(p)$, $\tilde{q} = f(q)$ mit $p, q \in W$. Wegen des Wegzusammenhanges von W existiert ein Weg $c\colon [0,1] \to M$ mit $c([0,1]) \subset W$, $c(0) = p$ und $c(1) = q$. Dann ist $f \circ c\colon [0,1] \to N$ ein Weg mit $(f \circ c)([0,1]) \subset f(W)$, $(f \circ c)(0) = \tilde{p}$ und $(f \circ c)(1) = \tilde{q}$. □

Satz 1.29. *Sei M ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) M wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ M zusammenhängend.

(ii) N wegzusammenhängende Teilmenge von M
$\Longrightarrow$ N zusammenhängende Teilmenge von M.

Beweis. (ii) folgt sofort aus (i) durch Anwendung auf den Teilraum N von M.

Zu (i): Sei also M wegzusammenhängend und seien $U_1, U_2 \in \mathrm{Top}(M)$ mit $M = U_1 \uplus U_2$. Zu zeigen ist $U_1 = \varnothing$ oder $U_2 = \varnothing$. Angenommen dies ist falsch, dann existieren $p_1 \in U_1$ und $p_2 \in U_2$. Wegen des Wegzusammenhanges von M existiert ein Weg $c\colon [0,1] \to M$ mit $c(0) = p_1$ und $c(1) = p_2$. Da $[0,1]$ nach 1.26 zusammenhängend ist, folgt nach 1.28, daß auch $c([0,1])$ eine zusammenhängende Teilmenge von M ist. Andererseits gilt wegen $M = U_1 \uplus U_2$

$$c([0,1]) = (\underbrace{c([0,1]) \cap U_1}_{p_1 \in}) \uplus (\underbrace{c([0,1]) \cap U_2}_{p_2 \in}),$$

also ist $c([0,1])$ nicht zusammenhängend, Widerspruch! □

Bemerkung.

1.) Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist, d.h. genau (nach 1.26), wenn sie ein Intervall ist.

[Intervalle sind nämlich offenbar wegzusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$.]

2.) Eine offene Teilmenge eines normierten $\mathbb{R}$-Vektorraumes ist ebenfalls genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist, vgl. Übung 4.4(iii).

3.) $N := \mathrm{Graph}(\sin(\frac{1}{x}|_{\mathbb{R}_+})) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ ist eine zusammenhängende aber nicht wegzusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, vgl. Übung 3.5.

Offener Kern und abgeschlossene Hülle sowie innere, Berührungs- und Häufungspunkte

Definition 1.30 (offener Kern, abgeschlossene Hülle)**.** Seien M ein topologischer Raum und $N \subset M$.

(i) Wir definieren den *offenen Kern von N in M* als

$$\boxed{\mathring{N}} := \bigcup_{U \in \mathrm{Top}(M), U \subset N} U.$$

Nach (T2) ist $\mathring{N}$ offen in M, also ist $\mathring{N}$ offenbar die größte offene Teilmenge von M, die in N enthalten ist.

(ii) Die *abgeschlossene Hülle von N in M* ist definiert als

$$\boxed{\overline{N}} := \bigcap_{A \subset M \text{abgeschlossen}, A \supset N} A.$$

Nach Übung 1.3 ist $\overline{N}$ abgeschlossen in M, also ist $\overline{N}$ offenbar die kleinste abgeschlossene Teilmenge von M, die N umfaßt.

(iii) Aus der obigen Definition folgt sofort

$$\mathring{N} \subset N \subset \overline{N},$$
$$N \text{ offen in } M \Longleftrightarrow N = \mathring{N},$$
$$N \text{ abgeschlossen in } M \Longleftrightarrow N = \overline{N}.$$

Beispiel. $M = \mathbb{R}$, $N =]0,1] \Longrightarrow \mathring{N} =]0,1[\wedge \overline{N} = [0,1]$

Satz 1.31. *Seien M ein topologischer Raum und $N \subset M$. Dann gilt:*

(i) $\mathring{N} = \{p \in M \mid \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} U \subset N\}$.

Einen Punkt $p \in M$ mit $\exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} U \subset N$ nennen wir einen inneren Punkt von N in M.

(ii) $\overline{N} = \{p \in M \mid \forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} U \cap N \neq \varnothing\}$.

Einen Punkt $p \in M$ mit $\forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} U \cap N \neq \varnothing$ nennen wir einen Berührungspunkt von N in M.

Beweis. Zu (i): „$\subset$" Sei $p \in \mathring{N}$. Dann existiert nach 1.30(i) ein $U \in \mathrm{Top}(M)$ mit $U \subset N$ und $p \in U$, also $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ mit $U \subset N$, d.h. p ist innerer Punkt von N in M.

„$\supset$" Sei p ein innerer Punkt von N in M. Dann existiert $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ mit $U \subset M$, also $p \in \mathring{N}$.

Zu (ii): „$\subset$" Sei $p \in \overline{N}$. Angenommen p ist kein Berührungspunkt von N in M, d.h. es existiert $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ mit $U \cap N = \varnothing$. Dann ist $A := M \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge von M mit $A \supset N$, folglich nach 1.30(ii): $\overline{N} \subset A$, insbesondere wegen $p \in \overline{N}$: $p \in A = M \setminus U$, im Widerspruch zu $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$.

„$\supset$“ Sei p Berührungspunkt von N in M. Zu zeigen ist $p \in \overline{N}$, d.h. für jede abgeschlossene Teilmenge A von M mit $A \supset N$ gilt $p \in N$. Angenommen dies ist falsch, d.h. es existiert eine abgeschlossene Teilmenge A von M mit $A \supset N$ und $p \notin A$. Dann ist $U := M \setminus A$ offen in M, und es gilt $p \in U$, also $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$, folglich (da p Berührungspunkt von N in M): $U \cap N \neq \varnothing$, im Widerspruch zu $N \subset A$. □

Satz 1.32. *Seien M ein topologischer Raum und N eine zusammenhängende Teilmenge von M. Dann ist auch $\overline{N}$ eine zusammenhängende Teilmenge von M.*

Beweis. Seien $U_1, U_2 \in \operatorname{Top}(M)$ mit $\overline{N} = (\overline{N} \cap U_1) \uplus (\overline{N} \cap U_2)$. Wegen $N \subset \overline{N}$ gilt dann auch $N = (N \cap U_1) \uplus (N \cap U_2)$. Da N nach Voraussetzung zusammenhängend ist, existiert $i \in \{1, 2\}$ mit $N \cap U_i = \varnothing$. Dann ist $A := M \setminus U_i$ eine abgeschlossene Teilmenge von N mit $A \supset N$, also nach Definition von $\overline{N}$

$$\overline{N} \subset A = M \setminus U_i,$$

d.h. genau $\overline{N} \cap U_i = \varnothing$. □

Definition 1.33 (Häufungspunkt)**.** Seien M ein topologischer Raum, $N \subset M$ und $p \in N$.

p heißt *Häufungspunkt von N (in M)* $:\Longleftrightarrow \forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)}\, U \cap (N \setminus \{p\}) \neq \varnothing$.

Bemerkung.

1.) p Häufungspunkt von $N \Longrightarrow p \in \overline{N}$.
   Die Rückrichtung ist i.a. falsch.

2.) Ein Element von N braucht nicht Häufungspunkt von N zu sein.

3.) Ein Häufungspunkt von N braucht nicht Element von N zu sein.

4.) Im Spezialfall $M = \mathbb{R}$ stimmt obige Definition mit der Definition der Analysis I überein.

Beispiel.

1.) Die Menge aller Häufungspunkte von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ist gleich $\varnothing \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

2.) Die Menge aller Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist gleich $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$.

Satz 1.34. *Seien M ein topologischer Raum und $N \subset M$. Dann gilt:*
N abgeschlossene Teilmenge von M
$\Longleftrightarrow \forall_{p \in M}$ *(p Häufungspunkt von $N \Rightarrow p \in N$).*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Angenommen es existiert ein Häufungspunkt p von N derart, daß gilt $p \notin N$. Dann folgt $p \in M \setminus N$ und $M \setminus N$ ist wegen der Abgeschlossenheit von N offen in M, also

$$M \setminus N \in \mathcal{U}^\circ(p, M) \quad \text{und} \quad (M \setminus N) \cap (N \setminus \{p\}) = \varnothing,$$

im Widerspruch dazu, daß p ein Häufungspunkt von N ist.

„$\Leftarrow$“ Sei $p \in M \setminus N$ beliebig. Nach Voraussetzung ist p nicht Häufungspunkt von N, also existiert $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ mit $U \cap N = U \cap (N \setminus \{p\}) = \varnothing$, d.h. $U \subset M \setminus N$, folglich ist p innerer Punkt von $M \setminus N$ in M.

Damit ist gezeigt (vgl. 1.30) $M \setminus N = \overset{\circ}{\widehat{M \setminus N}}$, d.h. $M \setminus N$ ist offen in M, also ist N abgeschlossen in M. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß und Äquivalenz von Normen

Satz 1.35. *Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum (mit Norm $\|\ldots\|$), (also ist V auch metrischer Raum sowie hausdorff topologischer Raum nach 1.8.)*

(i) $\|\ldots\|\colon V \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(ii) Die Addition sowie die Subtraktion $\ldots \pm \ldots\colon V \times V \to V$ und die skalare Multiplikation $\ldots \cdot \ldots\colon \mathbb{R} \times V \to V$ sind stetig.

Wir bereiten den Beweis von 1.35 durch das folgende Lemma vor:

Lemma. *Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für alle $v, w \in V$ gilt*

$$\|v\| - \|w\| \le \big|\|v\| - \|w\|\big| \le \|v - w\|.$$

Beweis. Die erste Ungleichung ist trivial, und die zweite gilt, weil aus

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|(v-w)+w\| \le \|v-w\| + \|w\|, \\ \|w\| &= \|(w-v)+v\| \le \|w-v\| + \|v\| = \|v-w\| + \|v\| \end{aligned}$$

sowohl $\|v\| - \|w\| \le \|v-w\|$ als auch $-(\|v\| - \|w\|) \le \|v-w\|$ folgt. □

Beweis des Satzes. Wir verwenden 1.14. Seien $v, w \in V$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in V mit $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ sowie $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

(i) gilt, da aus dem Lemma für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\big|\|v_n\| - \|v\|\big| \le \|v_n - v\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \|v\|$.

Zu (ii): Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|(v_n \pm w_n) - (v \pm w)\| = \|(v_n - v) \pm (w_n - w)\| \le \underbrace{\|(v_n - v)\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\|(w_n - w)\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und

$$\begin{aligned} \|\lambda_n v_n - \lambda v\| &= \|\lambda_n (v_n - v) + (\lambda_n - \lambda) v\| \\ &\le \|\lambda_n (v_n - v)\| + \|(\lambda_n - \lambda) v\| = \underbrace{\underbrace{|\lambda_n|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda} \underbrace{\|v_n - v\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \|v\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Wir rufen uns kurz die folgende Definition der Beschränktheit einer Teilmenge eines normierten $\mathbb{R}$-Vektorraumes aus der Analysis in Erinnerung:

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum (mit Norm $\|\ldots\|$).

(i) Eine Teilmenge M von V heißt *beschränkt* genau dann, wenn $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall_{p\in M} \|p\| \leq C$.

(ii) Eine Folge in V heißt *beschränkt* genau dann, wenn die Menge ihrer Folgenglieder beschränkt ist.

Lemma 1.36 (Satz von Bolzano-Weierstraß für $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_+$.*

(i) (Folgenversion)
Jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

(ii) (Teilmengenversion)
Jede beschränkte unendliche Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$ besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Beweis. (i) ist Übung 2.1(iii).

Zu (ii): Sei M eine beschränkte unendliche Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$. Die Unendlichkeit von M bedeutet genau die Existenz einer injektiven Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M,\ k \longmapsto p_k. \tag{14}$$

Da M beschränkt ist, so auch $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, also besitzt $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach (i) eine gegen ein $p \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\ldots\|_\infty$ konvergente Teilfolge $(p_{i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Wir behaupten, daß p Häufungspunkt von M in $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis hiervon: Sei $U \in U \in \mathcal{U}^\circ(p, \mathbb{R}^n)$ beliebig. Wegen $\lim_{k\to\infty} p_{i(k)} = p$ existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N}, k\geq k_0} p_{i_k} \in U$. Aus der Injektivität der Abbildung (14) folgt, daß $p_{i(k_1)} = p$ für höchstens ein $k_1 \in \mathbb{N}$ gilt, also existiert $p_{i_{k_2}} \in U \setminus \{p\}$, d.h. $U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \varnothing$. □

Definition 1.37 (Äquivalenz von Normen)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für je zwei Normen $\|\ldots\|, \|\ldots\|_*$ für V definieren wir

$\|\ldots\| \sim \|\ldots\|_*$ (in Worten $\|\ldots\|$ ist *äquivalent* zu $\|\ldots\|_*$)
$:\Longleftrightarrow \mathrm{Top}(V, \|\ldots\|) = \mathrm{Top}(V, \|\ldots\|_*)$. [3]

Bemerkung. $\sim$ ist offenbar eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Normen für V.

Satz 1.38. *Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\ldots\|, \|\ldots\|_*$ zwei Normen für V. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\|\ldots\| \sim \|\ldots\|_* \\ &\overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \mathrm{id}_V\colon (V, \|\ldots\|) \longrightarrow (V, \|\ldots\|_*) \text{ ist ein Homöomorphismus} \end{aligned}$$

[3] D.h. $(V, \|\ldots\|)$ und $(V, \|\ldots\|_*)$ induzieren auf V dieselbe Topologie, d.h. $(V, \|\ldots\|)$ und $(V, \|\ldots\|_*)$ haben dieselben offenen Mengen, stimmen also als topologische Räume überein.

$$\stackrel{(ii)}{\Longleftrightarrow} \exists_{C,D\in\mathbb{R}_+} \forall_{v\in V} \underbrace{\|v\|_* \le C\,\|v\| \ \wedge\ \|v\| \le D\,\|v\|_*}_{\substack{\Leftrightarrow \frac{1}{D}\|v\|\le\|v\|_*\le C\|v\| \\ \Leftrightarrow \frac{1}{C}\|v\|_*\le\|v\|\le D\|v\|_*}}.$$

Beweis. Zu (i): Nach Definition der Äquivalenz von Normen bedeutet die linke Seite genau

$$\mathrm{Top}(V, \|\ldots\|) \subset \mathrm{Top}(V, \|\ldots\|_*) \ \wedge\ \mathrm{Top}(V, \|\ldots\|_*) \subset \mathrm{Top}(V, \|\ldots\|),$$

d.h. genau, daß $\mathrm{id}_V\colon (V, \|\ldots\|_*) \to (V, \|\ldots\|)$, $\mathrm{id}_V\colon (V, \|\ldots\|) \to (V, \|\ldots\|_*)$ stetig sind, d.h. genau, daß $\mathrm{id}_V\colon (V, \|\ldots\|) \to (V, \|\ldots\|_*)$ ein Homöomorphismus ist.

Zu (ii): Nach Übung 3.1(i) ist die linke Seite von (ii) äquivalent zu

$$\exists_{D\in\mathbb{R}_+} \forall_{v\in V} \|v\| \le D\,\|v\|_* \ \wedge\ \exists_{C\in\mathbb{R}_+} \forall_{v\in V} \|v\|_* \le C\,\|v\|,$$

beachte, daß $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ linear ist. □

Lemma 1.39. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Je zwei Normen für $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, daß jede Norm $\|\ldots\|$ für $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur Maximumsnorm $\|\ldots\|_\infty$ für $\mathbb{R}^n$ ist, welches nach 1.38 genau heißt, daß gilt

$$\exists_{C\in\mathbb{R}_+} \forall_{a\in\mathbb{R}^n} \|a\| \le C\,\|a\|_\infty, \tag{15}$$

$$\exists_{D\in\mathbb{R}_+} \forall_{a\in\mathbb{R}^n} \|a\|_\infty \le D\,\|a\|. \tag{16}$$

Zu (15): Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis für $\mathbb{R}^n$. Dann folgt für alle $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathbb{R}^n$ mit $C := \sum_{i=1}^n \|e_i\| \in \mathbb{R}_+$

$$\|a\| \le \sum_{i=1}^n |a_i| \|e_i\| \le \|a\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\| = C\,\|a\|_\infty.$$

Zu (16): Wir setzen

$$\delta := \inf\{\|b\| \mid b \in \mathbb{R}^n \ \wedge\ \|b\|_\infty = 1\} \tag{17}$$

und zeigen zunächst, daß gilt

$$\delta > 0. \tag{18}$$

[Zu (18): Nach Definition von δ existiert offenbar eone Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ mit

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \|b_k\|_\infty = 1 \ \text{ und } \delta = \lim_{k\to\infty} \|b_k\|. \tag{19}$$

Als beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\ldots\|_\infty$ besitzt $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach 1.36(i) eine in $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$ konvergente Teilfolge. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $b \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{k\to\infty} b_k = b \text{ in } (\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty) \tag{20}$$

existiert. Da wir (15) bereits gezeigt haben, folgt dann auch

$$\lim_{k\to\infty} b_k = b \text{ in } (\mathbb{R}^n, \|\dots\|). \tag{21}$$

Nach 1.35(i) sind $\|\dots\|_\infty\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|_\infty) \to \mathbb{R}$ und $\|\dots\|\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|) \to \mathbb{R}$ stetig, also folgt zunächst aus (20) $\|b\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|b_k\|_\infty \overset{(19)}{=} 1$, insbesondere also $b \neq 0$, und sodann aus (21)

$$0 < \|b\| = \lim_{k\to\infty} \|b_k\| \overset{(19)}{=} \delta.$$

Damit ist (18) gezeigt.]

Sei nun $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann folgt aus (17) wegen $\|\frac{a}{\|a\|_\infty}\|_\infty = 1$

$$\delta \leq \|\frac{a}{\|a\|_\infty}\| = \frac{\|a\|}{\|a\|_\infty},$$

also wegen (18)

$$\|a\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}\|a\|.$$

Damit ist gezeigt, daß (16) mit $D := \frac{1}{\delta}\mathbb{R}_+$ gilt. □

Satz 1.40. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann sind je zwei Normen für V äquivalent.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n := \dim V \in \mathbb{N}_+$. Wie oben bezeichne $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$. Wähle eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V. Dann ist

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus. Unter diesem Isomorphismus entsprechen offenbar den Normen für $\mathbb{R}^n$ umkehrbar eindeutig die Normen für V, wobei äquivalente Normen für $\mathbb{R}^n$ äquivalenten Normen für V entsprechen. Damit folgt 1.40 aus 1.39. □

Bemerkung. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1.) V besitzt aufgrund des letzten Satzes eine kanonische Topologie, definiert durch

$$\operatorname{Top}(V) := \operatorname{Top}(V, \|\dots\|), \quad \text{wobei } \|\dots\| \text{ beliebige Norm für } V.$$

Top(V) heißt die *kanonische Topologie* oder auch die *Normtopologie von V*. Wir betrachten im folgenden jeden endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum als topologischen Raum mit dieser Topologie.

2.) Sei $M \subset V$.

M heißt *beschränkte Teilmenge von V* genau dann, wenn M eine beschränkte Teilmenge von $(V, \|\dots\|)$ ist, wobei $\|\dots\|$ eine beliebige Norm für V sei. Diese Definition ist nach dem letzten Satz und 1.38 unabhängig von der speziellen Wahl von $\|\dots\|$.

3.) Eine Folge in V heißt genau dann *beschränkt*, wenn die Menge ihrer Folgenglieder eine beschränkte Teilmenge von V ist.

Satz 1.41 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(i) (Folgenversion)
Jede beschränkte Folge in V besitzt eine konvergente Teilfolge.

(ii) (Teilmengenversion)
Jede beschränkte unendliche Teilmenge von V besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Beweis. Klar nach 1.36 und 1.40. □

Folgenkompaktheit und der Satz von Heine-Borel

Definition 1.42 (Folgenkompaktheit)**.** Sei M ein topologischer Raum.

(i) M heißt *folgenkompakt* genau dann, wenn jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) Sei $N \subset M$.

N heißt *folgenkompakte Teilmenge von M* genau dann, wenn der Teilraum N von M folgenkompakt ist, d.h. genau, daß jede Folge in N eine in N konvergente Teilfolge besitzt.

Definition 1.43. Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d.

(i) Sei N eine nicht-leere Teilmenge von M. Wir definieren den *Durchmesser von N* als

$$\boxed{\operatorname{diam}(M)} := \sup\{d(p,q) \,|\, p,q \in N\} \in [0,\infty].$$

N heißt *beschränkt* $:\Longleftrightarrow \operatorname{diam}(N) < \infty$.

Im Spezialfalle eines normierten oder endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes stimmt diese Definition der Beschränktheit offenbar mit den obigen überein.

(ii) Seien N_1, N_2 zwei nicht-leere Teilmengen von M. Wir definieren dann den *Abstand von N_1 und N_2* als

$$\boxed{d(N_1,N_2)} := \inf\{d(p_1,p_2) \,|\, p_1 \in N_1 \wedge p_2 \in N_2\} \in [0,\infty[.$$

Satz 1.44 (Lebesgue-Lemma)**.**
Vor.: *Seien M ein metrischer Raum, K eine folgenkompakte Teilmenge von M, I eine beliebige Menge und $(G_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von M durch offene Teilmengen von M.*
Beh.: *Es existiert eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit*

$$\forall_{p\in K} \exists_{i\in I}\, U_\varepsilon(p) \subset G_i. \tag{22}$$

Jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit (22) heißt eine Lebesguesche Zahl der offenen Überdeckung $(G_i)_{i\in I}$.

Bemerkung. Aus (22) folgt insbesondere

$$\forall_{A\subset K, A\neq\varnothing}\,(\underbrace{\operatorname{diam}(A)<\varepsilon}_{\Rightarrow\forall_{p\in A}A\subset U_\varepsilon(p)}\Longrightarrow \exists_{i\in I}\,A\subset G_i) \tag{23}$$

und $U_\varepsilon(K) := \bigcup_{p\in K}U_\varepsilon(p)\subset\bigcup_{i\in I}G_i$.

$U_\varepsilon(K)$ heißt die *ε-Umgebung von K*.

Beweis. Angenommen die Behauptung ist falsch, d.h.

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\exists_{p\in K}\forall_{i\in I}\,U_\varepsilon(p)\not\subset G_i.$$

Dann existiert zu jedem $n\in\mathbb{N}_+$ ein Punkt $p_n\in K$ mit

$$\forall_{i\in I}\,U_{\frac{1}{n}}(p_n)\not\subset G_i. \tag{24}$$

Wegen der Folgenkompaktheit von K können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $p\in K$ mit

$$\lim_{n\to\infty}p_n = p \tag{25}$$

existiert.

$(G_i)_{i\in I}$ ist eine Überdeckung von $K\ni p$, also existiert $j\in I$ mit $p\in G_j$, und wegen der Offenheit von G_j existiert weiter eine Zahl $\delta\in\mathbb{R}_+$ mit

$$U_\delta(p)\subset G_j. \tag{26}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und (25) existiert $m\in\mathbb{N}_+$ mit

$$\frac{1}{m}<\frac{\delta}{2}\quad\text{und}\quad d(p_m,p)<\frac{\delta}{2}. \tag{27}$$

Hieraus folgt schließlich

$$\forall_{q\in U_{\frac{1}{m}}(p_m)}\,d(q,p)\le d(q,p_m)+d(p_m,p)<\frac{1}{m}+d(p_m,p)\overset{(27)}{<}\delta,$$

also $U_{\frac{1}{m}}(p_m)\subset U_\delta(p)\overset{(26)}{\subset}G_j$, im Widerspruch zu (24). □

Lemma 1.45. *Seien M ein metrischer Raum und K eine folgenkompakte Teilmenge von M. Dann ist K* präkompakt, *d.h. per definitionem*

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\exists_{N\subset K,\#N<\infty}\,K\subset\bigcup_{p\in N}U_\varepsilon(p).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $K\neq\varnothing$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{\mathfrak{P}}(K)\subset\mathfrak{P}(K)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von K.

Angenommen das Lemma gilt nicht, d.h. es existiert $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{N\in\widetilde{\mathfrak{P}}(K)}\,\underbrace{K\not\subset\bigcup_{p\in N}U_\varepsilon(p)}_{\Leftrightarrow K\setminus\bigcup_{p\in N}U_\varepsilon(p)\neq\varnothing}.$$

Nach dem Auswahlaxiom existiert dann eine Abbildung $\varphi\colon \widetilde{\mathfrak{P}}(K) \to K$ mit

$$\forall_{N\in\widetilde{\mathfrak{P}}(K)}\, \varphi(N) \in K \setminus \bigcup_{p\in N} U_\varepsilon(p). \tag{28}$$

Wir wählen $p_0 \in K$ und definieren rekursiv

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, p_{n+1} := \varphi(\{p_0, \dots, p_n\}) \in K. \tag{29}$$

Dann ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, und es gilt

$$\forall_{j,k\in\mathbb{N}}\, (j < k \Longrightarrow d(p_j, p_k) \geq \varepsilon)\,. \tag{30}$$

[Denn für $j < k$ gilt $j \leq k-1$ und daher

$$p_k \overset{(29)}{=} \varphi(\{p_0, \dots, p_{k-1}\}) \overset{(28)}{\in} \left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} U_\varepsilon(p_i)\right) \subset K \setminus U_\varepsilon(p_j),$$

also $d(p_k, p_j) \geq \varepsilon$.]

Aufgrund der Folgenkompaktheit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $p \in K$ mit $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ existiert. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}\, d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2},$$

also auch

$$\forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ n_0\leq n<m}}\, d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < \varepsilon,$$

im Widerspruch zu (30). □

Satz 1.46.
Vor.: *Seien M ein metrischer Raum und K eine Teilmenge von M.*
Beh.: *K kompakt $\Longleftrightarrow$ K folgenkompakt.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei K kompakt und angenommen K ist nicht folgenkompakt. Dann existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K derart, daß keine ihrer Teilfolgen gegen ein Element von K konvergiert. Wir behaupten

$$\forall_{q\in K} \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \#\{r \in \mathbb{N} \,|\, p_r \in U_\varepsilon(q)\} < \infty. \tag{31}$$

[Zu (1): Angenommen es existiert $q \in K$ mit

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \#\{r \in \mathbb{N} \,|\, p_r \in U_\varepsilon(q)\} = \infty. \tag{32}$$

Wir definieren dann rekursiv eine Teilfolge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$i_1 := \min \underbrace{\{r \in \mathbb{N} \,|\, p_r \in U_1(q)\}}_{\overset{(32)}{\neq} \varnothing}$$

und

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, i_{n+1} := \min \underbrace{\{r \in \mathbb{N} \,|\, r > i_n \wedge p_r \in U_{\frac{1}{n+1}}(q)\}}_{\overset{(32)}{\neq} \varnothing}\,.$$

Dann ist $(p_{i_n})_{n\in\mathbb{N}_+}$ eine Teilfolge von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wegen $p_{i_n} \in U_{\frac{1}{n}}(q)$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$ konvergiert diese Teilfolge gegen $q \in K$ im Widerspruch zu oben.]

Zu jedem $q \in K$ können wir gemäß (31) eine Zahl $\varepsilon_q \in \mathbb{R}_+$ wählen mit

$$\#\{r \in \mathbb{N} \,|\, p_r \in U_{\varepsilon_q}(q)\} < \infty. \tag{33}$$

Dann ist $\big(U_{\varepsilon_q}(q)\big)_{q\in K}$ eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K existieren endlich viele Punkte $q_1, \dots, q_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{\varepsilon_{q_j}}(q_j).$$

Hieraus folgt

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{m} \{r \in \mathbb{N} \,|\, p_r \in U_{\varepsilon_{q_j}}(q_j)\},$$

und die rechte Seite ist nach (33) eine endliche Menge, im Widerspruch dazu, daß $\mathbb{N}$ bekanntlich eine unendliche Menge ist.

„$\Leftarrow$“ Seien K folgenkompaktund $(G_i)_{i\in I}$ eine beliebige Überdeckung von K durch offene Teilmengen von M. Wähle gemäß 1.44 eine Lebesgue Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ dieser Überdeckung, d.h.

$$\forall_{p\in K} \exists_{i\in I}\, U_\varepsilon(p) \subset G_i. \tag{34}$$

Nach 1.45 ist K präkompakt, d.h. es existieren $p_1, \dots, p_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(p_j). \tag{35}$$

Wähle zu jedem $j \in \{1, \dots, m\}$ gemäß (34) ein $i_j \in I$ mit $U_\varepsilon(p_j) \subset G_{i_j}$. Dann folgt aus (35)

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} G_{i_j}.$$

Damit ist die Kompaktheit von K bewiesen. □

Übungsaufgabe.
Vor.: *Seien M ein metrischer Raum und $K \subset M$.*
Beh.: *K kompakt $\Longrightarrow$ K beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Da M als metrischer Raum insbesondere hausdorffsch ist, folgt aus 1.21, daß K eine abgeschlossene Teilmenge von M ist. Zu zeigen bleibt, daß K beschränkt ist.

Wäre K nicht beschränkt, so existierten Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit $\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = \infty$. Da K nach 1.46 folgenkompakt ist, können wir zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $p \in K$ konvergiert. Sodann können wir ebenfalls annehmen, daß $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $q \in K$ konvergiert. Nun folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$d(p_n, q_n) \le d(p_n, p) + d(p, q) + d(q, q_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(p, q) < \infty,$$

im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = \infty$. □

Satz 1.47 (Satz von Heine-Borel).
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $K \subset V$.*
Beh.: *K kompakt $\iff$ K beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. „$\Rightarrow$" vgl. obige Übungsaufgabe.

„$\Leftarrow$" Nach 1.46 genügt es zu zeigen, daß K folgenkompakt ist. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung beschränkt, besitzt also nach Bolzano-Weierstraß 1.41(i) eine konvergente Teilfolge $(v_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. es existiert $v \in V$ mit $\lim_{n\to\infty} v_{i_n} = v$. Wegen der Abgeschlossenheit von K gilt dann auch $v \in K$, vgl. die Übungsaufgabe auf Seite 5. Damit ist die Folgenkompaktheit von K bewiesen. □

Bemerkung. In der Funktionalanalysis beweist man, daß für einen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum V die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent sind:

(i) $\dim V < \infty$.

(ii) Die Einheitsvollkugel $\{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ ist kompakt.

(iii) In V gilt der Satz von Heine-Borel, d.h.

$$\forall_{K\subset V}\, K \text{ kompakt } \iff K \text{ beschränkt und abgeschlossen.}$$

Vollständige metrische Räume

Definition 1.48 (Cauchy-Folge, vollständiger metrischer Raum, $\mathbb{R}$-Banachraum).

(i) Seien M ein und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M.

$(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge (in M)*
$:\iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n,m\in\mathbb{N}} \ (n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Rightarrow d(p_n, p_m) < \varepsilon)$.

Dann folgt:

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } M \implies (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } M.$$

[Denn sind p in M, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen p und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\geq n_0}\, d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$, also folgt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad]$$

M heißt *vollständig* $:\iff$ Jede Cauchy-Folge in M konvergiert in M.

(ii) Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der als metrischer Raum vollständig ist, heißt ein *($\mathbb{R}$-)Banachraum*.

Beispiel.

1.) $\mathbb{R}$ ist als normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $|\ldots|$ ein Banachraum (nach Cauchyschem Konvergenzkriterium der Analysis I).

2.) $\mathbb{Q}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein metrischer Raum, der nicht vollständig ist.

[Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}$ die dekadische Entwicklung einer nicht-rationalen reellen Zahl $a \in [0,1]$. Dann ist die rationale Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, p_n := \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$, offenbar eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert.]

Satz 1.49. *Jeder endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ein Banachraum.*

Beweis. Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_+$

$$(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty) \text{ ein Banachraum.} \tag{36}$$

[Zu (36): Sei $\big(\underbrace{(a_{1,k}, \ldots, a_{n,k})}_{=a_k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k,l\in\mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \wedge l \geq k_0 \Rightarrow \|a_k - a_l\|_\infty < \varepsilon\right).$$

Dann folgt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k,l\in\mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \wedge l \geq k_0 \Rightarrow \|a_{i,k} - a_{i,l}\|_\infty < \varepsilon\right),$$

d.h. nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium der Analysis I

$$(a_{i,k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}.$$

Nach Übung 2.1(ii)(a), ist dann auch $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent in $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$.]
Wir folgern aus (36):

$$\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ für } \mathbb{R}^n \text{ ist } (\mathbb{R}^n, \|\ldots\|) \text{ ein Banachaum.} \tag{37}$$

[Zu (37): $\|\ldots\|$ und $\|\ldots\|_\infty$ sind nach 1.39 zueinander äquivalent, und die Begriffe „Cauchy-Folge“ ($\frac{\varepsilon}{C}$-Argument) und „Konvergenz“ hängen von der Norm offenbar nur bis auf Äquivalenz ab, also folgt (37) aus (36).]

Aus (37) folgt die Behauptung des Satzes, vgl. den Beweis von 1.40). □

Satz 1.50. *Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) V ist ein Banachraum.

(ii) Für jede Folge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in V gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|v_i\| \text{ konvergiert in } \mathbb{R}\ ^4 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} v_i \text{ konvergiert in } V.$$

Hierbei ist $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} v_i}$ *definiert als Partialsummenfolge* $\left(\sum_{i=0}^{k} v_i\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

[4] d.h. per definitionem $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ *ist absolut konvergent.*

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|v_i\|$ in $\mathbb{R}$ folgt nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Reihen der Analysis I

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k,l \in \mathbb{N}} \left(l > k \geq k_0 \Longrightarrow \sum_{i=k+1}^{l} \|v_i\| < \varepsilon \right).$$

Da nach Dreiecksungleichung stets für $l > k$ gilt

$$\| \sum_{i=0}^{l} v_i - \sum_{i=0}^{k} v_i \| = \| \sum_{i=k+1}^{l} v_i \| \leq \sum_{i=k+1}^{l} \|v_i\|,$$

so ist $\left(\sum\limits_{i=0}^{k} v_i \right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V, die wegen (i) in V konvergiert.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V. Dann existiert zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k,l \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_i \wedge l \geq k_i \Longrightarrow \|w_k - w_l\| < \frac{1}{2^i} \right),$$

und $(w_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in V mit

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \|w_{k_i} - w_{k_{i+1}}\| < \frac{1}{2^i}.$$

Für $i \in \mathbb{N}$ sei $v_i := v_{k_{i+1}} - v_{k_i}$, also gilt $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|v_i\| \leq 2 < \infty$. Wegen (ii) existiert dann $v \in V$ mit

$$\lim_{l \to \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{l} v_i}_{= w_{k_{l+1}} - w_{k_0}} = v,$$

und es folgt $\lim_{l \to \infty} w_{k_l} = v + w_{k_0}$.

Schließlich gilt auch $\lim_{k \to \infty} w_k = v + w_{k_0}$, d.h. (1) ist gezeigt.

[Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist, existiert $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k,l \in \mathbb{N}} \left(k \geq i_0 \wedge l \geq i_0 \Longrightarrow \|w_k - w_l\| < \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

und wegen $\lim_{l \to \infty} w_{k_l} = v + w_{k_0}$ existiert $i_1 \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \geq i_0$ und

$$\forall_{l \in \mathbb{N}} \left(l \geq i_1 \Longrightarrow \|w_{k_l} - (v + w_{k_0})\| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Daher folgt für für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq i_1 (\geq i_0)$

$$\|w_k - (v + w_{k_0})\| \leq \|w_k - w_{k_{i_1}}\| + \|w_{k_{i_1}} - (v + w_{k_0})\| < \varepsilon. \quad]$$

$\square$

Satz 1.51.
Vor.: *Seien M ein metrischer Raum und $K \subset M$.*
Beh.: *K folgenkompakt $\Longrightarrow$ K vollständig.*

Beweis. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Nach Voraussetzung existieren eine Teilfolge $(p_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $p \in K$ mit

$$\lim_{n\to\infty} p_{i_n} = p,$$

und wir behaupten, daß auch $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert.

Hierzu sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N},n,m\geq n_0}\, d(p_n, p_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es existiert weiter $m_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt

$$\forall_{m\in\mathbb{N},m\geq m_0}\, i_m \geq n_0 \wedge d(p_{i_m}, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit ergibt sich für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq m_0$

$$d(p_n, p) \leq d(p_n, p_{i_m}) + d(p_{i_m}, p) < \varepsilon,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Bemerkung. In der Funktionalanalysis zeigt man, daß in einem metrischen Raum M die folgenden drei Aussagen für eine Teilmenge K von M äquivalent sind:

(1) K ist kompakt.

(2) K ist folgenkompakt.

(3) K ist präkompakt und vollständig.

Wir haben „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ in 1.46 gezeigt und „(2) $\Rightarrow$ (3)“ soeben bewiesen.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 1.52 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Seien M, N metrische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

f heißt *gleichmäßig stetig* genau dann, wenn gilt

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{p,q\in M} \left(d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon\right).$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\iff \forall_{p\in M}\, f \text{ stetig in } p \\ &\iff \forall_{p\in M} \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{q\in M} \left(d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon\right) \\ &\iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \forall_{p\in M} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{q\in M} \left(d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Satz 1.53.
Vor.: *Seien M, N metrische Räume, K eine kompakte Teilmenge von M und $f\colon K \to N$ eine stetige Abbildung.*
Beh.: *f stetig $\iff$ f gleichmäßig stetig.*

Beweis. „⇒" ist trivial.

„⇐" Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ derart, daß gilt

$$\forall_{\delta \in \mathbb{R}_+} \exists_{p,q \in K} \left(d(p,q) < \delta \wedge d(f(p), f(q)) \geq \varepsilon \right).$$

Hieraus folgt die Existenz von Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ in K mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+} d(p_n, q_n) < \frac{1}{n} \wedge d(f(p_n), f(q_n)) \geq \varepsilon. \tag{38}$$

K ist kompakt, also besitzt $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ nach 1.46 eine etwa gegen $p \in K$ konvergente Teilfolge $(p_{i_n})_{n \in \mathbb{N}_+}$. Aus $\forall_{n \in \mathbb{N}_+} d(p_{i_n}, q_{i_n}) < \frac{1}{i_n}$ folgt dann wegen

$$d(q_{i_n}, p) \leq d(q_{i_n}, p_{i_n}) + d(p_{i_n}, p),$$

daß auch $(q_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen p konvergiert, also ergibt die Stetigkeit von f in p

$$\lim_{n \to \infty} f(p_{i_n}) = f(p) = \lim_{n \to \infty} f(q_{i_n}),$$

d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{d(f(p_{i_n}), f(q_{i_n}))}_{\leq d(f(p_{i_n}), f(p)) + d(f(p), f(q_{i_n}))} = 0,$$

im Widerspruch zu (38). □

Lineare Abbildungen

Satz 1.54.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum – also V topologischer Raum mit der Normtopologie – und W ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.*
Beh.: *Jede lineare Abbildung $V \to W$ ist stetig.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n := \dim V \in \mathbb{N}_+$ und sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Wir wählen auf V die *Maximumsnorm bzgl.* $\{b_1, \ldots, b_n\}$, die gegeben ist durch

$$\forall_{v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V} \|v\| := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Die Norm auf W sei ebenfalls mit $\|\ldots\|$ bezeichnet.

Sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann folgt für alle $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V$ mit $C := \sum_{i=1}^n \|f(b_i)\| \in \mathbb{R}$

$$\|f(v)\| = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|\lambda_i|}_{\leq \|v\|} \|f(b_i)\| \leq C \|v\|,$$

also ist f nach Übung 3.1(i) stetig. □

Korollar. *Jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist stetig.* □

Definition 1.55.

(i) Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir setzen

$$\boxed{\mathcal{L}(V,W)} := \{f \mid f\colon V \to W \text{ linear}\}.$$

$\mathcal{L}(V,W)$ ist in kanonischer Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Für $f, g \in \mathcal{L}(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Abbildungen $f+g, \lambda f \in \mathcal{L}(V,W)$ punktweise zu definieren.)

(ii) Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir setzen

$$\boxed{\mathcal{L}_c(V,W)} := \{f \mid f\colon V \to W \text{ linear und stetig}\}.$$

$\mathcal{L}_c(V,W)$ ist nach 1.14 und 1.35(ii) ein Untervektorraum von $\mathcal{L}(V,W)$.

Bemerkung. Nach 1.54 gilt

$$\dim V < \infty \Longrightarrow \mathcal{L}(V,W) = \mathcal{L}_c(V,W).$$

Satz 1.56 (Operatornorm)**.** *Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, und es gelte $\dim V > 0$.*

(i) Durch

$$\forall_{f \in \mathcal{L}_c(V,W)}\ \|f\| := \sup\left\{ \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \;\middle|\; v \in V \smallsetminus \{0\} \right\}$$

wird eine Norm, die sog. Operatornorm auf $\mathcal{L}_c(V,W)$, *definiert.*

(ii) Für jedes $f \in \mathcal{L}_c(V,W)$ gilt

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V \smallsetminus \{0\} \wedge \|v\| \le 1\} = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V \wedge \|v\| = 1\} \tag{39}$$

sowie

$$\forall_{v \in V}\ \|f(v)\| \le \|f\|\|v\|. \tag{40}$$

Darüber hinaus ist $\|f\|$ die kleinste reelle Zahl mit der Eigenschaft (40).

Beweis. Zu (i): Übung 3.1(i) ergibt die Wohldefiniertheit von $\|f\|$ als reelle Zahl für $f \in \mathcal{L}_c(V,W)$.

Beweis, daß $\|\ldots\|$ eine Norm für $\mathcal{L}_c(V,W)$ ist:

(N1) ist trivial. Weiter gilt für alle $f, g \in \mathcal{L}_c(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V \smallsetminus \{0\}$

$$\frac{\|(\lambda f)(v)\|}{\|v\|} = |\lambda| \frac{\|f(v)\|}{\|v\|},$$
$$\frac{\|(f+g)(v)\|}{\|v\|} \le \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|g(v)\|}{\|v\|} \le \|f\| + \|g\|,$$

also folgen (N2) und (N3).

Zu (ii): Zu (39): Sei $f \in \mathcal{L}_c(V,W)$. Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\|v\| \le 1$ gilt

$$\|f(v)\| \le \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \le \|f\|,$$

weshalb

$$\sup\{\|f(v)\| \,|\, v \in V \wedge \|v\| = 1\} \le \sup\{\|f(v)\| \,|\, v \in V \wedge \|v\| \le 1\} \le \|f\|$$

folgt.

Andererseits gilt für $v \in V \setminus \{0\}$

$$\frac{\|f(v)\|}{\|v\|} = \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| \le \sup\{\|f(\tilde{v})\| \,|\, \tilde{v} \in V \wedge \|\tilde{v}\| = 1\},$$

also folgt auch $\|f\| \le \sup\{\|f(\tilde{v})\| \,|\, \tilde{v} \in V \wedge \|\tilde{v}\| = 1\}$. Damit ist (39) gezeigt.

(40) folgt trivial aus der Definition in (i).

Sei schließlich $C \in \mathbb{R}$ beliebig mit $\forall_{v \in V} \|f(v)\| \le C\,\|v\|$. Dann folgt

$$\forall_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \le C,$$

und somit $\|f\| \le C$. □

Satz 1.57.
Vor.: *Es seien V_1, V_2, V_3 normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume sowie $f \in \mathcal{L}_c(V_1,V_2)$ und $g \in \mathcal{L}_c(V_2,V_3)$.*
Beh.: *$g \circ f \in \mathcal{L}_c(V_1,V_3)$ und $\|g \circ f\| \le \|g\|\,\|f\|$.*

Beweis. Für jedes $v_1 \in V_1$ gilt nach (40)

$$\|(g \circ f)(v_1)\| = \|g(f(v_1))\| \le \|g\|\,\|f(v_1)\| \le \underbrace{\|g\|\,\|f\|}_{:=C}\,\|v_1\|.$$

Nach Übung 3.1(i) ist daher $g \circ f$ stetig, und aus der letzten Aussage in 1.56(ii) folgt $\|g \circ f\| \le C = \|f\|\,\|g\|$. □

2 Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie

Homotopien rel $\{0,1\}$ und Fundamentalgruppe

Definition 2.1 (Homotopie von Wegen rel $\{0,1\}$)**.** Seien X ein topologischer Raum und $c, \tilde{c}\colon [0,1] \to X$ zwei Wege in X mit $c(0) = \tilde{c}(0)$ und $c(1) = \tilde{c}(1)$.

(i) Eine *Homotopie von c nach $\tilde{c}$ rel* $\{0,1\}$ ist per definitionem eine stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X, (t,s) \mapsto H_s(t)$, mit $H_0 = c$ und $H_1 = \tilde{c}$ sowie $\forall_{s\in[0,1]}\, H_s(0) = c(0) = \tilde{c}(0) \wedge H_s(1) = c(1) = \tilde{c}(1)$.

(ii) c und $\tilde{c}$ heißen *homotop rel* $\{0,1\}$ (i.Z. $\boxed{c \sim \tilde{c}}$) genau dann, wenn eine Homotopie von c nach $\tilde{c}$ rel $\{0,1\}$ existiert.

Satz 2.2.
Vor.: *Seien X ein topologischer Raum und $x_0, x_1 \in X$. Wir setzen*

$$\boxed{\Omega_{x_0,x_1}} := \{c \,|\, c\colon [0,1] \to X \text{ Weg von } x_0 \text{ nach } x_1{}^5\}.$$

Beh.: *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in Ω_{x_0,x_1}.*

Beweisskizze. 1.) $c \sim c$: $H(t,s) := c(t)$.
2.) $c \sim \tilde{c}$ via $H \Rightarrow \tilde{c} \sim c$: $\tilde{H}(s,t) := H(t, 1-s)$.
3.) $c \sim \tilde{c}$ via $H \wedge \tilde{c} \sim \tilde{\tilde{c}}$ via $\widetilde{H}$: $\widetilde{\widetilde{H}}(t,s) := \begin{cases} H(t,2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ \widetilde{H}(t, 2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$ □

Definiton. Wir bezeichnen mit $\boxed{\widehat{\Omega}_{x_0,x_1}}$ die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$.

Ist $c \in \Omega_{x_0,x_1}$, so heißt die Äquivalenzklasse $[c] \in \widehat{\Omega}_{x_0,x_1}$ von c auch die *Homotopieklasse von c rel* $\{0,1\}$.

Definition 2.3. Sei X ein topologischer Raum.

(i) Für alle $x_0, x_1, x_2 \in X$ definieren wir eine Abbildung

$$\Omega_{x_0,x_1} \times \Omega_{x_1,x_2} \longrightarrow \Omega_{x_0,x_2},\ (c, \tilde{c}) \longmapsto \boxed{c\,\tilde{c}}$$

durch

$$\forall_{t\in[0,1]}\, (c\,\tilde{c})(t) := \begin{cases} c(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{c}(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

(ii) Für alle $x_0, x_1 \in X$ definieren wir eine Abbildung

$$\Omega_{x_0,x_1} \longrightarrow \Omega_{x_1,x_0},\ c \longmapsto \boxed{c^v}$$

durch

$$\forall_{t\in[0,1]}\, c^v(t) := c(1-t).$$

c^v steht für „c vertatur“. Oft schreibt man für c^v auch $\boxed{c^{-1}}$.

[5] d.h. per definitionem $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$

Satz 2.4.
Vor.: *Seien X ein topologischer Raum und $x_i \in X$ für $i \in \{0,1,2,3\}$.*
Beh.:

(i) Die Abbildung $\Omega_{x_0,x_1} \times \Omega_{x_1,x_2} \longrightarrow \Omega_{x_0,x_2}$ wie in 2.3(i) induziert eine Abbildung der Homotopieklassen

$$\widehat{\Omega}_{x_0,x_1} \times \widehat{\Omega}_{x_1,x_2} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{x_0,x_2}, \ ([c],[\tilde{c}]) \longmapsto \boxed{[c]\,[\tilde{c}]} := [c\,\tilde{c}].$$

(ii) Die Abbildung $\Omega_{x_0,x_1} \longrightarrow \Omega_{x_1,x_0}$ wie in 2.3(ii) induziert eine Abbildung der Homotopieklassen

$$\widehat{\Omega}_{x_0,x_1} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{x_1,x_0}, \ [c] \longmapsto \boxed{[c]^v} := [c^v].$$

Oft schreibt man für $[c]^v$ auch $\boxed{[c]^{-1}}$.

(iii) Für alle $c \in \Omega_{x_0,x_1}$, $\tilde{c} \in \Omega_{x_1,x_2}$ und $\tilde{\tilde{c}} \in \Omega_{x_2,x_3}$ gilt

$$([c]\,[\tilde{c}])\,[\tilde{\tilde{c}}] = [c]\,([\tilde{c}]\,[\tilde{\tilde{c}}]) \in \Omega_{x_0,x_3}.$$

(iv) Bezeichnet man den konstanten Weg $[0,1] \to X, t \mapsto x$, vom Wert $x \in X$ mit x, so gilt für alle $c \in \Omega_{x_0,x_1}$

$$[x_0]\,[c] = [c] = [c]\,[x_1] \in \widehat{\Omega}_{x_0,x_1},$$
$$[c]\,[c]^v = [x_0] \in \widehat{\Omega}_{x_0,x_0},$$
$$[c]^v\,[c] = [x_1] \in \widehat{\Omega}_{x_1,x_1}.$$

Beweis. Zu (i): Seien $c_1, c_2 \in \Omega_{x_0,x_1}$ mit $[c_1] = [c_2]$ und $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \Omega_{x_1,x_2}$ mit $[\tilde{c}_1] = [\tilde{c}_2]$. Zu zeigen ist $[c_1\,\tilde{c}_1] = [c_2\,\tilde{c}_2]$.

Zum Beweis hiervon seien H bzw. $\widetilde{H}$ Homotopien von c_1 nach c_2 bzw. von $\tilde{c}_1$ nach $\tilde{c}_2$ rel $\{0,1\}$. Dann wird durch

$$\forall_{s\in[0,1]}\, \widetilde{\widetilde{H}}_s := H_s\,\widetilde{H}_s$$

eine Homotopie von $c_1\,\tilde{c}_1$ nach $c_2\,\tilde{c}_2$ rel $\{0,1\}$ definiert.

Zu (ii): Seien $c_1, c_2 \in \Omega_{x_0,x_1}$ mit $[c_1] = [c_2]$. Zu zeigen ist $[{c_1}^v] = [{c_2}^v]$.

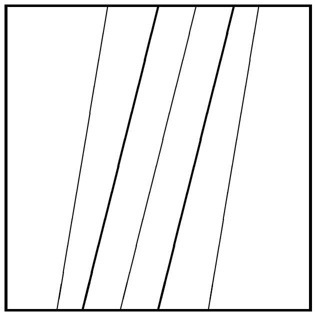
Zum Beweis hiervon sei H eine Homotopien von c_1 nach c_2 rel $\{0,1\}$. Dann wird durch

$$\forall_{s\in[0,1]}\, \widetilde{H}_s := {H_s}^v$$

eine Homotopie von ${c_1}^v$ nach ${c_2}^v$ rel $\{0,1\}$ definiert.

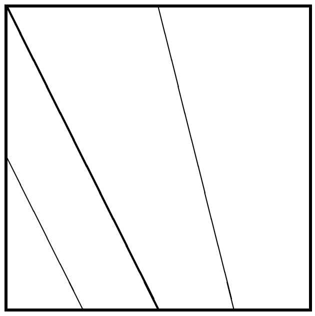
Zu (iii): Die stetige[6] Abbildung $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ sei definiert als die eindeutig bestimmte Projektion des Quadrates $[0,1]^2$ längs der durchgezogenen Geraden auf die untere Quadratseite $[0,1] \times \{0\} \cong [0,1]$ wie in der folgenden Skizze:

[6] Offenbar gilt für alle $(t_1,s_1),(t_2,s_2) \in [0,1]^2$: $|F(t_1,s_1) - F(t_2,s_2)| \le 2\,|t_1 - t_2|$.



Dann ist $H\colon [0,1]^2 \to X$, definiert durch $H := \big((c\,\tilde{c})\,\tilde{\tilde{c}}\big) \circ F$, eine Homotopie von $(c\,\tilde{c})\,\tilde{\tilde{c}}$ nach $c\,(\tilde{c}\,\tilde{\tilde{c}})$ rel $\{0,1\}$.

Zu (iv): a) Beweis von $[x_0\,c] = [c]$: Analog zum Beweis von (iii) sei jetzt $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ die Projektion auf die untere Quadratseite gemäß der folgenden Skizze:



Dann ist $H\colon [0,1]^2 \to X$, definiert durch $H := (x_0\,c) \circ F$, eine Homotopie von $x_0\,c$ nach c rel $\{0,1\}$.

b) Beweis von $[c\,c^v] = [x_0]$: Definiere $H\colon [0,1]^2 \to X$ durch

$$H(t,s) := \begin{cases} c(2t), & 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ c(1-s) = c^v(s), & \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ c^v(2t-1) = c(2(1-t)), & \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Offenbar ist H eine Homotopie von $c\,c^v$ nach x_0 rel $\{0,1\}$.

Die übrigen Aussagen von (iv) zeigt man analog. □

Hauptsatz 2.5. *Sei* (X, x_0) *ein* punktierter topologischer Raum, *d.h. per definitionem* X *ist ein topologischer Raum und* $x_0 \in X$. *Dann ist* $\widehat{\Omega}_{x_0,x_0}$ *bzgl. der Verknüpfung*

$$([c],[\tilde{c}]) \longmapsto [c]\,[\tilde{c}],$$

vgl. 2.4, eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe von X im Punkte x_0. *Diese Gruppe bezeichnet man mit*

$$\boxed{\pi_1(X,x_0).}$$

Das Einselement von $\pi_1(X,x_0)$ *ist die Homotopieklasse des konstanten Weges vom Wert* x_0. *Das zu* $[c]$ *inverse Element in* $\pi_1(X,x_0)$ *ist gleich* $[c]^v$.

Beweis. 2.5 folgt sofort aus 2.4 mit $x_0 = x_1 = x_2 = x_3$. □

Satz 2.6.
Vor.: *Seien X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$ und d: $[0,1] \to X$ ein Weg in X von x_0 nach x_1.*
Beh.: *$\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ sind isomorph; genauer ist*

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1),\ [c] \longmapsto [d]^v\,[c]\,[d]$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis als Übung 6.1. □

Korollar. *Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so sind alle Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ für $x_0 \in X$ bis auf Isomorphie einander gleich. Dann ist $\boxed{\pi_1(X)}$, die sogenannte* Fundamentalgruppe von X, *bis auf Isomorphie eindeutig definiert.*

Definition 2.7. Sei X ein topologischer Raum.
X heißt *einfach-zusammenhängend* genau dann, wenn gilt:

1.) X ist wegzusammenhängend,

2.) $\pi_1(X) \cong \{1\}$.

Satz.
Vor.: *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum.*
Beh.: *Folgende fünf Aussagen sind paarweise äquivalent:*

(1) X ist einfach-zusammenhängend.

(2) $\exists_{x_0 \in X}\, \pi_1(x, x_0) = \{1\}$.

(3) $\forall_{x_0 \in X}\, \pi_1(x, x_0) = \{1\}$.

(4) Es existiert ein $x_0 \in X$ derart, daß für je zwei Wege $c, \tilde{c}$: $[0,1] \to X$ mit $c(0) = \tilde{c}(0) = x_0$ und $c(1) = \tilde{c}(1)$ gilt $[c] = [\tilde{c}]$.

(5) Für je zwei Wege $c, \tilde{c}$: $[0,1] \to X$ mit $c(0) = \tilde{c}(0)$ und $c(1) = \tilde{c}(1)$ gilt $[c] = [\tilde{c}]$.

Beweis als Übung 6.2. □

Beispiel 2.8.

a) Ist X eine sternförmige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes V, so ist X einfach-zusammenhängend (als topologischer Teilraum von V).

[Beweis: Sei $x_0 \in X$ ein Sternpunkt von X, d.h. per definitionem

$$\forall_{x \in X} \forall_{s \in [0,1]}\, (1-s)\,x + s\,x \in X. \tag{41}$$

Wir zeigen $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.
Sei c: $[0,1] \to X$ stetig mit $c(0) = c(1) = x_0$. Dann ist H: $[0,1]^2 \to X$, definiert durch

$$H(t,s) := (1-s)\,c(t) + s\,x_0 \overset{(41)}{\in} X$$

eine Homotopie von c nach x_0 rel $\{0,1\}$, also $[c] = [x_0] = 1$.]

b) S^m ist einfach-zusammenhängend für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$.

[Beweis: Seien $p_0 \in S^m$ und c: $[0,1] \to S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ein Weg in S^m mit $c(0) = c(1) = p_0$. Zu zeigen ist $[c] = [p_0]$. Die Schwierigkeit besteht darin, daß $c([0,1]) = S^m$ sein kann[7], denn sonst wäre die Aussage trivial, da $S^m \setminus \{\text{Pkt.}\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist.

Nach 1.53 ist c gleichmäßig stetig, folglich existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t,\tilde{t}\in[0,1]} \left(|t-\tilde{t}| < \delta \Longrightarrow \|c(t) - c(\tilde{t})\| < 2\right). \tag{42}$$

Wähle eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ von $[0,1]$ mit

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,k\}} |t_j - j_{j-1}| < \delta. \tag{43}$$

Sei $\tilde{c}$: $[0,1] \to S^m$ ein Weg in S^m mit $\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1) = p_0$ derart, daß gilt:

$\tilde{c}|_{[t_{j-1},t_j]}$ parametrisiert für jedes $j \in \{1,\ldots,k\}$ einen Großkreis (d.i. der Schnitt von S^m mit einem m-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$) der Länge $< \pi$ von $c(t_{j-1})$ nach $c(t_j)$. (44)

(Beachte, daß $c(t_{j-1})$ und $c(t_j)$ nach (42), (43) nicht antipodisch sind.)

Dann existiert für jedes $j \in \{1,\ldots,k\}$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} &H_j\colon [t_{j-1},t_j] \times [0,1] \longrightarrow S^m \text{ stetig mit} \\ &\forall_{t\in[t_{j-1},t_j]} H_j(t,0) = c(t) \wedge H_j(t,1) = \tilde{c}(t) \text{ und} \\ &\forall_{s\in[0,1]} H_j(t_{j-1},s) = c(t_{j-1}) \wedge H_j(t_j,s) = c(t_j). \end{aligned} \tag{45}$$

(Beachte, daß für alle $t \in [t_{j-1},t_j]$ gilt $|t - t_{j-1}| \leq |t_j - t_{j-1}| \overset{(43)}{<} \delta$, also nach (42) $c(t)$ nicht antipodisch zu $c(t_{j-1})$, und ferner nach (44) auch $\tilde{c}(t)$ nicht antipodisch zu $c(t_{j-1})$. Daher sind $c|_{[t_{j-1},t_j]}$ und $\tilde{c}|_{[t_{j-1},t_j]}$ Wege in $S^m \setminus \{-c(t_{j-1})\}$, und $S^m \setminus \{-c(t_{j-1})\}$ ist via steogrphischer Projektion homöomorph zu $\mathbb{R}^m$, also ebenso wie (vgl. a)) einfach-zusammenhängend. Hieraus folgt offenbar die Existenz die Existenz von H_j wie in (45) durch Anwendung von „(1) $\Rightarrow$ (5)“ des Satzes aus 2.7 und Umbarametrisierung von $c|_{[t_{j-1},t_j]}$ und $\tilde{c}|_{[t_{j-1},t_j]}$ auf $[0,1]$.)

Aus (45) folgt, daß

$$H\colon [0,1]^2 \longrightarrow S^m, \ \forall_{j\in\{1,\ldots,k\}} H|_{[t_{j-1},t_j]\times[0,1]} := H_j,$$

eine Homotopie von c nach $\tilde{c}$ ist, also $[c] = [\tilde{c}]$. Zu zeigen bleibt schließlich

$$[\tilde{c}] = [p_0].$$

(Beweis hiervon: Da $\tilde{c}$ stückweise ein Großkreis ist, so existiert wegen $m \geq 2$ offenbar ein Punkt $p_1 \in S^m$ mit

$$\forall_{t\in[0,1]} \tilde{c}(t) \in S^m \setminus \{p_1\},$$

also insbesondere $p_1 \neq \tilde{c}(0) = p_0$. Da $S^m \setminus \{p_1\}$ einfach-zusammenhängt, ist daher $\tilde{c}$ homotop zum konstanten Weg p_0 rel $\{0,1\}$.)]

c) $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Der Beweis erfolgt später mittels Monodromiesatz 2.15.

[7] Es gibt solche Wege!

Überlagerungen

Übungsaufgabe. *Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ definieren wir*

$$Z_x := \bigcup_{\substack{Z \subset X \text{ zusam-} \\ \text{menhängend}, x \in Z}} Z \quad \text{und} \quad W_x := \bigcup_{\substack{Z \subset X \text{ wegzusam-} \\ \text{menhängend}, x \in W}} W.$$

(i) *Zeige für alle $x \in X$:*

Z_x (bzw. W_x) ist die größte zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Teilmenge von X, die x enthält. Z_x (bzw. W_x) heißt daher die Zusammenhangskomponente *(bzw.* Wegzusammenhangskomponente*)* von $x \in X$.

Zeige ferner: $W_x \subset Z_x$ und Z_x ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Eine Teilmenge Y von X heißt eine Zusammenhangskomponente *(bzw.* Wegzusammenhangskomponente*)* von *X, falls ein Punkt $x \in X$ existiert mit $Y = Z_x$ (bzw. $Y = W_x$).*

(ii) *Zeige: X ist disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten, und jede Zusammenhangskomponente von X ist disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von X.*

Beweis. Zu (i): Sei $x \in X$. Der Zusammenhang von Z_x folgt sofort aus der Definition von Z_x und Satz 1.25. Der Wegzusammenhang von W_x ist klar.

Aus 1.29 folgt $W_x \subset Z_x$. Außerdem gilt $Z_x = \overline{Z_x}$.

[„$\subset$" ist klar, und mit Z_x ist nach 1.32 auch $\overline{Z_x}$ zusammenhängend, also folgt wegen $x \in \overline{Z_x}$ aus der Definition von Z_x: $\overline{Z_x} \subset Z_x$.]

Zu (ii): Durch $x \sim y :\Longleftrightarrow \exists Z \subset X$ zusammenhängend $x \in Z \wedge y \in Z$ wird offenbar eine Äquivalenzrelation auf X definiert, deren Äquivalenzklassen genau die Zusammenhangskomponenten von X sind. Da X disjunkte Vereinigung seiner Äquivalenzklassen ist, folgt auch, daß X disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist.

Für die zweite Aussage betrachte man die folgende Äquivalenzrelation $\sim$ auf Z_x $(x \in X)$

$$y \sim z :\Longleftrightarrow \exists_{W \subset Z_x \text{ wegzusammenhängend}}\, y \in W \wedge z \in W$$

und argumentiere analog. □

Definition 2.9. Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt *lokal-wegzusammenhängend*

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall_{x_0 \in X} \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(x_0, X)} \exists_{V \in \mathcal{U}^\circ(x_0, X), V \subset U} V \text{ wegzusammenhängend.}$$

$\overset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow}$ Jede in X offene Menge ist Vereinigung wegzusammenhängender offener Mengen.

(ii) X heißt *lokal-einfach-zusammenhängend*

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall_{x_0 \in X} \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(x_0,X)} \exists_{V \in \mathcal{U}^\circ(x_0,X), V \subset U} V \text{ einfach-zusammenhängend.}$$

$\overset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow}$ Jede in X offene Menge ist Vereinigung einfach-zusammenhängender offener Mengen.

Bemerkung.

1.) X einfach-zusammenhängend $\Longrightarrow$ X wegzusammenhängend.

2.) X lokal-einfach-zusammenhängend $\Longrightarrow$ X lokal-wegzusammenhängend.

3.) $X := \mathrm{Graph}(\sin(\frac{1}{x}|_{]0,\frac{2}{\pi}[})) \cup (\{0\} \times [-2,1]) \cup (\{\frac{2}{\pi}\} \times [-2,1]) \cup ([0,\frac{2}{\pi}] \times \{-2\})$ ist als Teilraum von $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend und sogar einfach-zusammenhängend, aber nicht lokal-wegzusammenhängend, also erst recht nicht lokal-einfach-zusammenhängend.

Lemma 2.10. *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) Ist X lokal-wegzusammenhängend, so gilt für jede offene Teilmenge G von X: Jede Zusammenhangskomponente von G ist offen in X und wezusammenhängend, also eine Wegzusammenhangskomponente.

(ii) X zusammenhängend und lokal-wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ X wegzusammenhängend.

Beweis. Zu (i): Seien X lokal-wegzusammenhängend, $G \subset X$ offen und sei Z eine Zusammenhangskomponente von G. Sei $x_0 \in Z$. Wir definieren

$$Z_1 := \{x \in Z \,|\, \text{Es existiert ein Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x.\},$$
$$Z_2 := Z \setminus Z.$$

Zu jedem $x \in Z$ existiert wegen des lokalen Wegzusammenhangs von X eine wegzusammenhängende – also auch zusammenhängende – Umgebung V_x von $x \in X$ mit $V_x \subset G$, also nach Definition der Zusammenhangskomponente $V_x \subset Z$ und darüberhinaus offenbar

$$x \in Z_1 \Longrightarrow V_x \subset Z_1,$$
$$x \in Z_2 \Longrightarrow V_x \subset Z_2.$$

Daher sind Z, Z_1 und Z_2 offen in X, d.h. offen in G, und es gilt $Z = Z_1 \cup\!\!\!\cdot\, Z_2$, $x_0 \in Z_1$. Hieraus folgt wegen des Zusammenhangs von Z, daß $Z = Z_1$, d.h. mit Z_1 ist auch Z wegzusammenhängend.

(ii) folgt aus dem Beweis von (i) mit $G := X$. □

Definition 2.11 ((Universelle) Überlagerung)**.** Es seien E, B topologische Räume und $\pi\colon E \to B$ eine Abbildung.

(i) $\pi\colon E \to B$ heißt *Überlagerung* genau dann, wenn gilt:

1.) $\pi\colon E \to B$ ist stetig und surektiv.

2.) Zu jedem $b \in B$ existiert ein zusammenhängendes $U \in \mathcal{U}^\circ(b, B)$ derart, daß U *(durch π) schlicht überlagert* ist. Letzteres heißt per definitionem, daß für jede Zusammenhangskomponente Z von $\overline{\pi}^1(U)$ in E die Abbildung $\pi|_Z\colon Z \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung. Ist E zusätzlich lokal-wegzusammenhängend, so ist Z wie oben nach 2.10(i) offen in E, also ist $\pi|_Z\colon Z \to U$ ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen von E und B. Daher ist π lokal-homöomorph sowie offene Abbildung und folglich ist mit E auch B lokal-wegzusammenhängend.

(ii) Eine Überlagerung $\pi\colon E \to B$ heißt *universell* genau dann, wenn E einfach-zusammenhängend ist.

Beispiel 2.12.

a) $\mathbb{R} \to S^1, t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ ist universelle Überlagerung.

b) Sei $E := \overline{(x - \cos(z), y - \sin(z))}^1(0_{\mathbb{R}^3}) = \{(\cos(t), \sin(t), t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. E heißt *Schraubenlinie*. Die Projektion $E \to S^1$ auf die ersten beiden Komponenten ist universelle Überlagerung.

c) Für jedes $n \in N_+$ ist $z^n|_{S^1}\colon S^1 \to S^1$ eine Überlagerung.

d) $S^m \to P^m(\mathbb{R}), p \mapsto [p]$, vgl. Übung 5.3, ist für $m \in \mathbb{N}_+$ eine Überlagerung, die im Falle $m \geq 2$ universell ist.

e) Seien $m \in \mathbb{N}_+$ und $\boxed{T^m} := \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m := \mathbb{R}^m/\sim$, wobei

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}^m}\; a \sim b :\iff a - b \in \mathbb{Z}^m,$$

vgl. Übung 5.2, der *m-dimensionale Torus.* Die Projektion $\mathbb{R}^m \to T^m$ ist universelle Überlagerung.

Der Monodromiesatz

Hauptsatz 2.13.
Vor.: *Seien E, B topologische Räume, $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ und $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine Überlagerung, d.h. per definitionem $\pi\colon E \to B$ Überlagerung derart, daß $\pi(e_0) = b_0$. Ferner sei E lokal-wegzusammenhängend, also nach 2.11(i) auch B lokal-wegzusammenhängend und π lokal-homöomorph.*
Beh.: *Sind X ein zusammenhängender topolgischer Raum sowie $x_0 \in X$ und ist $f\colon (X, x_0) \to (B, b_0)$ eine* stetige Abbildung punktierter topologischer Räume*, d.h. per definitionem $f\colon X \to B$ stetig derart, daß $f(x_0) = b_0$, so existiert höchstens eine stetige Abbildung $\hat{f}\colon (X, x_0) \to (E, e_0)$ mit $\pi \circ \hat{f} = f$, d.h. daß das*

folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & (E,e_0) \arrow[d, "\pi"] \\
(X,x_0) \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & (B,b_0)
\end{tikzcd}$$

Eine Abbildung $\hat{f}\colon X \to E$ *mit* $\pi \circ \hat{f} = f$ *heißt* π-Lift von f.

Beweis. Seien $\hat{f}_1, \hat{f}_2\colon (X,x_0) \to (B.b_0)$ zwei stetige π-Lifte von f. Wir setzen $\widetilde{X} := \{x \in X \,|\, \hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x)\}$ und $\widetilde{\widetilde{X}} := X \setminus \widetilde{X}$. Dann gilt $x_0 \in \widetilde{X}$, $X = \widetilde{X} \cup \widetilde{\widetilde{X}}$, und wir werden zeigen, daß $\widetilde{X}$ und $\widetilde{\widetilde{X}}$ offen sind. Hieraus folgt dann wegen des Zusammenhanges von X sofort $X = \widetilde{X}$, d.h. $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$.

Sei $x_1 \in X$. Zu zeigen ist, daß eine Umgebung W von x_1 in X existiert mit $W \subset \widetilde{X}$ oder $W \subset \widetilde{\widetilde{X}}$.

Hierzu sei U eine schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung von $f(x_1) \in B$ in B. Für $i \in \{1,2\}$ sei Z_i die Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\pi}(U)$ mit $\hat{f}_i(x_1) \in Z_i$ (beachte, $(\pi \circ \hat{f}_i)(x_1) = f(x_1) \in U)$, also Z_i offen in E (da E lokal-wegzusammenhängend, vgl. die Bemerkung in 2.11). Dann ist

$$W := \overset{-1}{\hat{f}_1}(Z_1) \cap \overset{-1}{\hat{f}_2}(Z_2)$$

eine Umgebung von x_1 in X, und es gilt für $i \in \{1,2\}$ $f|_W = \pi|_{Z_i} \circ \hat{f}_i|_W$, d.h.

$$\hat{f}_i|_W = (\pi|_{Z_i})^{-1} \circ f|_W. \tag{46}$$

1. Fall: $x_1 \in \widetilde{X}$, d.h. $\hat{f}_1(x_1) = \hat{f}_2(x_1)$. Dann folgt $Z_1 = Z_2$, also nach (46) $\hat{f}_1|_W = \hat{f}_2|_W$, d.h. $W \subset \widetilde{X}$.

2. Fall: $x_1 \in \widetilde{\widetilde{X}}$, d.h. $\hat{f}_1(x_1) \neq \hat{f}_2(x_1)$. Dann folgt $Z_1 \neq Z_2$. (denn $\hat{f}_i(x_1)$ ist das einzige Element von $\overset{-1}{\pi}(\{f(x_1)\})$ in Z_i), also auch $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. (Beachte, daß Zusammenhangskomponenten stets übereinstimmen oder disjunkt sind.) Daher ergibt (46) $\underbrace{\hat{f}_1(W)}_{\subset Z_1} \cap \underbrace{\hat{f}_2(W)}_{\subset Z_2} = \varnothing$, also $W \subset \widetilde{\widetilde{X}}$. □

Satz 2.14.

(i) *Seien* X, Y *topologische Räume.* $x_0 \in X$ *und* $y_0 \in Y$. *Dann induziert jede stetige Abbildung* $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ *einen Gruppenhomomorphismus*

$$\boxed{\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0),\ [c] \longmapsto [f \circ c].}$$

Bemerkung. Ist $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ eine stetige Abbildung zwischen punktierten topologischen Räumen, so schreibt man auch häufig $\boxed{f_*}$ für $\pi_1(f)$.

(ii) π_1 *ist ein* kovarianter Funktor der Kategorie aller Paare (X, x_0), wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$, (mit den stetigen Abbildungen als Morphismen) in die Kategorie aller Gruppen (mit den Gruppenhomomorphismen als Morphismen), *d.h. per definitionem:*

Für alle topologischen Räume X, Y, Z, *alle* $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ *und alle stetigen Abbildungen* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *sowie* $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *gilt*

$$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f) \tag{47}$$

und

$$\pi_1\left(\mathrm{id}_{(X,x_0)}\right) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}. \tag{48}$$

Beweis als einfache Übung. □

Hauptsatz 2.15 (Monodromiesatz).
Vor.: *Seien* E, B *topologische Räume,* $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ *und* $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ *eine Überlagerung.* E *sei lokal-wegzusammenhängend. Seien* X *ein weiterer topologischer Raum derart, daß* X *zusammenhängend und lokal-wegzusammenhängend (also auch wegzusammenhängend nach 2.10(ii)) ist,* $x_0 \in X$ *sowie* $f\colon (X, x_0) \to (B, b_0)$ *eine stetige Abbildung.*
Beh.: *Es existiert genau dann genau ein stetiger* π*-Lift* $\hat{f}\colon (X, x_0) \to (E, e_0)$ *von* f,

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (X, x_0) \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

wenn gilt

$$f_*\left(\pi_1(X, x_0)\right) \subset \pi_*\left(\pi_1(E, x_0)\right).$$

(Letzteres ist z.B. stets erfüllt, falls X *sogar einfach-zusammenhängend ist.)*

Die Eindeutigkeitsaussage in der Behauptung des Monodromiesatzes folgt aus 2.13. Wir führen den Beweis der Existenzaussage später (nach 2.22) und zeigen nun unter Verwendung von 2.15, daß 2.8 c) gilt.

2.16 ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$).

1.) Sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $c(0) = c(1) = 1 \in \mathbb{C}$. Da $[0,1]$ einfach-zusammenhängend ist, existiert nach 2.15 genau eine stetige Funktion $\varphi_c\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, 0) \arrow[d, "e^{ix}"] \\ ([0,1], 0) \arrow[ur, "\varphi_c"] \arrow[r, "c"'] & (S^1, 1) \end{tikzcd}$$

(Beachte, daß $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\colon \mathbb{R} \to S^1$ nach 2.12 a) eine Überlagerung ist.)

Wegen $c(1) = 1$ gilt $\varphi_c(1) \in 2\pi\mathbb{Z}$, also können wir die *Umlaufszahl von c* definieren als

$$\boxed{\mathrm{Uml}(c)} := \frac{\varphi_c(1)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

(Es gilt also $\mathrm{Uml}(c) = \mathrm{Uml}(c, 0)$ im Sinne der Funktionentheorie.)

2.) Seien $c, \tilde{c}\colon [0,1] \to S^1$ zwei Wege mit $c(0) = c(1) = 1$ und $\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1) = 1$, die zueinander homotop rel $\{0,1\}$ sind. Sei dann $H\colon [0,1]^2 \to S^1$ eine Homotopie rel $\{0,1\}$ von c nach $\tilde{c}$. Nach dem Monodromiesatz existiert dann eine stetige Funktion $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die das folgende Diagramm kommutieren läßt:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{R}, 0) \arrow[d, "\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}"] \\
([0,1]^2, (0,0)) \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "H"] & (S^1, 1)
\end{tikzcd} \tag{49}$$

Aus (49) folgt, daß $\Phi(0, \ldots)\colon [0,1] \to \mathbb{R}, s \mapsto \Phi(0, s)$, stetig ist und den Wert 0 für $s = 0$ sowie Werte in $2\pi\mathbb{Z}$ hat (wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(0,s)} = H_s(0) = 1$.) Folglich gilt

$$\forall_{s \in [0,1]}\, \Phi(0, s) = 0. \tag{50}$$

Ebenso ist auch $\Phi(1, \ldots)\colon [0,1] \to \mathbb{R}, s \mapsto \Phi(1, s)$, stetig und hat Werte in $2\pi\mathbb{Z}$ (wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(1,s)} = H_s(1) = 1$,) also ist

$$s \longmapsto \Phi(1, s) \text{ konstant auf } [0,1]. \tag{51}$$

Für alle $s \in [0,1]$ gilt $\Phi(0, s) \overset{(50)}{=} 0$ und $\forall_{t \in [0,1]}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(t,s)} \overset{(50)}{=} H_s(t)$, also nach Definition der Umlaufszahl

$$\mathrm{Uml}(H_s) = \frac{\Phi(1, s)}{2\pi}. \tag{52}$$

Nach (51), (52) ist daher $s \mapsto \mathrm{Uml}(H_s)$ konstant auf $[0,1]$, insbesondere gilt wegen $H_0 = c$, $H_1 = \tilde{c}$

$$\mathrm{Uml}(c) = \mathrm{Uml}(\tilde{c}).$$

3.) Aufgrund von 2.) können wir $h\colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ durch

$$h([c]) := \mathrm{Uml}([c]) := \mathrm{Uml}(c)$$

definieren.

a) h ist ein Homomorphismus:
Seien dazu $[c], [\tilde{c}] \in \pi_1(S^1, 1)$, wobei $c, \tilde{c}\colon [0,1] \to S^1$ Wege mit Anfangs- und Endpunkt 1 seien.

Nach (49) gilt mit $\varphi := \varphi_c$ und $\tilde{\varphi} := \varphi_{\tilde{c}}$

$$\forall_{t\in[0,1]}\, c(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)} \;\wedge\; \tilde{c}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\varphi}(t)}.$$

Wir setzen $\tilde{\tilde{c}} := c\,\tilde{c}$, also ist auch $\tilde{\tilde{c}}\colon [0,1] \to S^1$ stetig, und definieren $\tilde{\tilde{\varphi}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{s\in[0,1]}\, \tilde{\tilde{\varphi}} := \begin{cases} \varphi(2t), & t \in [0,\frac{1}{2}], \\ \tilde{\varphi}(2t-1) + 2\pi\mathrm{Uml}(c), & t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

(Beachte dabei $\varphi(1) = \underbrace{\tilde{\varphi}(0)}_{=0} + 2\pi\mathrm{Uml}(c)$.)

Dann folgt offenbar die Stetigkeit von $\tilde{\tilde{\varphi}}$ sowie

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(0) = \varphi(0) = 0 \;\wedge\; \forall_{t\in[0,1]}\, \tilde{\tilde{c}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\tilde{\varphi}}(t)},$$

weshalb

$$\underbrace{\mathrm{Uml}(\underbrace{\tilde{\tilde{c}}}_{=c\,\tilde{c}})}_{=h([c]\,[\tilde{c}])} = \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}(1)}{2\pi} = \frac{\overbrace{\tilde{\varphi}(1)}^{=2\pi\mathrm{Uml}(\tilde{c})} + 2\pi\mathrm{Uml}(c)}{2\pi} = \underbrace{\mathrm{Uml}(c) + \mathrm{Uml}(\tilde{c})}_{=h([c])+h([\tilde{c}])}.$$

b) h ist injektiv:
Sei $[c] \in \pi_1(S^1,1)$ derart, daß $h([c]) = \mathrm{Uml}(c) = 0$, also gilt mit $\varphi := \varphi_c\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\forall_{t\in[0,1]}\, c(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)} \;\wedge \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Definiere die stetige Abbildung $H\colon [0,1]^2 \to S^1$ durch

$$H(t,s) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\varphi(t)}.$$

Dann ist H eine Homotopie von rel $\{0,1\}$ von $H_0 = 1$ nach $H_1 = c$, also $[c] = [1]$.

c) h ist surjektiv:
Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist $c_k\colon [0,1] \to S^1, t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overbrace{2\pi kt}^{=\varphi_{c_k}(t)}}$, ein Weg mit Anfangs- und Endpunkt 1, und es gilt

$$h([c_k]) = \mathrm{Uml}(c_k) = \frac{2\pi k}{2\pi} = k.$$

Damit ist gezeigt

$$\pi_1(S^1,1) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad [c] \longmapsto \mathrm{Uml}(c), \quad \text{ist ein Gruppenhomomorphismus.}$$

Definition 2.17 (Homotopie von stetigen Abbildungen punktierter topologischer Räume)**.** Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume sowie $f, \tilde{f}\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetige Abbildungen.

(i) Eine *Homotopie von f nach $\tilde{f}$ rel* (x_0, y_0) ist per definitionem eine stetige Abbildung
$$F\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y, \quad (x,s) \longmapsto F_s(x)$$
mit $F_0 = f$, $F_1 = \tilde{f}$ und $\forall_{s \in [0,1]}\, F_s(x_0) = y_0$.

Insbesondere ist also $F_s\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ für jedes $s \in [0,1]$ stetig.

(ii) f und $\tilde{f}$ heißen *homotop rel* (x_0, y_0) (i.Z. $\boxed{f \sim \tilde{f}}$) genau dann, wenn eine Homotopie von f nach $\tilde{f}$ rel (x_0, y_0) existiert.

Satz 2.18. *Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte topologische Räume sowie $f, \tilde{f}\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwei stetige Abbildungen mit $f \sim \tilde{f}$ im Sinne von 2.17. Dann gilt $f_* = \tilde{f}_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Seien $[c] \in \pi_1(X, x_0)$ und F wie in 2.17(i). Dann ist $H\colon [0,1]^2 \to Y$, definiert durch
$$H(t,s) := F(c(t), s) = F_s \circ c(t),$$
eine Homotopie von $f \circ c$ nach $\tilde{f} \circ c$ ref $\{0,1\}$, also gilt
$$f_*[c] = [f \circ c] = [\tilde{f} \circ c] = \tilde{f}_*[c].$$
□

Wir beweisen nun den Monodromiesatz im Spezialfalle $(X, x_0) = ([0,1], 0)$.

Satz 2.19.
Vor.: *Es seien $(E, e_0), (B, b_0)$ punktiere topologische Räume, E lokal-wegzusammenhängend und $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine Überlagerung.*
Beh.: *Jeder Weg $c\colon [0,1] \to B$ mit $c(0) = b_0$ liftet eindeutig zu einem Weg $\hat{c}_{e_0}\colon [0,1] \to E$ mit $\pi \circ \hat{c}_{e_0} = c$ und $\hat{c}_{e_0}(0) = e_0$.*

$$\begin{tikzcd}
 & (E, e_0) \arrow[d, "\pi"] \\
([0,1], 0) \arrow[ur, "\hat{c}_{e_0}"] \arrow[r, "c"] & (B, b_0)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wähle zu jedem $t \in [0,1]$ eine schlicht überlagerte Umgebung $U_{(t)}$ von $c(t)$ in B. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Lebsguesche Zahl der offenen Überdeckung $\left(\overline{c}^{1}(U_{(t)})\right)_{t \in [0,1]}$ von $[0,1]$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ eine endliche Zerlegung von $[0,1]$ mit $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Also existiert für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ eine schlicht überlagerte zusammenhängende offene Teilmenge U_i von B mit $[t_{i-1}, t_i] \subset \overline{c}^{1}(U_i)$, also $c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$.

Wir zeigen, daß für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$\text{Es existiert ein stetiger } \pi\text{-Lift } \hat{c}_{(i)}\colon [0, t_i] \to E \text{ mit } \hat{c}_{(i)}(0) = e_0. \tag{53}$$

Dann hat $\hat{c}_{e_0} := \hat{c}_{(k)}$ alle in der Behauptung für $\hat{c}_{e_0}$ ausgesagten Eigenschaften. Die Einzigkeit von $\hat{c}_{e_0}$ folgt weiter aus 2.13.

Zu (53): Der Fall $i = 0$ ist trivial.

Angenommen $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $\hat{c}_{(i-1)}\colon [0, t_{i-1}] \to E$ sei bereits konstruiert. Es gilt $\pi \circ \hat{c}_{(i-1)}(t_{i-1}) = c(t_{i-1}) \in U_i$ und $c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$. Sei Z die Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^1(U_i)$ mit $\hat{c}_{(i-1)}(t_{i-1}) \in Z$. Definiere dann $\hat{c}_{(i)}\colon [0, t_i] \to E$ durch

$$\hat{c}_{(i)}|_{[0,t_{i-1}]} := \hat{c}_{(i-1)} \quad \text{und} \quad \hat{c}_{(i)}|_{[t_{i-1},t_i]} := (\pi|_Z)^{-1} \circ c|_{[t_{i-1},t_i]}.$$

Offenbar leistet $\hat{c}_{(i)}$ das Gewünschte. □

Hauptsatz 2.20.
Vor.: *Seien $(E, e_0), (B, b_0)$ punktierte topologische Räume, E sei lokal-wegzusammenhängend und sei $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine Überlagerung. Sei (X, x_0) ein weiterer punktierter topologischer Raum derart, daß X lokal-wegzusammenhängend ist.*
Beh.: *Ist $f\colon (X, x_0) \to (B, b_0)$ eine stetige Abbildung, die einen stetigen π-Lift $\hat{f}\colon (X, x_0) \to (B, b_0)$ besitzt, so besitzt auch jede stetige Abbildung $F\colon X \times [0,1] \to B$ mit $F(\ldots, 0) = f$ einen stetigen π-Lift $\widehat{F}\colon X \times [0,1] \to E$ mit $\widehat{F}(\ldots, 0) = \hat{f}$.*

Beweis. Seien $f, \hat{f}, F$ wie oben. Angenommen $\widehat{F}\colon X \times [0,1] \to E$ ist eine stetige Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften. Dann ist für jedes $x \in X$ $\widehat{F}(x, \ldots)\colon [0,1] \to E$ ein Weg in E derart, daß $\pi \circ \widehat{F}(x, \ldots) = F(x, \ldots)$ und $\widehat{F}(x, 0) = \hat{f}(x)$, also $\widehat{F}(x, \ldots) = \widehat{F(x, \ldots)}_{\hat{f}(x)}$, vgl. 2.19. Daher gilt

$$\forall_{(x,t) \in X \times [0,1]}\, \widehat{F}(x, t) = \widehat{F(x, \ldots)}_{\hat{f}(x)}(t), \tag{54}$$

insbesondere ist $\widehat{F}$ eindeutig bestimmt.

Sei im folgenden $\widehat{F}\colon X \times [0,1] \to E$ durch (54) definiert. Dann gilt offenbar

$$\pi \circ \widehat{F} = F \quad \text{und} \quad \widehat{F}(\ldots, 0) = \hat{f}.$$

Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von F.

Sei $x_1 \in X$ beliebig gewählt. Wir zeigen die Stetigkeit von $\widehat{F}$ auf einer Umgebung von $\{x_1\} \times [0,1]$ in $X \times [0,1]$.

Zunächst existieren eine wegzusammenhängende Umgebung W von x_1 in X und eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ von $[0,1]$ derart, daß für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt

$$F(W \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i, \tag{55}$$

wobei U_i eine schlicht überlagerte zusammenhängende offene Teilmenge von B ist.

[Beweis hiervon: Wähle zu jedem $t \in [0,1]$ zunächst eine schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung U_t von $F(x_1, t)$ in B und sodann (aufgrund der

Stetigkeit von F in (x_1, t)) Umgebungen W_t von x_1 in X und I_t von t in $[0,1]$ mit $F(W_t \times I_t) \subset U_t$. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Lebesguesche Zahl der offenen Überdeckung $(I_t)_{t\in[0,1]}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ eine endliche Zerlegung von $[0,1]$ mit $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, k\}$ existiert daher ein $\lambda_i \in [0,1]$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subset I_{\lambda_i}$. Dann ist $\widetilde{W} := W_{\lambda_1} \cup \ldots \cup W_{\lambda_k}$ eine Umgebung von x_1 in X, und wegen des lokalen Wegzusammenhanges von X existiert eine wegzusammenhängende Umgebung W von x_1 in X mit $W \subset \widetilde{W}$. Dann folgt für $i \in \{1, \ldots, k\}$: $F(W \times [t_{i-1}, t_i]) \subset F(W_{\lambda_i} \times I_{\lambda_i}) \subset U_i$.]

Wir folgern nun weiter, daß für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$ gilt:

$$\widehat{F}|_{W\times[0,t_i]} \colon W \times [0, t_i] \longrightarrow E \text{ ist stetig.} \tag{56}$$

[Beweis von (56): Für alle $x \in W$ gilt (s.o.) $\widehat{F}(x, 0) = \widehat{f}(x) = \hat{f}(\mathrm{pr}_1(x, 0))$, wobei $\mathrm{pr}_1 \colon X \times [0,1] \to X$ die kanonische Projektion bezeichnet, also ist

$$\widehat{F}|_{W\times\{0\}} = \hat{f} \circ \mathrm{pr}_1|_{W\times\{0\}} \colon W \times \{0\} \longrightarrow E$$

stetig als Komposition stetiger Abbildungen.

Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$ und bereits gezeigt, daß $\widehat{F}|_{W\times[0,t_{i-1}]} \colon W \times [0, t_{i-1}] \to E$ stetig ist. Dann folgt zunächst:

$$\widehat{F}(W \times [t_{i-1}, t_i]) \text{ ist wegzusammenhängend.} \tag{57}$$

(Zu (57): Seien $(x, t), (\tilde{x}, \tilde{t}) \in W \times [t_{i-1}, t_i]$. Wegen des Wegzusammenhanges von W existiert ein Weg in W von x nach $\tilde{x}$. Wegen der Stetigkeit von $\widehat{F}|_{W\times\{t_{i-1}\}}$ lassen sich daher auch $\widehat{F}(x, t_{i-1})$ und $\widehat{F}(\tilde{x}, t_{i-1})$ durch einen Weg in der Obermenge $\widehat{F}(W \times [t_i, t_{i-1}])$ von $\widehat{F}(W \times \{t_{i-1}\})$ verbinden. Nach (54) sind $\widehat{F}(x, \ldots)|_{[t_{i-1},t_i]}$ bzw. $\widehat{F}(\tilde{x}, \ldots)|_{[t_{i-1},t_i]}$ Wege in $\widehat{F}(W \times [t_i, t_{i-1}])$ von $\widehat{F}(x, t_{i-1})$ nach $\widehat{F}(x, t_i)$ bzw. von $\widehat{F}(\tilde{x}, t_{i-1})$ nach $\widehat{F}(\tilde{x}, t_i)$. Daher sind auch $\widehat{F}(x, t)$ und $\widehat{F}(\tilde{x}, \tilde{t})$ durch einen Weg verbindbar, d.h. es gilt (57).)

Wegen (57) und $\pi \circ \widehat{F} = F$ ist $\widehat{F}(W \times [t_{i-1}, t_i])$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\overline{\pi}^1(F(W \times [t_{i-1}, t_i])) \overset{(55)}{\subset} \overline{\pi}^1(U_i)$. Sei Z_i die eindeutig bestimmte (in E offene) Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^1(U_i)$ mit $\widehat{F}(W \times [t_{i-1}, t_i]) \subset Z_i$. Dann gilt

$$F|_{W\times[t_{i-1},t_i]} = \pi|_{Z_i} \circ \widehat{F}|_{W\times[t_{i-1},t_i]},$$

d.h.

$$\widehat{F}|_{W\times[t_{i-1},t_i]} = (\pi|_{Z_i})^{-1} \circ F_{W\times[t_{i-1},t_i]},$$

also ist $\widehat{F}|_{W\times[t_{i-1},t_i]}$ stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Hieraus und aus der Stetigkeit von $\widehat{F}|_{W\times[0,t_{i-1}]}$ folgt offenbar die Stetigkeit von $\widehat{F}|_{W\times[0,t_i]}$, womit (56) für i gezeigt ist.]

Schließlich ergibt (56) für $i = k$: $\widehat{F}|_{W\times[0,1]}$ ist stetig, wobei $W \times [0,1]$ eine Umgebung von $\{x_1\} \times [0,1]$ in $X \times [0,1]$ ist. □

Satz 2.21.
Vor.: *Seien $(E, e_0), (B, b_0)$ punktierte topologische Räume, E sei lokal-wegzusammenhängend und sei $\pi \colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine Überlagerung. Seien ferner $c, d \colon [0,1] \to B$ zwei Wege in B mit $c(0) = d(0)$ und $c(1) = d(1)$.*
Beh.: *Ist c homotop zu d rel $\{0,1\}$, so gilt $\hat{c}_{e_0}(1) = \hat{d}_{e_0}(1)$ und $\hat{c}_{e_0}$ ist homotop zu $\hat{d}_{e_0}$ ref $\{0,1\}$.*

Beweis. Es existiere also eine stetige Abbildung

$$H\colon [0,1]^2 \longrightarrow B, \quad (t,s) \longmapsto H_s(t)$$

mit

$$H_0 = c,\ H_1 = d,\ \forall_{s\in[0,1]}\, H_s(0) = c(0) = d(0) = b_0 \wedge H_s(1) = c(1) = d(1). \tag{58}$$

Nach 2.20 (mit $(X,x_0) := ([0,1],0)$, $f := c$, $\hat{f} := \hat{c}_{e_0}$, $F := H$) existiert ein stetiger π-Lift $\widehat{H}\colon [0,1]^2 \to E$ mit

$$\widehat{H}(\ldots,0) = \hat{c}_{e_0}. \tag{59}$$

Wir behaupten

$$\widehat{H}(\ldots,1) = \hat{d}_{e_0} \text{ und } \forall_{s\in[0,1]}\, \widehat{H}(0,s) = \hat{c}_{e_0}(0) = e_0 \wedge \widehat{H}(1,s) = \hat{c}_{e_0}(1). \tag{60}$$

[Zu (60): $\widehat{H}(0,\ldots)$ bzw. $\widehat{H}(1,\ldots)$ ist stetiger π-Lift von $H(0,\ldots) = b_0$ bzw. $H(1,\ldots) = c(1)$ mit $\widehat{H}(0,0) \overset{(59)}{=} \hat{c}_{e_0}(0) = e_0$ bzw. $\widehat{H}(1,0) \overset{(59)}{=} \hat{c}_{e_0}(1)$. Hieraus folgt zunächst die zweite Aussage von (60) wegen der Eindeutigkeit des Liftes nach 2.19. Ferner ist $\widehat{H}(\ldots,1)$ ein stetiger π-Lift von $H(\ldots,1) = H_1 = d$ mit $\widehat{H}(0,1) = \hat{c}_{e_0}(0) = e_0$ (das haben wir gerade gezeigt), also folgt wiederum nach 2.19 auch die erste Aussage von (60).]

Wegen (60) gilt $\hat{d}_{e_0}(1) = \widehat{H}(1,1) = \hat{c}_{e_0}(1)$, und $\widehat{H}$ ist nach (59), (60) eine Homotopie von $\hat{c}_{e_0}$ nach $\hat{d}_{e_0}$. □

Satz 2.22.
Vor.: *Seien $(E,e_0),(B,b_0)$ punktierte topologische Räume, E sei lokal-wegzusammenhängend und sei $\pi\colon (E,e_0) \to (B,b_0)$ eine Überlagerung.*
Beh.: $\pi_*\colon \pi_1(E,e_0) \longrightarrow \pi_1(B,b_0)$ *ist injektiv.*

Beweis. Seien $[\hat{c}],[\hat{d}] \in \pi_1(E,e_0)$ mit $[\pi\circ\hat{c}] = \pi_*[\hat{c}] = \pi_*[\hat{d}] = [\pi\circ\hat{d}]$, wobei $\hat{c},\hat{d}\colon [0,1] \to E$ Wege in E von e_0 nach e_0. Dann sind $c := \pi\circ\hat{c}, d := \pi\circ\hat{d}\colon [0,1] \to B$ Wege in B von b_0 nach b_0, und nach Voraussetzung sind c, d homotop rel $\{0,1\}$ in B. Nach 2.21 folgt hieraus, daß $\hat{c}_{e_0}$ und $\hat{d}_{e_0}$ homotop rel $\{0,1\}$ sind. Aber wegen der Eindeutigkeit des Liftes bei vorgegebenem Anfangspunkt (nach 2.19) gilt offenbar $\hat{c} = \hat{c}_{e_0}$ und $\hat{d} = \hat{d}_{e_0}$, folglich sind $\hat{c}$ und $\hat{d}$ homotop rel $\{0,1\}$, d.h. $[\hat{c}] = [\hat{d}]$. □

Wir kommen nun zum *Beweis des Monodromiesatzes.* Seien also (E,e_0), (B,b_0), (X,x_0) punktierte topologische Räume, E lokal-wegzusammenhängend, X zusammenenhängend und lokal-wegzusammenhängend, $\pi\colon (E,e_0) \to (B,b_0)$ eine Überlagerung und $f\colon (X,x_0) \to (B,b_0)$ eine stetige Abbildung.

Wir wollen zeigen:

$$\begin{aligned} &\text{Es existiert ein stetiger } \pi\text{-Lift } \hat{f}\colon (X,x_0) \longrightarrow (E,e_0) \\ \Longleftrightarrow\ & f_*(\pi_1(X,x_0)) \subset \pi_*(\pi_1(E,e_0)). \end{aligned}$$

„⇒“ Aus $f = \pi \circ \hat{f}$ und 2.14(i) folgt

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subset \pi_*(\pi_1(E, e_0)).$$

„⇐“ Wir definieren $\hat{f}\colon X \to E$ durch

$$\forall_{x \in X} \quad \hat{f}(x) := (\widehat{f \circ c})_{e_0}(1), \quad \begin{array}{l} \text{wobei } c\colon [0,1] \longrightarrow X \text{ beliebiger Weg} \\ \text{in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x, \text{ (also } f \circ c \text{ Weg} \\ \text{in } B \text{ von } b_0 \text{ nach } f(x).) \end{array} \tag{61}$$

(Bemerkung: Falls überhaupt ein $\hat{f}$ der gewünschten Art existiert, so muß für jeden Weg $c\colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = x_0$ nach 2.19 $\hat{f} \circ c = (\widehat{f \circ c})_{e_0}$ gelten. Daher ist (61) die einzig mögliche Definition für $\hat{f}$.)

[Zur Wohldefiniertheit von $\hat{f}$: Seien $c, d\colon [0,1] \to X$ zwei Wege in X von x_0 nach x. Dann ist $c\, d^v\colon [0,1] \to X$ ein Weg in X von x_0 nach x_0, also gilt $[c\, d^v] \in \pi_1(X, x_0)$ und daher

$$f_*[c\, d^v] \in f_*(\pi_1(X, x_0)) \overset{\text{Vor.}}{\subset} \pi_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Folglich existiert $[\hat{\gamma}] \in \pi_1(E, e_0)$, wobei $\hat{\gamma}\colon [0,1] \to E$ ein Weg in E von e_0 nach e_0 ist, mit

$$[f \circ c]\,[f \circ d]^v = [\, \underbrace{f \circ (c\, d^v)}_{=(f \circ c)\,(f \circ d^v)}\,] = \pi_*[\hat{\gamma}] = [\pi \circ \hat{\gamma}].$$

Hieraus folgt weiter

$$[f \circ c] = [f \circ c]\,[f \circ d]^v\,[f \circ d] = [\pi \circ \hat{\gamma}]\,[f \circ d] = [(\pi \circ \hat{\gamma})\,(f \circ d)],$$

d.h. $f \circ c$ ist homotop zu $(\pi \circ \hat{\gamma})\,(f \circ d)$ rel $\{0,1\}$. Dies wiederum bedeutet nach 2.21

$$\begin{aligned} (\widehat{f \circ c})_{e_0}(1) &= ((\widehat{\pi \circ \hat{\gamma}})_{e_0}\,(\widehat{f \circ d})_{(\widehat{\pi \circ \hat{\gamma}})_{e_0}(1)})(1) \overset{2.19}{=} (\hat{\gamma}\,(\widehat{f \circ d})_{\underbrace{\hat{\gamma}(1)}_{=e_0}})(1) \\ &= (\widehat{f \circ d})_{e_0}(1). \end{aligned}$$

Daher ist die Definition in (61) unabhängig von der speziellen Wahl von c. Beachte außerdem, daß wegen des Wegzusammenhanges von X zu jedem $x \in X$ ein Weg c wie in (61) existiert.]

Aus (61) folgt

$$\pi \circ \hat{f} = f \quad \text{und} \quad \hat{f}(x_0) = e_0. \tag{62}$$

Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von $\hat{f}\colon X \to E$. Wir folgern aus (61) zunächst die folgende allgemeinere Aussage:

$$\forall_{x_1, x \in X} \quad \hat{f}(x) := (\widehat{f \circ c})_{\hat{f}(x_1)}(1), \quad \begin{array}{l} \text{wobei } c\colon [0,1] \longrightarrow X \text{ beliebiger Weg} \\ \text{in } X \text{ von } x_1 \text{ nach } x, \text{ (also } f \circ c \text{ Weg} \\ \text{in } B \text{ von } f(x_1) \text{ nach } f(x).) \end{array} \tag{63}$$

[Zu (63): Seien $x_1, x \in X$ und c wie in (63). Wegen des Wegzusammenhanges von X können wir einen Weg d: $[0,1] \to X$ von x_0 nach x_1 wählen. Dann ist dc: $[0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach x, also gilt nach (61)

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= (\widehat{f \circ (dc)})_{e_0}(1) = (\widehat{(f \circ d)(f \circ c)})_{e_0}(1)(1) \\ &= ((\widehat{f \circ d})_{e_0}(\widehat{f \circ c})_{(\widehat{f \circ d})_{e_0}(1)}) = (\widehat{f \circ c})_{\hat{f}(x_1)}(1), \end{aligned}$$

d.h. (63) ist gezeigt.]

Wir zeigen schließlich

$$\forall_{x_1 \in X}\ \hat{f}\colon X \longrightarrow E \text{ ist stetig in } x_1.$$

Hierzu sei $x_1 \in X$ beliebig. Wir werden zeigen, daß eine Umgebung W von x_1 in X existiert derart, daß $\hat{f}|_W$ stetig ist.

Sei U eine schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung von $f(x_1)$ in B und sei Z die Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{\pi}(U)$ mit $\hat{f}(x_1) \in Z$, also ist $\pi|_Z$: $Z \to U$ ein Homöomorphismus. Wegen der Stetigkeit von f ist $\overset{-1}{f}(U)$ eine Umgebung von x_1 in X, also existiert wegen des lokalen Wegzusammenhanges von X eine wegzusammenhängende Umgebung W von x_1 in X mit $W \subset \overset{-1}{f}(U)$, also $f(W) \subset U$.

Wir behaupten

$$\hat{f}(W) \subset Z. \tag{64}$$

[Zu (64): Wegen $(\pi \circ \hat{f})(W) \overset{(62)}{\subset} f(W) \subset U$ folgt zunächst $\hat{f}(W) \subset \overset{-1}{\pi}(U)$. Sei $x \in W$. Wegen des Wegzusammenhanges von W existiert ein Weg c: $[0,1] \to X$ von x_1 nach x mit $c([0,1]) \subset W$, also ist $f \circ c$: $[0,1] \to B$ ein Weg in B von $f(x_1)$ nach $f(x)$ mit $(f \circ c)([0,1]) \subset f(W) \subset U$. Dann ist $(\widehat{f \circ c})_{\hat{f}(x_1)}$: $[0,1] \to E$ ein Weg in E von $\hat{f}(x_1)$ nach $\hat{f}(x)$ (vgl. (63)) mit $\underbrace{(\widehat{f \circ c})_{\hat{f}(x_1)}([0,1])}_{\hat{f}(x_1) \in} \subset \overset{-1}{\pi}(U)$, also auch $(\widehat{f \circ c})_{\hat{f}(x_1)}([0,1]) \subset Z$, insbesondere $\hat{f}(x) \in Z$. Damit ist (64) gezeigt.]

Aus (64) folgt schließlich

$$\begin{aligned} f|_W &\overset{(62)}{=} (\pi \circ \hat{f})|_W = \pi|_Z \circ \hat{f}|_W, \\ \hat{f} &= (\pi|_Z)^{-1} \circ f|_W, \end{aligned}$$

also ist $\hat{f}|_W$ stetig als Komposition stetiger Abbildungen. □

Decktransformationen

Definition 2.23 (Decktransformation)**.** Seien E, B topologische Räume und π: $E \to B$ eine Überlagerung.

Eine Abbildung f: $E \to E$ heißt eine *Decktransformation von* π genau dann, wenn f stetig mit $\pi \circ f = \pi$ ist.

Mit $\boxed{D(\pi)}$ bezeichnen wir die Menge aller Decktransformationen von π.

Satz 2.24.
Vor.: *Seien (E, e_0), (B, b_0) punktierte topologische Räume, E lokal-wegzusammenhängend und $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine universelle Überlagerung.*
Beh.: *Die Decktransformationen bilden eine zur Fundamentalgruppe von B isomorphe Untergruppe der Gruppe aller Homöomorphismen von E auf sich; genauer gilt:*

(i) $\forall_{e_1, e_2 \in \pi^{-1}(\{b_0\})} \exists!_{f \in D(\pi)}\, f(e_1) = e_2$.

(ii) Jedes $f \in D(\pi)$ ist ein Homöomorphismus von E auf sich.

$D(\pi)$ ist eine Untergruppe der Gruppe aller Homöomorphismen von E auf sich, die sogenannte Decktransformationsgruppe *von π.*

(iii) Durch $\Phi\colon D(\pi) \to \pi_1(B, b_0)$, $f \mapsto [\pi \circ \hat{c}]$, wobei $\hat{c}\colon [0,1] \to E$ beliebiger Weg von e_0 nach $f(e_0)$ sei, wird ein Gruppenisomorphismus definiert.

Für $[c] \in \pi_1(B, b_0)$ ist $\Phi^{-1}([c])$ das eindeutig bestimmte $f \in D(\pi)$ mit $f(e_0) = \hat{c}_{e_0}(1)$.

Beweis. Zu (i): Die Existenzaussage folgt sofort aus dem Monodromiesatz 2.15, und die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 2.13.

$$\begin{tikzcd} & (E, e_2) \arrow[d, "\pi"] \\ (E, e_1) \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\pi"] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

Zu (ii): Sei $f \in D(\pi)$ und sei $e_1 := f(e_0)$, also $e_0, e_1 \in \pi^{-1}(\{b_0\})$. Wegen der Existenzaussage in (i) existiert $\tilde{f} \in D(\pi)$ mit $\tilde{f}(e_1) = e_0$. Dann sind offenbar $\tilde{f} \circ f$ bzw. $f \circ \tilde{f}$ sowie id_E Elemente von $D(\pi)$ die e_0 in e_0 bzw. e_1 in e_1 sowie e_0 in e_0 und e_1 in e_1 überführen. Wegen der Einzigkeitsaussage in (i) folgt daher $\tilde{f} \circ f = f \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_E$, d.h. f ist ein Homöomorphismus von E auf sich und $f^{-1} = \tilde{f} \in D(\pi)$. Hieraus folgt offenbar (ii).
(iii) ist Übung 9.1. □

Universelle Überlagerungen

Hauptsatz 2.25 (Existenz einer universellen Überlagerung)**.**
Vor.: *Sei B ein zusammenhängender und lokal-einfach-zusammenhängender topologischer Raum, (also B auch lokal-wegzusammenhängend und wegzusammenhängend.)*
Beh.: *Es existieren ein einfach-zusammenhängender und lokal-wegzusammenhängender topologischer Raum E und eine Überlagerung $\pi\colon E \to B$.*

Beweis. Wähle $b_0 \in B$. Wir definieren

$$E := \{[c] \,|\, c\colon [0,1] \longrightarrow B \text{ stetig mit } c(0) = b_0\} \subset \bigcup_{b \in B} \widehat{\Omega}_{b_0, b} \tag{65}$$

(hier ist

$$[c] := \{\tilde{c} \,|\, \tilde{c}\colon [0,1] \longrightarrow B \text{ stetig mit } \tilde{c}(0) = c(0) = b_0 \wedge \tilde{c}(1) = c(1) \wedge \tilde{c} \sim c\},$$

wobei $\sim$ homotop rel $\{0,1\}$ bedeutet,)

sowie $\pi\colon E \to B$ durch

$$\forall_{e \in E}\, \pi(e) := c(1), \text{ falls } e = [c], \tag{66}$$

also ist $\pi\colon E \to B$ wegen des Wegzusammenhanges von B surjektiv.

Wir definieren weiter für alle $e = [c] \in E$ und jede zusammenhängende (d.h. wegzusammenhängende) Umgebung U von $\pi(e) = c(1)$ in B

$$U_e := \{\overbrace{[c]}^{=e}\,[d] \,|\, d\colon [0,1] \longrightarrow U \text{ stetig} \wedge d(0) = \pi(e) = c(1)\} \subset E, \tag{67}$$
$$\text{also gilt offenbar stets } e \in U_e \text{ und } \pi(U_e) = U.$$

Wir zeigen, daß für alle solchen e, U gilt

$$\forall_{\tilde{e} \in U_e}\, U_{\tilde{e}} = U_e. \tag{68}$$

[Zu (68): Sei $\tilde{e} \in U_e$. Dann gilt nach (67) $\pi(\tilde{e}) \in U$, also ist $U_{\tilde{e}}$ gemäß (67) definiert. Wähle c mit $c = [e]$. Wegen $\tilde{e} \in U_e$ existiert ein $d\colon [0,1] \to U$ stetig mit $d(0) = c(1)$ derart, daß $\tilde{e} = [c\,d]$, also $\pi(\tilde{e}) = d(1) \in U$.

„$\subset$“ Sei $e_1 \in U_{\tilde{e}}$. Dann existiert also $\tilde{d}\colon [0,1] \to U$ stetig mit $\tilde{d}(0) = \pi(\tilde{e}) = d(1)$ derart, daß

$$e_1 = \underbrace{[c\,d]}_{=\tilde{e}}\,[\tilde{d}] = \underbrace{[c]}_{=e}\,[d\,\tilde{d}] \in U_e,$$

beachte, daß $d\,\tilde{d}\colon [0,1] \to U$ stetig mit $(d\,\tilde{d})(0) = d(0) = c(1)$.

„$\supset$“ Sei $e_2 \in U_e$. Dann existiert $\tilde{\tilde{d}}\colon [0,1] \to U$ stetig mit $\tilde{\tilde{d}}(0) = \pi(e) = c(1)$ derart, daß

$$e_2 = \underbrace{[c]}_{=e}\,[\tilde{\tilde{d}}] = ([c]\,([d]\,[d]^v))\,[\tilde{\tilde{d}}] = \underbrace{[c\,d]}_{=\tilde{e}}\,[d^v\,\tilde{\tilde{d}}] \in U_{\tilde{e}},$$

beachte, daß $d^v\,\tilde{\tilde{d}}\colon [0,1] \to U$ stetig mit $(d^v\,\tilde{\tilde{d}})(0) = d^v(0) = d(1) = \pi(\tilde{e})$.]

Wir behaupten weiter, daß durch

$$\forall_{G \subset E}\,(G \text{ offen in } E :\Longleftrightarrow \forall_{e \in G}\exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(\pi(e),B) \text{ zusammenhängend}}\, U_e \subset G) \tag{69}$$

eine Topologie für E definiert wird.

[Beweis hiervon: Trivialerweise sind $\varnothing$, E und Vereinigungen offener Mengen offen.

Seien G_1, G_2 offen und $e \in G_1 \cap G_2$. Dann existiert zu $i \in \{1,2\}$ eine zusammenhängende Umgebung U_i von $\pi(e)$ in B mit $(U_i)_e \subset G_i$. $U_1 \cap U_2$ ist eine Umgebung von $\pi(e)$ in B, folglich existiert wegen des lokalen Wegzusammenhanges von B eine zusammenhängende Umgebung U von $\pi(e)$ in B mit $U \subset U_1 \cap U_2$. Für $i \in \{1,2\}$ folgt aus $U \subset U_i$ offenbar $U_e \subset (U_i)_e \subset G_i$, also gilt auch $U_e \subset (G_1 \cap G_2)$. Damit ist gezeigt, daß $G_1 \cap G_2$ offen ist.]

Im folgenden betrachten wir E stets als topologischen Raum mit der in (69) gegebenen Topologie.

Aus (68) folgt sofort, falls e, U wie in (67)

$$\forall_{e\in E}\forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(\pi(e),B)\text{ zusammenhängend}}\, U_e \text{ ist offen in } E. \tag{70}$$

Wir zeigen als nächstes

$$\pi\colon E \longrightarrow B \text{ ist stetig.} \tag{71}$$

[Zu (71): Sei V offen in B. Zu zeigen ist die Offenheit von $\overline{\pi}^1(V)$ in E. Sei $e \in \overline{\pi}^1(V)$, also $\pi(e) \in V$. Wegen des lokalen Wegzusammenhanges von B existiert eine zusammenhängende Umgebung U von $\pi(e)$ in B mit $U \subset V$. Dann ist nach (70) U_e eine Umgebung von e in E mit $\pi(U_e) = U \subset V$, also $U_e \subset \overline{\pi}^1(V)$. Daher ist $\overline{\pi}^1(V)$ offen in E.]

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{array}{l}\pi\colon E \longrightarrow B \text{ ist Überlagerung, lokaler Homöomorphismus}\\ \text{und } E \text{ ist lokal-wegzusammenhängend.}\end{array} \tag{72}$$

[Zu (72): Sei $b \in B$. Da B lokal-einfach-zusammenhängend ist, existiert eine einfach-zusammenhängende (also auch zusammenhängende) Umgebung U von b in B.

Wir zeigen zunächst

$$\forall_{e\in\overline{\pi}^1(U)}\, \pi|_{U_e}\colon U_e \longrightarrow U \text{ ist Homöomorphismus,} \tag{73}$$

beachte, daß für $e \in \overline{\pi}^1(U)$ folgt, daß $U \in \mathcal{U}^\circ(\pi(e), B)$ zusammenhängend ist.

(Beweis von (73): Nach (70) ist U_e offen in E, und nach (71), (67) ist $\pi|_{U_e}\colon U_e \to U$ stetig und surjektiv.

Zur Injektivität von $\pi|_{U_e}$: Seien $e_1, e_2 \in U_e$ mit $\pi(e_1) = \pi(e_2)$. Sei $e = [c]$ und seien $e_1 = [c][d_1]$, $e_2 = [c][d_2]$, wobei $d_1, d_2\colon [0,1] \to U$ Wege in U mit $d_1(0) = d_2(0)(= \pi(e) = c(1))$ sind. $\pi(e_1) = \pi(e_2)$ bedeutet genau $d_1(1) = d_2(1)$, d.h. die Wege d_1 und d_2 haben gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt. Wegen des einfachen Zusammenhanges von U folgt hieraus nach 2.7 $[d_1] = [d_2]$ und daher $e_1 = e_2$.

Zur Offenheit von $\pi|_{U_e}$: Sei G offen in U_e, also wegen (70) G auch offen in E. Sei $\tilde{e} \in G$. Dann existiert nach (69) eine zusammenhängende Umgebung $\widetilde{U}$ von $\pi(\tilde{e})$ in B mit $\widetilde{U}_{\tilde{e}} \subset G$, und mit (67) folgt

$$\widetilde{U} = \pi(\widetilde{U}_{\tilde{e}}) \subset \pi(G) \subset \pi(U_e) = U,$$

also ist $\widetilde{U} \in \mathcal{U}^\circ(\pi(\tilde{e}), U)$ mit $\widetilde{U} \subset \pi(G)$.

Damit ist (73) vollständig bewiesen.)

Wir folgern aus (73):

$$\forall_{e\in\overline{\pi}^1(U)}\quad \begin{array}{l}U_e \text{ ist die Zusammenhangskomponente von } \overline{\pi}^1(U),\\ \text{die } e \text{ enthält.}\end{array} \tag{74}$$

(Beweis von (74): U_e ist offen in $\overline{\pi}^1(U)$, und nach (73) ist U_e homöomorph zu U, also ist U_e mit U zusammenhängend. Ferner gilt

$$\overline{\pi}^1(U) \setminus U_e = \bigcup_{\tilde{e} \in \overline{\pi}^1(U) \setminus U_e} = U_{\tilde{e}},$$

denn „$\subset$“ ist trivial und „$\supset$“ ergibt sich folgendermaßen: Sei $\tilde{e} \in \overline{\pi}^1(U) \setminus U_e$ und sei $e_1 \in U_{\tilde{e}}$. Nach (67) gilt $e_1 \in \overline{\pi}^1(U)$. Angenommen $e_1 \in U_e$. Dann folgt mit (68) $\tilde{e} \in U_{\tilde{e}} = U_{e_1} U_e$, im Widerspruch zu $\tilde{e} \notin U_e$.

Aus der letzten Aussage und (70) folgt, daß außer U_e auch $\overline{\pi}^1(U) \setminus U_e$ offen in $\overline{\pi}^1(U)$ ist. Hieraus folgt offenbar (74).)

Wegen (73), (74) ist die Überlagerungseigenschaft von $\pi\colon E \to B$ gezeigt. Die lokale Homöomorphie von π folgt aus (73). Da B nach Voraussetzung lokal-wegzusammenhängend ist, so folgt aus der lokalen Homöomorphie von π, daß auch E lokal-wegzusammenhängend ist. Damit ist (72) bewiesen.]

Zu zeigen bleibt:

$$E \text{ ist einfach-zusammenhängend.} \tag{75}$$

Den Beweis von (75) bereiten wir durch den Beweis der folgenden Aussage (76) vor:

Sei $c\colon [0,1] \longrightarrow B$ ein Weg in B mit $c(0) = b_0$. Dann ist $\hat{c}\colon [0,1] \longrightarrow E$, definiert durch
$$\forall_{s \in [0,1]}\, \hat{c}(s) := [c^s], \text{ wobei } c^s\colon [0,1] \to B,\ t \mapsto c(st),$$
ein stetiger π-Lift von c mit $\hat{c}(0) = [b_0]$ und $\hat{c}(1) = [c]$. (76)

[Zu (76): $\pi \circ \hat{c} = c$ gilt wegen $\pi(\hat{c}(s)) = \pi([c^s]) = c^s(1) = c(s)$ für alle $s \in [0,1]$.

Sei $s_0 \in [0,1]$. Wir wollen zeigen, daß $\hat{c}\colon [0,1] \to E$ in s_0 stetig ist. Sei hierzu G eine Umgebung von $\hat{c}(s_0) = [c^{s_0}]$ in E. Dann existiert nach (69) eine zusammenhängende Umgebung U von $\pi(\hat{c}(s_0)) = c(s_0)$ in B mit $U_{[c^{s_0}]} \subset G$. Wegen der Stetigkeit von $c\colon [0,1] \to B$ in s_0 existiert weiter eine Intervall-Umgebung J von s_0 in $[0,1]$ mit $c(J) \subset U$. Dann gilt

$$\forall_{s_1 \in J}\, [\underbrace{c^{s_1}}_{=\hat{c}(s_1)}] = [c^{s_0} d], \text{ wobei } d\colon [0,1] \to U,\ t \mapsto c(\underbrace{s_0 + t\,(s_1 - s_0)}_{\in J}).$$

(Denn $H\colon [0,1]^2 \to B$ definiert durch

$$H(t,s) := \begin{cases} c(\overbrace{(1-s)\,\overbrace{t\,s_1}^{\in[0,1]} + s\,\overbrace{2\,t\,s_0}^{\in[0,1]}}^{\in[0,1]}), & t \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ c(\underbrace{(1-s)\,\underbrace{t\,s_1}_{\in[0,1]} + s(\underbrace{s_0 + (2\,t-1)\,(s_1 - s_0)}_{\in[0,1]})}_{\in[0,1]}), & t \in [\tfrac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

ist eine Homotopie von c^{s_1} nach $c^{s_0} d$ rel $\{0,1\}$.)

Nach (67) folgt hieraus $\hat{c}(J) \subset U_{[c^{s_0}]} \subset G$, womit (76) bewiesen ist.]

Wir folgern aus (76) zunächst, daß E wegzusammenhängend ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß sich jedes $e \in E$ durch einen Weg in E mit $[b_0] \in E$ verbinden läßt. Dies folgt aber sofort aus (76): Denn ist $e = [c]$, so ist $\hat{c}$ gemäß (76) ein Weg in E von $[b_0]$ nach $[c] = e$.

Seien nun $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to E$ zwei Wege in E mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = [b_0]$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Wir werden zeigen, daß dann γ_1 homotop zu γ_2 rel $\{0,1\}$ ist. Ist dies gezeigt, so folgt der einfache Zusammenhang von E nach 2.7 „(4) $\Rightarrow$ (1)“.

Für $i \in \{1,2\}$ definieren wir den (nach (71) stetigen) Weg $c_i\colon [0,1] \to B$ durch $c_i := \pi \circ \gamma_i$ und sodann den stetigen π-Lift $\widehat{c_i}\colon [0,1] \to E$ von c_i gemäß (76). Dann sind γ_i und $\widehat{c_i}$ zwei stetige π-Lifte von c_i mit demselben Anfangspunkt $[b_0]$, folglich gilt nach (72) und 2.19: $\gamma_i = c_i$. Hieraus folgt

$$[c_1] \overset{(76)}{=} \widehat{c_1}(1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \widehat{c_2}(1) \overset{(76)}{=} [c_2],$$

d.h. c_1 ist homotop zu c_2 rel $\{0,1\}$ (in B), also nach 2.21: γ_1 homotop zu γ_2 rel $\{0,1\}$ (in E).

Damit ist auch (75) bewiesen. □

Hauptsatz 2.26 (Eindeutigkeit der universellen Überlagerung).
Vor.: *Seien (E, e_0), $(\widetilde{E}, \tilde{e}_0)$, (B, b_0) punktierte topologische Räume, E, $\widetilde{E}$ lokalwegzusammenhängend und $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$, $\tilde{\pi}\colon (\widetilde{E}, \tilde{e}_0) \to (B, b_0)$ zwei universelle Überlagerungen.*
Beh.: *Die nach 2.15 eindeutige bestimmten stetigen Abbildungen $g\colon E \to \widetilde{E}$ mit $g(e_0) = \tilde{e}_0$*

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{E}, \tilde{e}_0) \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ (E, e_0) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\pi"] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

und $\tilde{g}\colon \widetilde{E} \to E$ mit $\tilde{g}(\tilde{e}_0) = e_0$

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (\widetilde{E}, \tilde{e}_0) \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

sind zueinander inverse Homöomorphismen.

Beweis. $\tilde{g} \circ g\colon (E, e_0) \to (E, e_0)$ ist eine stetige Abbildung mit

$$\pi \circ (\tilde{g} \circ g) = (\pi \circ \tilde{g}) \circ g = \tilde{\pi} \circ g = \pi.$$

Daher sind $\tilde{g} \circ g$ und id_E zwei stetige Lifte von $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$,

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (E, e_0) \arrow[ur, "\tilde{g} \circ g, \mathrm{id}_E"] \arrow[r, "\pi"] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

also nach 2.13: $\tilde{g} \circ g = \mathrm{id}_E$.

Völlig analog zeigt man $g \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{\widetilde{E}}$, also folgt die Behauptung. □

Satz 2.27. *Sei B ein einfach-zusammenhängender lokal-wegzusammenhängender topologischer Raum.*

Dann ist jede Überlagerung $\pi\colon E \to B$, wobei E ein zusammenhängender lokal-wegzusammenhängender topologischer Raum ist, ein Homöomorphismus.

Beweis. Seien E, π wie angegeben. Wähle $e_0 \in E$ und setze $b_0 := \pi(e_0)$, also ist $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine Überlagerung. Nach 2.10(ii) ist E wegzusammenhängend, und nach 2.22 ist

$$\pi_*\colon \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \overset{\text{Vor.}}{=} \{1\} \text{ injektiv,}$$

also gilt auch $\pi_1(E, e_0) = \{1\}$.

Damit ist gezeigt, daß E einfach-zusammenhängend ist, d.h. daß die Abbildung $\pi\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine universelle Überlagerung ist. Da trivialerweise auch $\mathrm{id}_B\colon (B, b_0) \to (B, b_0)$ eine universelle Überlagerung ist, folgt aus 2.26 die Homöomorphie von $\pi\colon E \to B$. □

Anhang

Der folgende Hauptsatz ermöglicht es, viele unterschiedliche Resultate über einfach-zusammenhängende Räume nach einem einheitlichen Verfahren zu beweisen.

Hauptsatz 2.28.
Vor.: *Seien M ein einfach-zusammenhängender lokal-wegzusammenhängender topologischer Raum, E eine Menge und $\pi\colon E \to M$ eine surjektive Abbildung. Ferner sei $\mathcal{F}$ eine Menge auf Gebieten[8] definierter Abbildungen $\varphi\colon G\varphi \to E$ derart, daß gilt:*

(0) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}}\, \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_{G\varphi}\colon G\varphi \hookrightarrow M$.

(1) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}} \forall_{U \subset G\varphi\, \textit{Teilgebiet}}\, \varphi|_U \in \mathcal{F}$.

(2) $\forall_{\varphi\colon G\varphi \to E,\, G\varphi \subset M\, \textit{Gebiet}} \Big(\big(\forall_{p \in G\varphi} \exists_{U \subset G\varphi\, \textit{Teilgebiet}}\, \varphi|_U \in \mathcal{F} \big) \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{F} \Big)$.

(3) $\forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}\, \textit{mit}\, G\varphi = G\psi} \big((\exists_{p \in G\varphi}\, \varphi(p) = \psi(p)) \Longrightarrow \varphi = \psi \big)$.

[8]Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt *Gebiet* genau dann, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

(4) Es existiert eine Basis $\mathfrak{G}$ der Topologie[9] *von M, bestehend aus Gebieten in M, mit*

$$\forall_{G\in\mathfrak{G}}\forall_{p\in G}\forall_{e\in\overline{\pi}^1(\{p\})}\exists_{\varphi\in\mathcal{F}}\, G\varphi = G \wedge \varphi(p) = e.$$

Beh.: $\forall_{p_0\in G}\forall_{e_0\in\overline{\pi}^1(\{p_0\})}\exists!_{\varphi\in\mathcal{F}}\, G\varphi = M \wedge \varphi(p_0) = e_0.$

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß durch

$$\forall_{H\subset E}\left(H \in \mathcal{T} :\Longleftrightarrow \exists_{\mathcal{F}_H\subset\mathcal{F}}\, H = \bigcup_{\varphi\in\mathcal{F}_H} \varphi(G\varphi)\right) \tag{77}$$

eine Topologie $\mathcal{T}$ für M definiert wird.

[Zu (77): 1.) $\varnothing \in \mathcal{T}$ ist trivial.

2.) $E \in \mathcal{T}$ ist klar nach Vor. (4).

3.) Daß die Vereinigung von zu $\mathcal{T}$ gehörenden Mengen wieder zu $\mathcal{T}$ gehört, ist ebenfalls trivial.

4.) Seien $H_1, H_2 \in \mathcal{T}$. Zu zeigen ist $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{T}$. Seien $e \in H_1 \cap H_2$ und $p := \pi(e) \in M$. Für $i \in \{1,2\}$ existiert wegen $H_i \in \mathcal{T}$ und $e \in T_i$ ein $\varphi_i \in \mathcal{F}$ mit $e \in \varphi_i(G\varphi_i) \subset H_i$, also $p \in G\varphi_1 \cap G\varphi_2$ (vgl. Vor. (0)) und $e = \varphi_i(p_i)$ mit gewissem $p_i \in G\varphi_i$, d.h. (erneut nach Vor. (0)) $p = p_i$ und somit $e = \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$.

Da $G\varphi_1 \cap G\varphi_2 \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$, so existieren nach Vor. (4) sowohl $G \in \mathfrak{G}$ mit $p \in G \subset G\varphi_1 \cap G\varphi_2$ als auch $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $G\varphi = G$ und $\varphi(p) = e$. Setzt man für $i \in \{1,2\}$ $\tilde{\varphi}_i := \varphi_i|_G$, so folgt nach Vor. (1), daß auch $\tilde{\varphi}_i \in \mathcal{F}$, $G\tilde{\varphi}_i = G$ und $\tilde{\varphi}_i(p) = e$. Aus Vor. (3) folgt daher $\varphi = \tilde{\varphi}_i$ und somit

$$e \in \underbrace{\tilde{\varphi}_1}_{\in\mathcal{F}}(G\tilde{\varphi}_1) = \tilde{\varphi}_1(G) \cap \tilde{\varphi}_2(G) \subset \varphi_1(G\varphi_1) \cap \varphi_2(G\varphi_2) \subset H_1 \cap H_2.$$

Da $e \in H_1 \cap H_2$ beliebig gewählt war, folgt hieraus offenbar $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{T}$.]

Wir betrachten im folgenden E stets als topologischen Raum mit der in (77) definierten Topologie. Dann gilt weiter:

$$\pi\colon E \longrightarrow M \text{ ist stetig.} \tag{78}$$

[Zu (78): Seien $e \in E$ und V eine Umgebung von $p := \pi(e)$ in M. Nach Vor. (4) existieren $G \in \mathfrak{G}$ mit $p \in G \subset V$ und $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $G\varphi = G$ und $\varphi(p) = e$. Dann gilt nach (77) $\varphi(G\varphi) \in \mathcal{U}^\circ(e, E)$ und außerdem $\pi(\varphi(G\varphi)) \overset{(0)}{=} G\varphi = G \subset V$. Damit ist die Stetigkeit von π in e gezeigt.]

Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Hauptsatzes seien $G_0 \in \mathfrak{G}$ und $p_0 \in G_0$ fest gewählt. Für jedes $e_0 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})$ sei $\varphi_{e_0} \in \mathcal{F}$ das nach Vor. (4), (3) eindeutig bestimmte Element von $\mathcal{F}$ mit $G\varphi_{e_0} = G_0$ und $\varphi_{e_0}(p_0) = e_0$. Dann folgt:*

(i) Für jedes $e_0 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})$ ist $\varphi_{e_0}\colon G_0 \to E$ stetig, und $\varphi_{e_0}(G_0)$ ist ein Gebiet in E.

[9] Eine Teilmenge $\mathfrak{B}$ der Topologie eines topologischen Raumes heißt *Basis der Topologie* genau dann, wenn sich jede offene Menge als Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ darstellen läßt.

(ii) $\overline{\pi}^1(G_0) = \dot\bigcup_{e_0 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})} \varphi_{e_0}(G_0)$ *ist die disjunkte Vereinigung durch die Zusammenhangskomponenten von* $\overline{\pi}^1(G_0)$.

(iii) Für jedes $e_0 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})$ *ist* $\pi|_{\varphi_{e_0}(G_0)}\colon \varphi_{e_0}(G_0) \to G_0$ *ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung* $\varphi_{e_0}\colon G_0 \to \varphi_{e_0}(G_0)$.

[*Beweis des Lemmas.* Zu (i): Sei $e_0 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})$. Seien $p \in G_0$ und H eine Umgebung von $e := \varphi_{e_0}(p)$ in E. Nach (77) existiert dann ein $\varphi \in \mathcal{F}$ derart, daß $e \in \varphi(G\varphi) \subset H$, also $p = \pi(e) \in G\varphi$ und $\varphi(p) = e$. Wegen Vor. (4) existiert $G \in \mathfrak{G}$ mit $p \in G \subset G_0 \cap G\varphi$. Dann gilt nach Vor. (1) $\varphi_{e_0}|_G \in \mathcal{F}$, $G\varphi_{e_0}|_G = G$, $\varphi_{e_0}|_G(p) = e$ und auch $\varphi|_G \in \mathcal{F}$, $G\varphi|_G = G$, $\varphi|_G(p) = e$, also nach Vor. (3) $\varphi_{e_0}|_G = \varphi|_G$. Daher ist $G \in \mathcal{U}^\circ(p, G)$ mit $\varphi_{e_0}(G) = \varphi(G) \subset \varphi(G\varphi) \subset H$. Damit ist die Stetigkeit von φ_{e_0} gezeigt.

Die Offenheit von $\varphi_{e_0}(G_0) = \varphi_{e_0}(G\varphi_{e_0})$ ist klar nach (77), und der Zusammenhang von $\varphi_{e_0}(G_0)$ folgt aus dem Zusammenhang von G_0 und der Stetigkeit von φ_{e_0}.

Zu (ii): „$\supset$“ ist klar wegen $(\pi \circ \varphi_{e_0})(G_0) = G_0$.

„$\subset$“ Sei $e \in \overline{\pi}^1(G_0)$, also $p := \pi(e) \in G_0$. Wegen $G_0 \in \mathfrak{G}$ existiert nach Vor. (4) ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $G\varphi = G_0$ und $\varphi(p) = e$. Dann gilt für $e_0 := \varphi(p_0)$: $e_0 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})$, also $\varphi, \varphi_{e_0} \in \mathcal{F}$, $G\varphi = G\varphi_{e_0} = G$ und $\varphi(p_0) = \varphi_{e_0}(p_0) = e_0$. Daher gilt nach Vor. (3) $\varphi = \varphi_{e_0}$ und folglich $e = \varphi(p) = \varphi_{e_0}(p) \in \varphi_{e_0}(G_0)$.

Zur Disjunktheit: Es seien $e_0, e_1 \in \overline{\pi}^1(\{p_0\})$ beliebig und es existiere ein Punkt $e \in \varphi_{e_0}(G_0) \cap \varphi_{e_1}(G_0)$. Dann folgt für $p := \pi(e) \in M$: $e = \varphi_{e_0}(p) = \varphi_{e_1}(p)$, also wegen $\varphi_{e_0}, \varphi_{e_1} \in \mathcal{F}$, $G\varphi_{e_0} = G\varphi_{e_1} = G_0$ nach Vor. (3) $\varphi_{e_0} = \varphi_{e_1}$, insbesondere $e_0 = \varphi_{e_0}(p_0) = \varphi_{e_1}(p_0) = e_1$. Damit ist die Disjunktheit der Vereinigung in (ii) bewiesen.

Die restliche Aussage in (ii) über die Zusammenhangskomponenten ist klar, da alle $\varphi_{e_0}(G_0)$ offen in E und nach (i) zusammenhängend sind.

Zu (iii): Wegen (78) und (i) sind sowohl $\pi|_{\varphi_{e_0}(G_0)}\colon \varphi_{e_0}(G_0) \to G_0$ als auch $\varphi_{e_0}\colon G_0 \to \varphi_{e_0}(G_0)$ stetig.

$\pi|_{\varphi_{e_0}(G_0)} \circ \varphi_{e_0} = \mathrm{id}_{G_0}$ ist klar. Zu zeigen bleibt $\varphi_{e_0} \circ \pi|_{\varphi_{e_0}(G_0)} = \mathrm{id}_{\varphi_{e_0}(G_0)}$. Sei also $e \in \varphi_{e_0}(G_0)$, $e = \varphi_{e_0}(p)$ mit $p \in G_0$. Dann folgt

$$(\varphi_{e_0} \circ \pi|_{\varphi_{e_0}(G_0)})(e) = (\varphi_{e_0} \circ \pi|_{\varphi_{e_0}(G_0)} \circ \varphi_{e_0})(p) \overset{(0)}{=} \varphi_{e_0}(p) = e,$$

womit auch (iii) vollständig nachgewiesen ist.]

Wir folgern mithilfe des Lemmas:

$$\pi\colon E \longrightarrow M \text{ ist eine Überlagerung.} \tag{79}$$

[Zu (79): $\pi\colon E \to M$ ist nach (78) stetig und nach Voraussetzung surjektiv. Sei nun $p_0 \in M$. Da $\mathfrak{G}$ eine Basis der Topologie von M ist, existiert $G_0 \in \mathfrak{G}$ mit $p_0 \in G$. Nach Lemma (ii), (iii) ist dann G_0 eine zusammenhängende Umgebung von $p_0 \in M$ derart, daß jede Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^1(G_0)$ durch π homöomorph auf G_0 abgebildet wird. Damit ist (79) gezeigt.]

Ferner gilt:

$$E \text{ ist lokal-wegzusammenhängend.} \tag{80}$$

[Zu (80): M ist nach Voraussetzung lokal-wegzusammenhängend, und aus dem Lemma folgt offenbar, daß $\pi\colon E \to M$ ein lokaler Homöomorphismus ist. Hieraus folgt offenbar (80).]

Nun existiert nach Monodromiesatz 2.15 (beachte (80), (79) und, daß M einfach-zusammenhängend und lokal-wegzusammenhängend ist) eine

$$\text{stetige Abbildung } \varphi\colon (M, p_0) \longrightarrow (E, e_0) \text{ mit } \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M. \tag{81}$$

$$\begin{tikzcd}
& (E, e_0) \arrow[d, "\pi"] \\
(M, p_0) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] & (M, p_0)
\end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen

$$\varphi \in \mathcal{F}. \tag{82}$$

[Zu (82): Nach Vor. (2) genügt es zu zeigen, daß $\varphi|_{G_0} \in \mathcal{F}$ für alle $G_0 \in \mathfrak{G}$. Sei also $G_0 \in \mathfrak{G}$. Aus (81) folgt $\varphi(G_0) \subset \pi^{-1}(G_0)$ und $\varphi(G_0)$ ist nach (81) mit G_0 zusammenhängend, also ist $\varphi(G_0)$ zusammenhängende Teilmenge von $\pi^{-1}(G_0)$. Nach Lemma (ii) existiert daher ein $\psi \in \mathcal{F}$ mit $G\psi = G_0$ und $\varphi(G_0) \subset \psi(G_0)$. Ist daher $p \in G_0$, so existiert $q \in G_0$ mit $\varphi(p) = \psi(q)$, also $p = \pi(\varphi(p)) = \pi(\psi(p)) = q$ und folglich $\varphi(p) = \psi(p)$. Damit ist gezeigt: $\varphi|_{G_0} = \psi$, also wegen $\psi \in \mathcal{F}$ auch $\varphi|_{G_0} \in \mathcal{F}$.]

Aus (81), (82) folgt $\varphi \in \mathcal{F}$, $G\varphi = M$ und $\varphi(p_0) = e_0$. Die Einzigkeit eines solchen φ folgt schließlich aus Vor. (3). □

Wir geben ein Beispiel einer Anwendung von 2.28: In der Analysis beweist man den folgenden Satz im Spezialfalle einer sternförmigen Menge G.

Hauptsatz 2.29 (Poincarésches Lemma für 1-Formen)**.**
Vor.: *Es seien $n \in \mathbb{N}_+$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet sowie $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ und ω eine $\mathcal{C}^k$-Differentialform ersten Grades auf G, d.h. es existieren $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{C}^k(G)$ mit $\omega = \sum_{i=1}^n F_i \,\mathrm{d}x_i$. Ferner gelte $\mathrm{d}\omega = 0$, d.h. $\forall_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}\ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$.*
Beh.: $\forall_{p_0\in G}\forall_{\alpha_0\in\mathbb{R}}\exists!_{\psi\in\mathcal{C}^{k+1}(G)}\ \underbrace{\mathrm{d}\psi = \omega}_{\Leftrightarrow \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = F_i} \wedge \psi(p_0) = \alpha_0.$

Beweis. Wir setzen $E := G \times \mathbb{R}$, $M := G$ und definieren $\pi := \pi_1\colon G \times \mathbb{R} \to G$ als die Projektion auf die erste Komponente. Des weiteren sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Abbildungen $\varphi\colon G\varphi \to G \times \mathbb{R}$ eines Teilgebietes $G\varphi$ von G derart, daß

$$\pi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_{G\varphi}\colon G\varphi \hookrightarrow G \ \wedge\ \pi_2 \circ \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(G\varphi) \ \wedge\ \mathrm{d}(\pi_2 \circ \varphi) = \omega|_{G\varphi},$$

wobei $\pi_2\colon G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die zweite Komponente bezeichne. $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller sternförmigen Teilgebiete von G.

Auf dieses „Lexikon“ wenden wir 2.28 an. Die Gültigkeit der dortigen Voraussetzungen zeigt man in der Analysis. Daher existiert zu jedem $p_0 \in G$ und jedem $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $G\varphi = G$ und $\varphi(p_0) = (p_0, \alpha_0)$. Dann erfüllt $\psi := \pi_2 \circ \varphi$ die Behauptung. (Die Eindeutigkeit ist klar nach Analysis.) □

3 Mannigfaltigkeiten

Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 3.1 ((Abzählbare) Basis)**.** Sei M ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathrm{Top}(M)$ heißt *Basis der Topologie von M* genau dann, wenn sich jede offene Menge von M als Vereinigung von zu $\mathfrak{B}$ gehörenden Menge darstellen läßt, d.h. genau

$$\forall_{U \in \mathrm{Top}(M)} \forall_{p \in U} \exists_{V_p \in \mathfrak{B}} V_p \subset U.$$

Falls eine höchstens abzählbare abzählbare derartige Teilmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathrm{Top}(M)$ existiert, so sagen wir: *M besitzt eine abzählbare Basis.*

Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}_+$ besitzt $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis, nämlich z.B.

$$\{U_r(p) \,|\, p \in \mathbb{Q}^n \wedge r \in \mathbb{Q}_+\}.$$

Definition 3.2 (Karte, Atlas, topologische Mannigfaltigkeit)**.** Seien M ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

(i) u heißt *n-dimensionale Karte für M* genau dann, wenn u: $Gu \to u(Gu)$ ein Homöomorphismus eines offenen Teilraumes Gu von M auf einen offenen Teilraum $u(Gu)$ von $\mathbb{R}^n$ ist.[10]

(ii) $\mathfrak{A}$ heißt *n-dimensionaler Atlas für M* genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ eine Menge von n-dimensionalen Karten für M mit $M = \bigcup_{u \in \mathfrak{A}} Gu$ ist.

(iii) M heißt *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* genau dann, wenn gilt:

1.) M ist hausdorffsch.

2.) M besitzt eine abzählbare Basis.

3.) Es existiert ein n-dimensionaler Atlas für M.

Beispiel 3.3.

a) $\mathbb{R}^n$ ist für $n \in \mathbb{N}$ n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (mit $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ als Atlas.)

b) S^n (mit Teilraumtopologie bzgl. $\mathbb{R}^{n+1}$) ist für $n \in \mathbb{N}$ eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

c) Die Teilräume Torus, Möbiusband, Zylinder und Kegel von $\mathbb{R}^3$ sind 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten.

d) Der topologische Teilraum 8 von $\mathbb{R}^2$ ist keine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

e) Der topologische Teilraum von $\mathbb{R}^3$, der entsteht, indem man zwei Kegel derart vereinigt, daß sie nur ihre Spitze als gemeinsamen Punkt haben, ist keine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

[10] Man definiert $\mathbb{R}^0 := \{0\}$.

f) 0-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten sind genau die höchstens abzählbaren Mengen mit diskreter Topologie.

Satz 3.4. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(i) *Für jede n-dimensionale Karte für M und jede offene Menge U von M ist $u|_{Gu \cap U}$ eine n-dimensionale Karte für M.*

(ii) *Jede offene Menge M ist als Teilraum von M eine eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.*

(iii) *Zu jedem $p \in M$ und jedem $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ existiert eine n-dimensionale Karte u von M mit $p \in Gu \subset U$, $u(p) = 0$ und $u(Gu) = \mathbb{R}^n$.*

(iv) *Die Zusammenhangskomponenten von M sind offen und wegzusammenhängend und stimmen mit den Wegzusammenhangskomponenten überein.*

(v) *(Invarianz der Dimension)*

Ist $M \neq \varnothing$, so existiert zu jedem $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ keine m-dimensionale Karte u für M mit $Gu \neq \varnothing$, insbesondere ist M keine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beweis. (i) ist trivial, (ii) sowie (iii) zeige der Leser als Übung und (iv) folgt aus 2.10. Der Beweis von (v) wird z.B. in der algebraischen Topologie geführt. □

Wir wiederholen die folgende Definition der Analysis.

Definition 3.5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Wir definieren für $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Teilmenge $\boxed{\mathcal{C}^r(U)}$ von $\mathbb{R}^U$ wie folgt:

1. Fall: $n = 0$. Dann gilt $U = \varnothing$ oder $U = \{0\}$, und wir setzen

$$\forall_{r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \, \mathcal{C}^r(U) := \mathbb{R}^U.$$

2. Fall: $n \in \mathbb{N}_+$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(U) &:= \{\varphi \,|\, \varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}, \\ \forall_{r \in \mathbb{N}_+} \mathcal{C}^r(U) &:= \{\varphi \,|\, \varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \ r\text{-mal stetig (partiell) differenzierbar}\}, \\ \mathcal{C}^\infty(U) &:= \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^r(U). \end{aligned}$$

(ii) Sind $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so definieren wir

$$\boxed{\mathcal{C}^r(U, \mathbb{R}^k)} := \{f = (f_1, \dots, f_k) \,|\, \forall_{i \in \{1,\dots,k\}} \, f_i \in \mathcal{C}^r(U)\}.$$

Definition 3.6 ($\mathcal{C}^r$-Atlas, $\mathcal{C}^r$-Struktur)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$, M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(i) Seien u, v zwei n-dimensionale Karten für M. Dann ist offenbar $v \circ u^{-1}$ ein Homöomorphismus des offenen Teilraumes $u(Gu \cap Gv)$ des $\mathbb{R}^n$ auf den offenen Teilraum $v(Gu \cap Gv)$ von $\mathbb{R}^n$. $v \circ u^{-1}$ heißt der *Kartenwechsel von u nach v.*

u und v heißen genau dann $\mathcal{C}^r$*-verträglich*, wenn $v \circ u^{-1}$ ein $\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismus ist, d.h. genau

$$v \circ u^{-1} \in \mathcal{C}^r(u(Gu \cap Gv), \mathbb{R}^n) \wedge u \circ v^{-1} \in \mathcal{C}^r(v(Gu \cap Gv), \mathbb{R}^n).$$

(ii) Ein n-dimensionaler Atlas $\mathfrak{A}$ für M heißt *n-dimensionaler $\mathcal{C}^r$-Atlas für M* genau dann, wenn je zwei Elemente von $\mathfrak{A}$ $\mathcal{C}^r$-verträglich sind.

(iii) Ein n-dimensionaler $\mathcal{C}^r$-Atlas für M heißt *maximal* oder eine *n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Struktur für M* genau dann, wenn für alle n-dimensionalen $\mathcal{C}^r$-Atlanten $\widetilde{\mathfrak{A}}$ für M aus $\widetilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ bereits $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ folgt, d.h. genau:

Für alle n-dimensionalen Karten u für M gilt:

$$(\forall_{v \in \mathfrak{A}}\, u, v\ \mathcal{C}^r\text{-verträglich}) \Longrightarrow u \in \mathfrak{A}.$$

(Denn beide Aussagen besagen, daß sich $\mathfrak{A}$ nicht durch Hinzunahme einer nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Karte zu einem größeren $\mathcal{C}^r$-Atlas erweitern läßt.)

Satz 3.7.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}$, M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner sei $\mathfrak{A}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{C}^r$-Atlas für M.*
Beh.: *Es existiert genau eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Struktur $\mathfrak{A}_{\max}$ für M derart, daß $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\max}$, nämlich*

$$\mathfrak{A}_{\max} := \{u \text{ } n\text{-dimensionale Karte für } M \mid \forall_{v \in \mathfrak{A}}\, u, v\ \mathcal{C}^r\text{-verträglich}\}. \tag{83}$$

$\mathfrak{A}_{\max}$ *heißt* die von $\mathfrak{A}$ erzeugte $\mathcal{C}^r$-Struktur für M.

Beweis. Wir definieren $\mathfrak{A}_{\max}$ durch (83), also ist $\mathfrak{A}_{\max}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{C}^r$-Atlas für M mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\max}$. Wir behaupten:

$$\mathfrak{A}_{\max} \text{ ist } \mathcal{C}^r\text{-Atlas.} \tag{84}$$

[Zum Beweis von (84) seien $u, \tilde{u} \in \mathfrak{A}_{\max}$. Zu zeigen ist

$$\tilde{u} \circ u^{-1} \in \mathcal{C}^r(u(Gu \cap G\tilde{u}), \mathbb{R}^n).$$

Nach Analysis ist dies gleichbedeutend mit

$$\forall_{q \in u(Gu \cap G\tilde{u})} \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(q, u(Gu \cap G\tilde{u}))}\, \tilde{u} \circ u^{-1}|_U \in \mathcal{C}^r(U, \mathbb{R}^n).$$

Beweis hiervon: Sei $q \in u(Gu \cap G\tilde{u})$. Da $\mathfrak{A}$ ein $\mathcal{C}^r$-Atlas ist, existiert $v \in \mathfrak{A}$ mit $u^{-1}(q) \in Gv$, d.h. $q \in u(Gv)$. Dann folgt nach Definition von $\mathfrak{A}_{\max}$ mit $U := u(Gu \cap G\tilde{u} \cap Gv) \overset{u\,\text{inj.}}{=} u(Gu \cap G\tilde{u}) \cap u(Gu \cap Gv) \in \mathcal{U}^\circ(q, u(Gu \cap G\tilde{u}))$

$$\tilde{u} \circ u^{-1}|_U = \left(\tilde{u} \circ v^{-1}\right) \circ \left(v \circ u^{-1}\right)|_U \in \mathcal{C}^r(U, \mathbb{R}^n),$$

womit (84) bewiesen ist.]

Trivialerweise folgt aus der Definition von $\mathfrak{A}_{\max}$ und 3.6(ii) wegen (84) weiter:

$$\mathfrak{A}_{\max} \text{ ist maximaler } \mathcal{C}^r\text{-Atlas,} \tag{85}$$

also bleibt die Einzigkeit von $\mathfrak{A}_{\max}$ mit (85) und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\max}$ zu zeigen.

Habe also $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ebenfalls diese Eigenschaft. Zu zeigen ist $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{\max}$. Hierzu sei $u \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Dann folgt – da $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ein $\mathcal{C}^r$-Atlas ist –

$$\forall_{v \in \mathfrak{A} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}}\, u, v \ \mathcal{C}^r\text{-verträglich,}$$

also nach Definition von $\mathfrak{A}_{\max}$: $u \in \mathfrak{A}_{\max}$. Damit ist gezeigt, daß $\widetilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}_{\max}$, und hieraus folgt wegen der Maximalität von $\widetilde{\mathfrak{A}}$ sofort $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{\max}$. □

Definition 3.8 ($\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(i) Eine *n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit* M ist ein Paar $(M_{\text{top}}, \mathfrak{A}_M)$, bestehend aus einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M_{top} und einer n-dimensionalen $\mathcal{C}^r$-Struktur $\mathfrak{A}_M$ für M_{top}.

(ii) Sei $M = (M_{\text{top}}, \mathfrak{A}_M)$ eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit. Dann heißt M_{top} *die M zugrundeliegende topologische Mannigfaltigkeit* und $\mathfrak{A}_M$ *die $\mathcal{C}^r$-Struktur von M*. Die zu $\mathfrak{A}_M$ gehörenden Karten heißen die *$\mathcal{C}^r$-Karten von M*. Jeder aus $\mathcal{C}^r$-Karten von M bestehende Atlas für M_{top} heißt ein *$\mathcal{C}^r$-Atlas von M*.

I.a. schreiben wir einfach M für M_{top}.

Definition 3.9 ($\mathcal{C}^r$-Abbildung)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit.

(i) $f\colon M \to N$ heißt eine *$\mathcal{C}^r$-Abbildung* oder *r-mal stetig differenzierbar* genau dann, wenn $f\colon M \to N$ stetig ist und

$$\forall_{u \in \mathfrak{A}_M} \forall_{v \in \mathfrak{A}_N}\, v \circ f \circ u \in \mathcal{C}^r(u(Gu \cap \overline{f}^{1}(Gv)), \mathbb{R}^n).$$

(Beachte, daß $\overline{f}^{1}(Gv)$ offen ist, da f stetig ist.)

(ii) $f\colon M \to N$ heißt ein *$\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismus* genau dann, wenn $f\colon M \to N$ bijektiv ist und sowohl $f\colon M \to N$ als auch $f^{-1}\colon N \to M$ $\mathcal{C}^r$-Abbildungen sind.

M und N heißen $\mathcal{C}^r$-diffeomorph, falls ein $\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismus $M \to N$ existiert.

Beispiel 3.10. Seien $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, also ist V n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit der kanonischen Topologie. Dann ist

$$\mathfrak{A} := \{u\colon V \to \mathbb{R}^n \,|\, u \ \mathbb{R}\text{-Vektorraum-Isomorphismus}\}$$

offenbar ein n-dimensionaler $\mathcal{C}^r$-Atlas für V, erzeugt also nach 3.7 eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Struktur für V. Die so definierte $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit V heißt *die kanonische $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit V*.

b) Seien M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen in M, also ist U, betrachtet als topologischer Teilraum von M, nach 3.4 selbst eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\mathfrak{A}_U := \{u \in \mathfrak{A}_M \mid Gu \subset U\}$$

eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Struktur für U. Wir nennen die $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit $(U, \mathfrak{A}_U)$ in Zukunft *die offene $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit U von M*.

c) S^n ist als Teilraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ ein hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1}$ als $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $N := (0,1)$ heißt *Nordpol*, $S := (0,-1)$ heißt *Südpol*.

Wir definieren $P_N \colon S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $P_S \colon S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$, die sogenannte *steographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol aus*, als die eindeutig bestimmte Abbildung mit

$$\forall_{a \in S^n \setminus \{N\}} \, (P_N(a), 0) = (\text{Gerade des } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch } N \text{ und } a) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

bzw.

$$\forall_{a \in S^n \setminus \{S\}} \, (P_S(a), 0) = (\text{Gerade des } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch } S \text{ und } a) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Zeige als Übung 9.3, daß P_N und P_S n-dimensionale Karten für S^n sind. Für die Kartenwechsel gilt

$$P_N \circ {P_S}^{-1} = P_S \circ {P_N}^{-1} = R,$$

wobei $R \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die *Abbildung durch reziproke Radien* sei, welche gegeben ist durch

$$R(b) = \frac{b}{\|b\|}.$$

Hier bezeichnet $\| \dots \|$ die euklidische Norm.

Es gilt $R \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n)$, also ist $\{P_N, P_S\}$ ein n-dimensionaler $\mathcal{C}^r$-Atlas für S^n und erzeugt daher nach 3.7 eine eindeutig bestimmte $\mathcal{C}^r$-Struktur für S^n.

Lemma 3.11 (Differenzierbarkeitstest mit wenigen Karten).
Vor.: *Seien $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ sowie M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit.*
Beh.: *$f \colon M \to N$ ist genau dann r-mal stetig differenzierbar, wenn f stetig ist und zu jedem $p \in M$ Karten $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$ sowie $v \in \mathfrak{A}_N$ mit $f(p) \in Gv$ existieren derart, daß*

$$v \circ f \circ u^{-1} \colon u(Gu \cap \overline{f}^{1}(Gv)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

r-mal stetig differenzierbar ist.

Beweisskizze. „$\Rightarrow$" ist trivial.

Zum Nachweis von „$\Leftarrow$" seien $\tilde{u} \in \mathfrak{A}_M$ und $\tilde{v} \in \mathfrak{A}_N$. Zu zeigen ist, daß $\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1}$ in jedem $q \in \tilde{u}(G\tilde{u} \cap \overline{f}^1(G\tilde{v}))$ lokal r-mal stetig differenzierbar ist. Wähle zu $p := \tilde{u}^{-1}(q)$ Karten $u \in \mathfrak{A}_M$ und $v \in \mathfrak{A}_N$ gemäß der rechten Seite der Behauptung. Dann gilt $U := \tilde{u}(Gu \cap G\tilde{u} \cap \overline{f}^1(Gv) \cap \overline{f}^1(G\tilde{v})) \in \mathcal{U}^\circ(q, \tilde{u}(G\tilde{u} \cap \overline{f}^1(G\tilde{v})))$, und

$$(\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1})|_U = (\tilde{v} \circ v^{-1}) \circ (v \circ f \circ u^{-1}) \circ (u \circ \tilde{u}^{-1})|_U$$

ist r-mal stetig differenzierbar. □

Satz 3.12 (Eigenschaften von $\mathcal{C}^r$-Abbildungen)**.** *Seien $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und L, M, N $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeiten der Dimension $l, m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) *$f\colon M \longrightarrow N$ konstant $\Longrightarrow$ $f\colon M \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung.*

(ii) *Die $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeiten mit ihren $\mathcal{C}^r$-Abbildungen bilden eine Kategorie, d.h.*

a) *$g\colon L \longrightarrow M$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung und $f\colon M \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung $\Longrightarrow$ $f \circ g\colon L \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung,*

b) $\mathrm{id}_M\colon M \longrightarrow M$ *$\mathcal{C}^r$-Abbildung.*

Zusatz. *Für jede offene $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit $\widetilde{M}$ von M gilt:*
$g\colon L \longrightarrow M$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung und $f\colon \widetilde{M} \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung
$\Longrightarrow$ $f \circ g\colon \overline{g}^1(\widetilde{M}) \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung

(iii) *(Beschränkungseigenschaften)*

a) *$f\colon M \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung $\Longrightarrow$ $\forall_{U \in \mathrm{Top}(U)}\, f|_U\colon U \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung,*

b) *$f\colon M \longrightarrow N$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung $\Longrightarrow$ $\forall_{\substack{V \in \mathrm{Top}(N)\\ f(M) \subset V}}\, f|_U\colon U \longrightarrow V$ $\mathcal{C}^r$-Abbildung.*

(iv) *(Lokalitätseigenschaft)*
Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung derart, daß

$$\forall_{p \in M} \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)}\, f|_U\colon U \longrightarrow N \ \mathcal{C}^r\text{-Abbildung},$$

so ist $f\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung.

(v) *Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, so ist eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ genau dann r-mal stetig differenzierbar als Abbildung der offenen $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit U von $\mathbb{R}^m$ in die $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$, wenn sie r-mal stetig differenzierbar im Sinne der Analysis ist.*

(vi) *Es gilt genau dann $u \in \mathfrak{A}_M$, wenn $u\colon Gu \to u(Gu)$ ein $\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismus der offenen $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit Gu von M auf die offene $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit $u(Gu)$ von $\mathbb{R}^m$ ist.*

Beweis als Übung. □

Generalvoraussetzung. In Zukunft bedeutet Differenzierbarkeit stets $\mathcal{C}^\infty$-Differenzierbarkeit, falls nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist.

Tangentialräume

Sind V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und ist $f\colon V \to W$ eine differenzierbare Abbildung, so ist nach Analysis für jedes $p \in V$ das Differential

$$\mathrm{d}_p f\colon V \longrightarrow W$$

definiert.

Unser nächstes Ziel ist es, für differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und differenzierbare Abbildungen $f\colon M \to N$ etwas Entsprechendes zu definieren:

$$T_p f\colon T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N,$$

wobei $T_p M$, der *Tangentialraum von M an p*, ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $T_{f(p)}N$, der *Tangentialraum von N an $f(p)$*, ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und zwar so, daß im Spezialfalle $M = V$, $N = W$ $T_p f$ und $\mathrm{d}_p f$ in kanonischer Weise miteinander identifiziert werden können.

Zunächst wollen wir den *Tangentialraum $T_p M$ von M an p* für eine beliebige Mannigfaltigkeit M und $p \in M$ definieren. Die Definition wird so erfolgen, daß für alle $p, q \in M$ mit $p \neq q$ gilt $T_p M \cap T_q M \neq \varnothing$. (Die in der Analysis definierten Tangentialräume an differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^m$ haben diese Eigenschaft nicht!)

Als Vorbereitung führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

Definition 3.13. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(i) Ist $G \subset M$ offen, so setzen wir

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty_M(G)} := \{\varphi\colon G \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \text{ differenzierbar}\}.$$

(ii) Ist $p \in M$, so setzen wir

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty_M(p)} := \bigcup_{G \in \mathcal{U}^\circ(p,M)} \mathcal{C}^\infty_M(G).$$

(iii) Zusätzlich setzen wir

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty_M} := \bigcup_{G \in \mathrm{Top}(M)} \mathcal{C}^\infty_M(G).$$

Bemerkung 3.14.

a) Seien $n \in \mathbb{N}_+$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c\colon I \to V$ ein differenzierbar Weg[11]. Ferner sei $t_0 \in I$ und $p := c(t_0) \in V$. Dann ist $c'(t_0)$, der *Geschwindigkeitsvektor von c zur Zeit t_0 im Sinne der Analysis*, definiert durch

$$c'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} \in V. \tag{86}$$

[11] d.h. per definitionem, daß sich c zu einem auf einem I umfassenden offenen Intervall definierten differenzierbaren Weg fortsetzen läßt

Diesem Element von V entspricht umkehrbar eindeutig die folgende Funktion

$$\boxed{\dot{c}(t_0)\colon \mathcal{C}^\infty_V(p_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \longmapsto \dot{c}(t_0)\cdot\varphi := (\varphi\circ c)'(t_0) = \mathrm{d}_{p_0}\varphi(c'(t_0)).} \tag{87}$$

Es ist klar, daß $\dot{c}(t_0)$ durch $c'(t_0)$ eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt gewinnt man $c'(t_0)$ aus $\dot{c}(t_0)$ wie folgt:

Sei $\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V und $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ die dazu duale Basis von $V^*\subset\mathcal{C}^\infty_V(p_0)$. Dann gilt

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^n \underbrace{v_i^*(c'(t_0))}_{\overset{v_i^*\text{ lin.}}{=} \mathrm{d}_{p_0}v_i^*(c'(t_0))} \quad v_i = \sum_{i=1}^n (\dot{c}(t_0)\cdot v_i^*)\, v_i.$$

b) Seien nun $n\in\mathbb{N}$, M allgemeiner eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $c\colon I\to M$ ein differenzierbar Weg[12]. Ferner sei erneut $t_0\in I$ und $p:=c(t_0)\in M$. Dann läßt sich kein Geschwindigkeitsvektor wie in (86) definieren, wohl aber eine Funktion wie in (87). Wir definieren daher den *Geschwindigkeitsvektor von c zur Zeit t_0* als

$$\boxed{\dot{c}(t_0)\colon \mathcal{C}^\infty_M(p_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \longmapsto \dot{c}(t_0)\cdot\varphi := (\varphi\circ c)'(t_0).} \tag{88}$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß $\dot{c}(t_0)$ die folgenden *Derivationseigenschaften* hat

(Der 1) $\forall_{\varphi,\psi\in\mathcal{C}^\infty_M(p_0)}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\, \dot{c}(t_0)\cdot(\alpha\,\varphi+\beta\,\psi) = \alpha\,(\dot{c}(t_0)\cdot\varphi)+\beta\,(\dot{c}(t_0)\cdot\psi)$,

(Der 2) $\forall_{\varphi,\psi\in\mathcal{C}^\infty_M(p_0)}\, \dot{c}(t_0)\cdot(\varphi\,\psi) = (\dot{c}(t_0)\cdot\varphi)\,\psi(p_0)+\varphi(p_0)\,(\dot{c}(t_0)\cdot\psi)$.

Definition 3.15 (Tangentenvektor, Tangentialraum)**.** Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p_0\in M$.

(i) Ein *Tangentenvektor von M in p* oder eine *Derivation von $\mathcal{C}^\infty_M(p_0)$* ist per definitionem eine Funktion

$$v\colon : \mathcal{C}^\infty_M(p) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \longmapsto v\cdot\varphi$$

mit den folgenden Eigenschaften

(Der 1) $\forall_{\varphi,\psi\in\mathcal{C}^\infty_M(p)}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\, v\cdot(\alpha\,\varphi+\beta\,\psi) = \alpha\,(v\cdot\varphi)+\beta\,(v\cdot\psi)$,

(Der 2) $\forall_{\varphi,\psi\in\mathcal{C}^\infty_M(p)}\, v\cdot(\varphi\,\psi) = (v\cdot\varphi)\,\psi(p)+\varphi(p)\,(v\cdot\psi)$.

(ii) Wir setzen $\boxed{T_pM}$ als die Menge aller Tangentenvektoren von M in p und nennen T_pM den *Tangentialraum von M in p*.

[12] d.h. wieder per definitionem, daß sich c zu einem auf einem I umfassenden offenen Intervall definierten differenzierbaren Weg fortsetzen läßt

T_pM ist als Menge $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen in kanonischer Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, also gilt

$$\forall_{v,w\in T_pM}\forall_{\varphi\in\mathcal{C}_M^\infty(p)}\,(v+w)\cdot\varphi = v\cdot\varphi + w\cdot\varphi,$$
$$\forall_{v\in T_pM}\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\,(\alpha\, v)\cdot\varphi = \alpha\,(v\cdot\varphi).$$

Wir haben in 3.14 gesehen, daß für jeden differenzierbaren Weg $c\colon I\to M$ und jedes $t\in I$, $p := c(t)$ gilt $\dot c(t)\in T_pM$. Wir werden später sehen, daß auch alle Tangentenvektoren $v\in T_pM$ Geschwindigkeitsvektoren sind, d.h. $v = \dot c(t)$ für geeignete c, t.

Definition 3.16.

(i) Seien $n\in\mathbb{N}_+$, M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit sowie $p\in M$ und $u\in\mathfrak{A}_M$ mit $p\in Gu$. Wir definieren dann für jedes $i\in\{1,\dots,n\}$

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p : \mathcal{C}_M^\infty(p)\longrightarrow\mathbb{R}}\quad\text{durch}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p\cdot\varphi} := \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(p)} \quad &:= \quad \partial_i\left(\varphi\circ u^{-1}\right)(u(p)) \\ &= \quad \left(t\longmapsto(\varphi\circ u^{-1})(u(p)+t\,e_i)\right)'(0) \qquad (89)\\ &= \quad (\varphi\circ c)'(0) \overset{(88)}{=} \dot c(0)\cdot\varphi, \\ &\quad\;\; \text{wobei } c(t) := u^{-1}(u(p)+t\,e_i),\end{aligned}$$

$$\text{es gilt also}\quad \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = \dot c(0).$$

(Hierbei bezeichnet ∂_i die i-te partielle Ableitung und e_i den i-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.)

Aus (89) und 3.14 folgt

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p\in T_pM. \qquad (90)$$

Ferner gilt

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\frac{\partial u_j}{\partial u_i}(p) = \delta_{ij}, \qquad (91)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p,\dots,\left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p \text{ sind } \mathbb{R}\text{-linear unabhängig in } T_pM. \qquad (92)$$

[(91) gilt wegen

$$\frac{\partial u_j}{\partial u_i}(p) \overset{(89)}{=} \Big(t\longmapsto \underbrace{(\overbrace{u_j}^{=x_j\circ u}\circ u^{-1})(u(p)+t\,e_i)}_{=u_j(p)+t\,\delta_{ij}}\Big)'(0) = \delta_{ij},$$

und da für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ aus

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = 0_{T_pM}$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \cdot u_j = 0$$

folgt, ergibt (91), daß $\alpha_j = 0$, also gilt auch (92).]

(ii) Wähle in (i) speziell $M = \mathbb{R}^n$ und $u := x := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dann ist nach (89) für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_p\mathbb{R}^n \tag{93}$$

charakterisiert durch

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n}(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) = \partial_i \varphi(p),$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_p\mathbb{R}^n \text{ ist also } i\text{-te partielle Ableitung in } p \text{ i. S. d. Analysis.} \tag{94}$$

Ist zusätzlich $n = 1$, so schreiben wir einfach $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_p}$ für $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p$, also

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_p \in T_p\mathbb{R} \text{ ist die übliche Ableitung in } p \text{ i. S. d. Analysis.} \tag{95}$$

Lemma 3.17. *Es seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Seien ferner $G \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_M(G)$. Dann gilt:*

(i) $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ *konstant* $\Longrightarrow v \cdot \varphi = 0$.

(ii) $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M) \Longrightarrow v \cdot \underbrace{\varphi|_U}_{=\varphi\,1_U\colon G\cap U \to \mathbb{R}} = v \cdot \varphi$.

Beweis. Zunächst gilt

$$\forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)}\, v \cdot 1_U = 0. \tag{96}$$

[Aus

$$\begin{aligned} v \cdot 1_U &= v \cdot (1_U\, 1_U) \overset{\text{(Der 2)}}{=} (v \cdot 1_U)\, 1_U(p) + 1_U(p)\, (v \cdot 1_U) \\ &= 2\,(v \cdot 1_U) \end{aligned}$$

folgt (96).]

Zu (i): Ist φ konstant vom Wert $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt

$$v \cdot \varphi = v \cdot (\alpha\, 1_G) \overset{\text{(Der 1)}}{=} \alpha\, (v \cdot 1_G) \overset{(96)}{=} 0.$$

Zu (ii): $v \cdot (\varphi\, 1_U) \overset{\text{(Der 1)}}{=} (v \cdot \varphi)\, 1_U(p) + \varphi(p)\, (v \cdot 1_U) \overset{(96)}{=} v \cdot \varphi.$ □

Bemerkung 3.18. Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und U eine offene differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M, so identifizieren wir für alle $p \in U$ die Tangentialräume T_pU und T_pM miteinander, d.h. wir fassen den kanonischen $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} T_pU & \longrightarrow & T_pM \\ v & \longmapsto & \mathcal{C}^\infty_M(p) \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto v \cdot \varphi|_U \end{array}$$

mit Umkehrabbildung

$$\begin{array}{rcl} T_pM & \longrightarrow & T_pU \\ w & \longmapsto & w|_{\mathcal{C}^\infty_U(p)} \end{array}$$

als Identität auf.

Satz 3.19.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}$, M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$.*
Beh.: *T_pM ist in kanonischer Weise ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Genauer ist für $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$*

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p \right\}$$

eine Basis von T_pM über $\mathbb{R}$, die sogenannte Gaußsche Basis von T_pM bzgl. u, *und es gilt:*

$$\forall_{v \in T_pM}\, v = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p. \tag{97}$$

Beweis. Sei $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$. Nach (92) genügt es zu zeigen, daß (97) gilt. Sei also $v \in T_pM$ und seien $G \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ sowie $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_M(G)$. Zu zeigen ist

$$v \cdot \varphi = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \cdot \varphi. \tag{98}$$

Wir werden beweisen, daß

$$\exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p, Gu \cap G)} \exists_{\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}^\infty_M(U)} \quad \begin{array}{l} \varphi|_U = \varphi(p)\, 1_U + \sum_{i=1}^n (u_i - u_i(p)\, 1_U)\, \varphi_i \\ \text{und } \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} \varphi_i(p) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \cdot \varphi. \end{array} \tag{99}$$

Die Taylor-Entwicklung von $\varphi \circ u^{-1}$ in $u(p)$ besagt übrigens für Punkte q in einer Umgebung von p

$$\begin{aligned} \varphi(q) &= \left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(q)) \\ &= \left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(p)) + \mathrm{d}_{u(p)}\left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(q) - u(p)) + \ldots + \text{Restglied} \\ &= \left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(p)) + \mathrm{d}_{u(p)}\left(\varphi \circ u^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^n (u_i(q) - u_i(p))\, e_i\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \ldots + \text{Restglied}\\
&= \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n}(u_i(q) - u_i(p))\partial_i\left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(p)) + \ldots + \text{Restglied}\\
&\overset{3.16}{=} \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n}(u_i(q) - u_i(p))\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \cdot \varphi + \ldots + \text{Restglied}.
\end{aligned}$$

Aus (99) ergibt sich

$$\begin{aligned}
v\cdot\varphi &\overset{3.17(ii)}{=} v\cdot\varphi|_U\\
&\overset{(\text{Der }1),(\text{Der }2)}{=} v\cdot(\varphi(p)\,1_U) + \sum_{i=1}^{n}\Big(\,(v\cdot u_i - v\cdot(u_i(p)\,1|_U))\;\varphi_i(p)\\
&\qquad + (u_i(p) - u_i(p))\,(v\cdot\varphi_i)\Big)\\
&\overset{3.17(i)}{=} \sum_{i=1}^{n}(v\cdot u_i)\,\varphi_i(p) = \sum_{i=1}^{n}(v\cdot u_i)\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p\cdot\varphi,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt (98).

Zu (99): Sei V eine offene Vollkugel um $u(p)$ in $\mathbb{R}^n$ mit $V \subset u(Gu \cap G)$ und sei $U := \overline{u}^1(V)$, also $U \in \mathcal{U}^\circ(p, Gu \cap G)$. Wir definieren für jedes $q \in U$ die differenzierbare Funktion $\psi_q\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi_q(t) := \left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(p) + t\,(u(q) - u(p))). \tag{100}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(q) - \varphi(p) &= \left(\varphi\circ u^{-1}\right)(u(q)) - \left(\varphi\circ u^{-1}\right)(u(p))\\
&\overset{(100)}{=} \psi_q(1) - \psi_q(0) = \int_0^1 {\psi_q}'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n}\partial_i\left(\varphi\circ u^{-1}\right)(u(p) + t\,(u(q) - u(p)))\,(u_i(q) - u_i(p))\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{101}$$

Wir definieren weiter für jedes $i \in \{1,\ldots,n\}$ $\tilde{\varphi}_i\colon V \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\varphi}_i(a) := \int_0^1 \underbrace{\partial_i\left(\varphi\circ u^{-1}\right)(u(p) + t\,(a - u(p)))}_{\text{differenzierbar in } (a,t)\in V\times[0,1]}\,\mathrm{d}t. \tag{102}$$

Nach dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit des Integrales von einem differenzierbaren Parameter im Integranden gilt $\tilde{\varphi}_i \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n}(V)$, also auch

$$\varphi_i := \tilde{\varphi}_i \circ u \in \mathcal{C}^\infty_M(U). \tag{103}$$

Nun gilt für alle $q \in U$ aus (101), (103) und (102)

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n}(u_i(q) - u_i(p))\int_0^1 \partial_i\left(\varphi\circ u^{-1}\right)(u(p) + t\,(u(q) - u(p)))\,\mathrm{d}t\\
&= \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n}(u_i(q) - u_i(p))\,\varphi_i(q)
\end{aligned}$$

sowie für $i \in \{1, \dots, n\}$ aus (103) und (102)

$$\begin{aligned}\varphi_i(p) &= \tilde{\varphi}_i(u(p)) = \int_0^1 \underbrace{\partial_i\left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(p))}_{\text{konstant}}\,\mathrm{d}t \\ &= \partial_i\left(\varphi \circ u^{-1}\right)(u(p)) \overset{3.16}{=} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \cdot \varphi,\end{aligned}$$

womit (99) bewiesen ist. □

Bemerkung 3.20. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$T_pM = \{\dot{c}(t) \,|\, c\colon I \longrightarrow M \text{ differenzierbarer Weg mit } t \in I \text{ und } c(t) = p\},$$

m. a. W.: Alle Tangentenvektoren sind Geschwindigkeitsvektoren.

[Beweis: „$\supset$“ haben wir bereits in 3.15 eingesehen.

Zu „$\subset$“: Sei $v \in T_pM$. Wähle $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$ und setze

$$a := (v \cdot u_1, \dots, v \cdot u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $n := \dim M$. Dann wird durch

$$c(t) := u^{-1}(u(p) + t\,a)$$

ein differenzierbarer Weg $c\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ definiert (wobei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ hinreichend klein) mit $c(0) = p$ und

$$\begin{aligned}\dot{c}(0) &\overset{(97)}{=} \sum_{i=1}^n (\dot{c}(0) \cdot u_i) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = \sum_{i=1}^n (u_i \circ c)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \\ &= \sum_{i=1}^n \left(t \mapsto (x_i \circ u \circ u^{-1})(u(p) + t\,a)\right)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p,\end{aligned}$$

beachte hierbei die Definition von a.]

Definition 3.21 (Tangentialabbildung)**.** Seien $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und $p \in M$. Wir definieren dann die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\boxed{T_pf\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N,}$$

die sogenannte *Tangentialabbildung von f in p*, durch

$$\forall_{v \in T_pM}\,\forall_{\varphi \in \mathcal{C}_N^\infty(f(p))}\ \boxed{T_pf(v) \cdot \varphi} := v \cdot (\varphi \circ f). \tag{104}$$

Zeige als Übung, daß $T_pf(v)$ tatsächlich die Derivationseigenschaften erfüllt, d.h. $T_pf(v) \in T_{f(p)}M$.

Wir schreiben im folgenden auch $\boxed{f_{*p}}$ anstelle von T_pf. f_{*p} wird auch *die von f in p induzierte Abbildung* genannt.

Beispiel.

a) Seien $f\colon M \to N$ wie oben und $c\colon I \to M$ ein differenzierbarer Weg in M. Dann ist $f \circ c\colon I \to N$ ein differenzierbarer Weg in N mit

$$\forall_{t\in I}\, f_{*p}\dot{c}(t) = \dot{\widehat{f\circ c}}(t). \tag{105}$$

Denn für alle $t \in I$ und alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_N(f(p))$ gilt

$$f_{*c(t)}\dot{c}(t) \overset{(104)}{=} \dot{c}(t)\cdot(\varphi\circ f) \overset{(88)}{=} (\varphi\circ f\circ c)'(t) = \dot{\widehat{f\circ c}}(t)\varphi.$$

b) Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $c\colon I \to M$ ein differenzierbarer Weg in M. Dann gilt

$$\forall_{t\in I}\, c_{*t}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_t\right) = \dot{c}(t). \tag{106}$$

Denn für alle $t \in I$ und alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_M(c(t))$ gilt

$$c_{*t}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_t\right)\cdot\varphi = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_t(\varphi\circ c) = (\varphi\circ c)'(t) = \dot{c}(t)\cdot\varphi.$$

Satz 3.22.
Vor.: *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung sowie $p \in M$. Ferner seien $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$ und $v \in \mathfrak{A}_N$ mit $f(p) \in Gv$.*
Beh.: *Die Matrix der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung*

$$f_{*p}\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

bzgl. der geordneten Basen $\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial u_m}\right|_p\right)$ und $\left(\left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_{f(p)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial v_n}\right|_{f(p)}\right)$ von T_pM und $T_{f(p)}N$ ist gleich der Funktionalmatrix

$$\left(\partial_j\left(v_i\circ f\circ u^{-1}\right)(u(p))\right)_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$$

von $v\circ f\circ u^{-1}$ in $u(p)$.

Beweis. Für $j \in \{1,\dots,m\}$ gilt

$$\begin{aligned}
f_{*p}\left.\frac{\partial}{\partial u_j}\right|_p &\overset{3.19}{=} \sum_{i=1}^n\left(\left(f_{*p}\left.\frac{\partial}{\partial u_j}\right|_p\right)\cdot v_i\right)\left.\frac{\partial}{\partial v_i}\right|_{f(p)}\\
&\overset{(97)}{=} \sum_{i=1}^n\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_j}\right|_p\cdot(v_i\circ f)\right)\left.\frac{\partial}{\partial v_i}\right|_{f(p)}\\
&\overset{(89)}{=} \sum_{i=1}^n\left(\partial_j\cdot\left(v_i\circ f\circ u^{-1}\right)(u(p))\right)\left.\frac{\partial}{\partial v_i}\right|_{f(p)}.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.23 (Eigenschaften der Tangentialabbildung). *Seien M, N, Q differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt*

(i) $f\colon M \longrightarrow N$ *konstant* $\Longrightarrow \forall_{p\in M}\, f_{*p} = 0$,

(ii) $\forall_{p\in M}\, (g\circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$,

(iii) $\forall_{p\in M}\, (\mathrm{id}_M)_{*p} = \mathrm{id}_{T_pM}$,

(iv) $f\colon M \longrightarrow N$ *Diffeomorphismus*
$\Longrightarrow \forall_{p\in M}\, f_{*p}\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ $\mathbb{R}$*-Vektorraum-Isomorphismus mit*

$$(f_{*p})^{-1} = (f^{-1})_{*f(p)}.$$

(v) Seien $u \in \mathcal{A}_M$ *und* $p \in Gu \subset M$. *Dann gilt:*

$$\forall_{i\in\{1,\dots,\dim M\}}\ \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = (u^{-1})_{*u(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{u(p)},$$

d.h. $u_{*p} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{u(p)}$.

Beweis als Übung 11.1. □

Satz 3.24.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p \in V$.*
Beh.: $\boxed{I_p\colon V \to T_pV,}$ *definiert durch*

$$I_p(a) := \dot{c_a}(0), \ \text{wobei } c_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow V,\ t \longmapsto p + t\,a,$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus.

$I_p(a)$ *heißt* Richtungsableitung im Punkte p in Richtung a. *(Bechte, daß für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_V(p)$ gilt $I_p(a) = (t \mapsto \varphi(p + t\,a))'(0) = \mathrm{d}_p\varphi(a)$.)*

Die Unkehrabbildung $I_p{}^{-1}\colon T_pV \to V$ ist gegeben durch

$$\boxed{\vec{v}} := I_p{}^{-1}(v) = c'(t_0), \quad \text{wobei } c\colon I \longrightarrow V \text{ beliebiger differenzierbarer Weg mit } t_0 \in I, c(t_0) = p \text{ und } \dot{c}(t_0) = v.$$

Beweis. Sei $u\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, also nach 3.10 a) $u \in \mathfrak{A}_V$.

1.) Für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} I_p(a) &= \dot{c_a}(0) = \sum_{i=1}^n (\dot{c_a}(0)\cdot u_i) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \\ &= \sum_{i=1}^n (t \mapsto u_i(p + t\,a))'(0) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \\ &\overset{u_i \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n (t \mapsto u_i(p) + t\,u_i(a))'(0) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \\ &= \sum_{i=1}^n u_i(a) \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p, \end{aligned} \tag{107}$$

also insbesondere

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\, I_p(a)\cdot u_i = u_i(a). \tag{108}$$

Wegen der $\mathbb{R}$-Linearität der u_i und (107) ist I_p $\mathbb{R}$-linear. Ferner ist I_p injektiv, da aus $I_p(a) = 0$ nach (108) $u(a) = 0$ und somit $a = 0$ (da u injektiv) folgt. Wegen $\dim V = \dim T_pV$ ist daher

$$I_p\colon V \longrightarrow T_pV \text{ ein } \mathbb{R}\text{-Vektorraum-Isomorphismus.} \tag{109}$$

2.) Zur Wohldefiniertheit von $h\colon T_pV \to V$, $v \mapsto \vec{v}$: Sei $c\colon I \to V$ ein differenzierbarer Weg mit $t_0 \in I$ und $c(t_0) = p$. Dann folgt für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\dot{c}(t_0)\cdot u_i = (u_i\circ c)'(0) = \mathrm{d}_{c(t_0)}u_i(c'(t_0)) \overset{u_i \text{ linear}}{=} u_i(c'(t_0)),$$

also

$$c'(t_0) = u^{-1}(\dot{c}(t_0)\cdot u_1,\dots,\dot{c}(t_0)\cdot u_n),$$

und die rechte Seite hängt nur von $\dot{c}(t_0) \in T_pV$ ab.[13] Hieraus folgt die Wohldefiniertheit von h und

$$\forall_{v\in T_pV}\, \vec{v} = h(v) = u^{-1}(v\cdot u_1,\dots,v\cdot u_n). \tag{110}$$

3.) Schließlich gilt wegen

$$\forall_{a\in V}\, h(I_p(a)) \overset{(110)}{=} u^{-1}(I_p(a)\cdot u_1,\dots,I_p(a)\cdot u_n) \overset{(108)}{=} u^{-1}(u(a)) = a$$

$h\circ I_p = \mathrm{id}_V$, also auch nach (109) $h = I_p^{-1}$. □

Satz 3.25.
Vor.: *Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $G \subset V$ offen, $f\colon G \to W$ differenzierbar und $p \in G$.*
Beh.: $\forall_{v\in T_pG=T_pV}\, \overrightarrow{f_{*p}v} = \mathrm{d}_pf(\vec{v})$.

Beweis. Seien $v \in T_pM$ und $c\colon I \to V$ ein differenzierbarer Weg in V mit $t_0 \in I$, $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = v$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f_{*p}v} &= \overrightarrow{f_{*p}\dot{c}(t_0)} \overset{(105)}{=} \overrightarrow{\dot{\widehat{f\circ c}}(t_0)} \overset{3.24}{=} (f\circ c)'(t_0)\\ &= \mathrm{d}_pf(c'(t_0)) \overset{3.24}{=} \mathrm{d}_pf(\overrightarrow{\dot{c}(t_0)}) = \mathrm{d}_pf(\vec{v}).\end{aligned}$$

□

Mit 3.24 und 3.25 ist das zu Beginn dieses Abschnittes formulierte Ziel erreicht.

Hauptsatz 3.26 (Umkehrsatz)**.**
Vor.: *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in M$ derart, daß $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus ist.*
Beh.: *Es existiert eine Umgebung U von $p \in M$ derart, daß $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.*

[13] A priori hängt die rechte Seite auch von u ab. Da aber die linke Seite nicht von u abhängt, gilt dies auch für die rechte Seite.

Beweis als Übung. □

Bemerkung 3.27. Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $G \subset M$ offen, $p \in G$ und $v \in T_pG = T_pV$. Dann gilt:

(i) $\forall_{\varphi \in \mathcal{C}^\infty_M(G)}\ \mathrm{d}_p\varphi(\vec{v}) \overset{3.25}{=} \overrightarrow{\varphi_{*p}v} = v \cdot \varphi =: \boxed{d_p\varphi(v)}$, also ist $\mathrm{d}_p\varphi\colon T_pM \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, das sogenannte *Differential von φ in p.*

Denn seien $c\colon I \to V$ ein differenzierbarer Weg in G und $t_0 \in I$ mit $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = v$, so folgt

$$\overrightarrow{\varphi_{*p}v} = \overrightarrow{f_{*p}\dot{c}(t_0)} \overset{(105)}{=} \overrightarrow{\dot{\widehat{f \circ c}}(t_0)} \overset{3.24}{=} (f \circ c)'(t_0) = \dot{c}(t_0) \cdot \varphi = v \cdot \varphi.$$

(ii) Allgemeiner gilt für alle $k \in \mathbb{N}_+$ und alle differenzierbaren Abbildungen $h = (h_1, \ldots, h_k)\colon G \to \mathbb{R}^k$

$$\overrightarrow{h_{*p}v} = (v \cdot h_1, \ldots, v \cdot h_k) =: \boxed{v \cdot h.}$$

Denn sind c, t_0 wie oben, so gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_{*p}v} &= \ldots = (h \circ c)'(t_0) = ((h_1 \circ c)'(t_0), \ldots, (h_k \circ c)'(t_0)) \\ &= \ldots = (v \cdot h_1, \ldots, v \cdot h_k).\end{aligned}$$

c) Auch im Falle eines beliebigen Vektorraumes W mit $\dim W \in \mathbb{N}_+$ definieren wir für alle differenzierbaren Abbildungen $h\colon G \to W$

$$\overrightarrow{h_{*p}v} =: \boxed{v \cdot h.}$$

Hauptsatz 3.28.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

$$\pi\colon \dot{\bigcup_{p \in M}} T_pM \longrightarrow M$$

bezeichne die Abbildung, die jedem Tangentenvektor seinen Fußpunkt zuordnet.
Beh.: *Es existiert genau eine differenzierbare Mannigfaltigkeit TM mit zugrundeliegender Menge $\dot\bigcup_{p\in M} T_pM$ derart, daß $\overline{u} \in \mathcal{A}_{TM}$ für jedes $u \in \mathcal{A}_M$, wobei $\overline{u}\colon G\overline{u} := \overline{\pi}^1(Gu) \to u(Gu) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definiert ist durch*

$$\overline{u}(z) := ((u \circ \pi)(z), z \cdot u) = (u_1(\pi(z)), \ldots, u_n(\pi(z)), z \cdot u_1, \ldots z \cdot u_n).$$

$(u_1(\pi(z)), \ldots, u_n(\pi(z)))$ *heißen* Fußpunktskoordinaten *und* $(z \cdot u_1, \ldots z \cdot u_n)$ Richtungskoordinaten von z bzgl. u.

Für $(a, (b_1, \ldots, b_n)) \in u(Gu) \times \mathbb{R}^n$ gilt ferner

$$\overline{u}^{-1}(a, (b_1, \ldots, b_n)) = \sum_{i=1}^{n} b_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{u^{-1}(a)}.$$

$\overline{u}$ *heißt die* zu der Karte u von M assoziierte Bündelkarte von TM.
TM *heißt das* Tangentialbündel von M.

Beweis als Übung 11.2. □

Immersionen und Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.29 (Immersion, Submersion, Einbettung)**.** Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(i) Eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *Immersion* bzw. *Submersion*, wenn für jedes $p \in M$ die Tangentialabbildung $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiv bzw. surjektiv ist. In diesem Falle gilt also $\dim M \le \dim N$ bzw. $\dim M \ge \dim N$.

(ii) Eine Immersion $f\colon M \to N$ heißt *differenzierbare Einbettung*, wenn M durch f homöomorph auf den Teilraum $f(M)$ von N abgebildet wird.

Beispiel 3.30.

a) Seien $n, m \in \mathbb{N}_+$ und $G \subset \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist nach 3.22 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Immersion bzw. Submersion, wenn $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung im Sinne der Analysis ist und $(\partial_j f_i(p))_{i\in\{1,\dots,n\}, j\in\{1,\dots,m\}}$ für jedes $p \in G$ Rang m bzw. n hat.

b) $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$, ist eine Immersion.

[Denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ hat $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 4\cos^2(t) - 2 \end{pmatrix}$ Rang 1.]

Immersionen brauchen also nicht injektiv zu sein.

Ferner ist $c|_{]-\pi,\pi[}$ eine injektive Immersion, aber keine differenzierbare Einbettung. $c(\mathbb{R}) = c(]-\pi,\pi[)$ heißt *Lemniskate.*

[Z.B. weil $]-\pi,\pi[$ im Gegensatz zu $c(]-\pi,\pi[)$ nicht kompakt ist.]

$c|_{]-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon[}$ ist jedoch für jedes $\varepsilon \in]0,\pi[$ eine differenzierbare Einbettung.

Hauptsatz 3.31.
Vor.: *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M und N m- bzw. n-dimesnionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine Immersion, also gilt $m \le n$.*
Beh.: *Zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und eine Karte $v \in \mathfrak{A}_N$ (mit $f(p) \in Gv$[14]) derart, daß gilt*

1.) $f(U) = \{q \in Gv \mid v_{m+1}(q) = \ldots = v_n(q) = 0\}$ (= Gv *im Falle* $m = n$),

2.) $u := (v_1 \circ f, \ldots, v_m \circ f)|_U \in \mathfrak{A}_M$,

3.) $\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} \forall_{\tilde{p}\in U}\; f_{*\tilde{p}} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\tilde{p}} = \left.\frac{\partial}{\partial v_i}\right|_{f(\tilde{p})}$ *und*

4.) $f|_U\colon U \longrightarrow N$ *ist differenzierbare Einbettung.*

Insbesondere ist jede Immersion lokal eine differenzierbare Einbettung.

[14] dies folgt auch aus 1.)

Beweis. Wir wählen $\tilde{u} \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in G\tilde{u}$ und $\tilde{u}(p) = 0$ sowie $\tilde{v} \in \mathfrak{A}_N$ mit $f(p) \in G\tilde{v}$ und $\tilde{v}(f(p)) = 0$. Dann ist $\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1}$ eine differenzierbare Abbildung von $\tilde{u}(G\tilde{u}) \in \mathcal{U}^{\circ}(0, \mathbb{R}^m)$ in $\tilde{v}(f(G\tilde{u}) \cap G\tilde{v}) \in \mathcal{U}^{\circ}(0, \mathbb{R}^n)$ mit $\big(\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1})\big)(0) = 0$ und

$$(\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1})_{*0} = \tilde{v}_{*f(p)} \circ f_{*p} \circ (\tilde{u}^{-1})_{*0} \text{ injektiv,}$$

d.h. nach 3.25: $\mathrm{d}_0(\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist injektiv.

In der Analysis beweist man, daß dann ein Diffeomorphismus g einer Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ auf eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ und eine Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^m$ existieren derart, daß

$$g \circ (\tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1})|_U = \iota|_V \text{ mit } \iota := (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}. \tag{111}$$

Dann ist $U := \overline{\tilde{u}}^{1}(V)$ eine Umgebung von p in M und $v \colon Gv \to v(Gv)$, definiert durch

$$v := g \circ \tilde{v}|_{\overline{g \circ \tilde{v}}^{1}(V \times \mathbb{R}^{n-m})},$$

ist eine differenzierbare Karte von N.

Nun verifizieren wir 1.) bis 4.):

Zu 1.): Wegen $(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap v(Gv) = \iota(V)$[15] ist die rechte Seite in 1.) gleich

$$\overline{v}^{1}(\iota(V)) = \overline{g \circ \tilde{v}}^{1}(\iota(V)) \overset{(111)}{=} (f \circ \tilde{u}^{-1})(V) = f(U).$$

Zu 2.): Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ und jedes $\tilde{p} \in U \subset G\tilde{u}$ gilt nach Definition von u (in 2.))

$$\begin{aligned} u_i(\tilde{p}) &= (v_i \circ f) \circ (\tilde{u}^{-1} \circ \tilde{u})(\tilde{p}) = (x_i \circ v \circ f \circ \tilde{u}^{-1})(\tilde{u}(\tilde{p})) \\ &\overset{\text{Def. } v}{=} (x_i \circ g \circ \tilde{v} \circ f \circ \tilde{u}^{-1})(\tilde{u}(\tilde{p})) \\ &\overset{(111)}{=} (x_i \circ \iota)(\tilde{u}(\tilde{p})) = u_i(\tilde{p}). \end{aligned}$$

Daher haben wir $u = \tilde{u}|_U$ gezeigt, also folgt wegen $\tilde{u} \in \mathfrak{A}_M$ auch $u \in \mathfrak{A}_M$ und $u(U) = \tilde{u}(U) = V$.

Zu 3.): Für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$(v_j \circ f|_U) = \begin{cases} u_j, & j \le m \\ 0, & j > m, \end{cases}$$

also $\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\tilde{p}} \cdot (v_j \circ f|_U) = \delta_{ij}$ und somit

$$f_{*\tilde{p}} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\tilde{p}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(f_{*\tilde{p}} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\tilde{p}} \right) \cdot v_j \right) \left.\frac{\partial}{\partial v_j}\right|_{f(\tilde{p})} = \left.\frac{\partial}{\partial v_i}\right|_{f(\tilde{p})}.$$

---

[15] „$\subset$" $(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap v(Gv) \subset (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap (V \times \mathbb{R}^{n-m}) \subset V \times \{0\} = \iota(V)$.

„$\supset$" $\iota(V) \overset{(111)}{\subset} \mathrm{Bild}(g \circ \tilde{v})$ und $\iota(V) = V \times \{0\} \subset V \times \mathbb{R}^{n-m}$, also

$$\iota(V) \subset \mathrm{Bild}(g \circ \tilde{v}) \cap (V \times \mathbb{R}^{n-m}) = v(Gv).$$

Ferner $\iota(V) = V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$.

Zu 4.): $f|_U = v^{-1} \circ (v \circ f \circ \tilde{u}^{-1}) \circ \tilde{u}|_U \overset{(111),\text{ Def. } v}{=} v^{-1} \circ \iota \circ \tilde{u}|_U$ und $\tilde{u}$ bildet U homöomorph auf V ab, ι bildet V homöomorph auf $\iota(V) = V \times \{0\}$ ab, und v^{-1} bildet $\iota(V)$ homöomorph auf $f(U)$ ab. Daher ist $f|_U \colon U \to f(U)$ ein Homöomorphismus und somit eine differenzierbare Einbettung. □

Satz 3.32 (Eigenschaften von Immersionen)**.** *Seien M, N, Q differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $m := \dim M$, $n := \dim N$. Dann gilt:*

(i) $f \colon M \longrightarrow N$ Immersion und $g \colon N \longrightarrow Q$ Immersion $\Longrightarrow g \circ f \colon M \longrightarrow Q$ Immersion,

(ii) $\mathrm{id}_M \colon M \longrightarrow M$ Immersion,

(iii) $f \colon M \longrightarrow N$ Immersion $\Longrightarrow f$ lokal injektiv,

(iv) $m = n$ und $f \colon M \longrightarrow N$ Immersion $\Longrightarrow f$ offene Abbildung.

(v) Im Falle $m = n$ ist $f \colon M \to N$ genau dann eine bijektive Immersion, wenn $f \colon M \to N$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. (i), (ii) und (iii) sind klar nach 3.23(ii), 3.23(iii) und 3.31.

Zu (iv): Nach dem Unkehrsatz 3.26 (oder nach 3.31) existiert zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $U_p \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ derart, daß $f(U_p)$ eine offene Teilmenge von N ist. Ist dann $G \subset M$ offen, so folgt, daß auch $f(G) = \bigcup_{p \in G} f(G \cap U_p)$ offen in N ist.

Zu (v): „$\Leftarrow$" Für alle $p \in M$ gilt nach 3.23

$$\mathrm{id}_{T_pM} = (\mathrm{id}_M)_{*p} = (f^{-1})_{*f(p)} \circ f_{*p},$$

folglich ist f_{*p} injektiv.

„$\Rightarrow$" Zu zeigen ist, daß $f^{-1} \colon N \to M$ differenzierbar ist.

Seien $q \in N$ und $p := f^{-1}(q) \in M$. Da f Immersion ist und $m = n$, so ist

$$f_{*p} \colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus. Daher existiert nach dem Umkehrsatz eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ derart, daß

$$f|_U \colon U \longrightarrow f(U)$$

ein Diffeomorphismus ist. Somit ist

$$f^{-1}|_{\overset{-1}{f}(U)} \colon \overset{-1}{f}(U) \longrightarrow U$$

differenzierbar, also auch (da $U \hookrightarrow M$ differenzierbar ist)

$$f^{-1}|_{\overset{-1}{f}(U)} \colon \overset{-1}{f}(U) \longrightarrow M.$$

Wegen $f(U) \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$ ist damit gezeigt, daß $f^{-1} \colon N \to M$ lokal differenzierbar ist, also nach 3.12(iv) auch differenzierbar. □

Definition 3.33 (Untermannigfaltigkeiten)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n.

(i) M heißt *differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* N, wenn gilt:

1.) $M \subset N$ und

2.) die Inklusion $M \hookrightarrow N$ ist eine Immersion.

(ii) M heißt *reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* N, wenn gilt:

1.) $M \subset N$ und

2.) die Inklusion $M \hookrightarrow N$ ist eine differenzierbare Einbettung.

1.) und 2.) sind offenbar genau dann erfüllt, wenn M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M ist und die Topologie von M die Teilraumtopologie bzgl. N ist.

Satz 3.34.
Vor.: *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Einbettung.*
Beh.: *Zu jedem $p \in M$ existiert eine Karte $v \in \mathfrak{A}_N$ mit $f(p) \in Gv$ und*

1.) $Gv \cap f(M) = \{q \in Gv \,|\, v_{m+1}(q) = \ldots = v_n(q) = 0\}$ *und*

2.) $u := (v_1 \circ f, \ldots, v_m \circ f) \in \mathfrak{A}_M$.

Beweis. Sei $p \in M$. Nach 3.31 existieren $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und $\tilde{v} \in \mathfrak{A}_N$ mit $f(p) \in G\tilde{v}$ sowie

$$f(U) = \{q \in G\tilde{v} \,|\, \tilde{v}_{m+1}(q) = \ldots = \tilde{v}_n(q) = 0\} \text{ und } (\tilde{v}_1 \circ f, \ldots, \tilde{v}_m \circ f) \in \mathfrak{A}_M. \tag{112}$$

Nach Voraussetzung ist f ein Homöomorphismus von M auf den topologischen Teilraum $f(M)$ von N. Daher ist $f(U)$ offen im Teilraum $f(M)$ von N, also existiert $V \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$ mit

$$f(U) = V \cap f(M). \tag{113}$$

Wir setzen

$$v := \tilde{v}|_{G\tilde{v} \cap V}, \tag{114}$$

also $v \in \mathfrak{A}_N$ mit $f(p) \in Gv$. Dann gilt

$$Gv \cap f(M) = G\tilde{v} \cap V \cap f(M) \overset{(113)}{=} G\tilde{v} \cap f(U) \overset{(112)}{=} f(U), \tag{115}$$

also auch

$$f(U) \overset{(115)}{\subset} Gv \overset{(114)}{\subset} G\tilde{v}. \tag{116}$$

Wir beweisen nun 1.) und 2.):

$$\begin{aligned} Gv \cap f(M) &\overset{(115)}{=} f(U) \overset{(116),(112)}{=} \{q \in Gv \,|\, \tilde{v}_{m+1}(q) = \ldots = \tilde{v}_n(q) = 0\} \\ &\overset{(114)}{=} \{q \in Gv \,|\, v_{m+1}(q) = \ldots = v_n(q) = 0\}, \end{aligned}$$

also ist 1.) gezeigt.

Des weiteren gilt

$$Gu \overset{\text{Def. } u}{=} \overset{-1}{f}(Gv) = \overset{-1}{f}(Gv \cap f(M)) \overset{(115)}{=} \overset{-1}{f}(f(U)) \overset{f \text{ inj.}}{=} U$$

und für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ und jedes $\tilde{p} \in U$

$$u_i(\tilde{p}) \overset{\text{Def. } u}{=} v_i(f(\tilde{p})) \overset{(114)}{=} \tilde{v}_i(f(\tilde{p})),$$

also $u = (\tilde{v}_1 \circ f, \dots, \tilde{v}_m \circ f)|_U \in \mathfrak{A}_M$. □

Bemerkung 3.35. Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ von V. Es bezeichne $i: M \hookrightarrow V$ die (immersive) Inklusion. Dann gilt trivialerweise für jedes $p \in M$:

$$j_p: T_pM \longrightarrow \{p\} + \overrightarrow{i_{*p}(T_pM)}, \quad v \longmapsto p + \overrightarrow{i_{*p}v},$$

ist eine kanonische Bijektion von T_pM auf einen m-dimensionalen affinen Untervektorraum von V, den sogenanten *Tangentialraum von M in p im anschaulichen Sinne.*

Ist $c: I \to M$ ein differenzierbarer Weg mit $t_\in I$ und $c(t_0) = p$, so folgt

$$j_p(\dot{c}(t_0)) = p + \overrightarrow{i_{*p}\dot{c}(t_0)} = p + (i \circ c)'(t_0).$$

Satz 3.36. *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann gilt:*

(i) Ist $f: M \to N$ differenzierbar bzw. eine Immersion und $\widetilde{M}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M, so ist auch $f|_{\widetilde{M}}: \widetilde{M} \to N$ differenzierbar bzw. eine Immersion.

(ii) Ist $\widetilde{N}$ eine reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N sowie $f: M \to N$ eine Abbildung mit $f(M) \subset \widetilde{N}$, so ist $f: M \to N$ genau dann differenzierbar bzw. eine Immersion, wenn $f: M \to \widetilde{N}$ differenzierbar bzw. eine Immersion ist.

Beweis. Zu (i): Die Inklusionsabbildung $i: \widetilde{M} \hookrightarrow N$ ist eine Immersion. Außerdem gilt $f|_{\widetilde{M}} = f \circ i$. Hieraus folgt die Behauptung, vgl. 3.32(i).

Zu (ii): Die Inklusion $j: \widetilde{N} \hookrightarrow N$ ist eine differenzierbare Einbettung und

$$(f: M \longrightarrow N) = j \circ (f: M \longrightarrow \widetilde{N}). \tag{117}$$

„$\Leftarrow$“ folgt sofort aus (117).

„$\Rightarrow$“ Zunächst ist $f: M \to \widetilde{N}$ stetig, da $\widetilde{N}$ die Teilraumtopologie bzgl. N besitzt.

Seien $p \in M$, $m := \dim M$, $n := \dim N$ und $\tilde{n} := \dim \widetilde{N}$. Da $j: \widetilde{N} \hookrightarrow N$ eine differenzierbare Einbettung ist und $f(p) \in f(M) \subset \widetilde{N}$, so existiert nach 3.34 eine Karte $v \in \mathfrak{A}_N$ mit $j(f(p)) = f(p) \in Gv$ derart, daß

$$\tilde{v} := (v_1 \circ j, \dots, v_{\tilde{n}} \circ j) = (v_1, \dots, v_{\tilde{n}})|_{Gv \cap \widetilde{N}} \in \mathfrak{A}_{\widetilde{N}}.$$

Sei $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$ und

$$Gu \subset \overset{-1}{f}(Gv) \overset{f(M)\subset\widetilde{N}}{\subset} \overset{-1}{f}(Gv \cap \widetilde{N}) = \overset{-1}{f}(G\tilde{v}).$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f ist

$$v \circ f \circ u^{-1}\colon u(Gu) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

differenzierbar, also nach Analysis (wegen der Differenzierbarkeit der kanonischen Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$) auch

$$\tilde{v} \circ f \circ u^{-1}\colon u(Gu) \longrightarrow \mathbb{R}^{\tilde{n}}.$$

Da $\tilde{v}(G\tilde{v})$ in $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ offen ist, ist $\tilde{v} \circ f \circ u^{-1}$ auch als Abbildung $u(Gu) \to \tilde{v}(G\tilde{v})$ differenzierbar. Daher ist

$$f|_{Gu} = \tilde{v}^{-1} \circ (\tilde{v} \circ f \circ u^{-1}) \circ u\colon Gu \longrightarrow G\tilde{v}$$

differenzierbar, also auch als Abbildung $Gu \to \widetilde{N}$, denn $G\tilde{v}$ ist offen in $\widetilde{N}$.

Wegen der Beliebigkeit von $p \in M$ ist damit gezeigt, daß $f\colon M \to \widetilde{M}$ lokal differenzierbar, also differenzierbar ist.

Ist $f\colon M \to N$ eine Immersion, so folgt offenbar aus (117) indirekt, daß auch $f\colon M \to \widetilde{N}$ eine Immersion ist. □

Beispiel 3.37.

a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Jede offene differenzierbare Untermannigfaltigkeit U einer m-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M.

b) Sei $M := \{(\sin(t), \sin(2t)) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(\sin(t), \sin(2t)) \,|\, t \in\,]-\pi, \pi[\} \subset \mathbb{R}^2$ und sei $i\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ die Inklusion.

   Definiere $g_1\colon]-\pi,\pi[\to M$ durch $g_1(t) = (\sin(t), \sin(2t))$, also ist g_1 bijektiv. Daher existiert offenbar genau eine 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M_1 mit zugrundeliegender Menge M derart, daß

   $$g_1\colon]-\pi,\pi[\longrightarrow M_1$$

   ein Diffeomorphismus der regulären differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $]-\pi,\pi[$ von $\mathbb{R}$ auf M_1 ist. Dann ist M_1 eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, die nicht regulär ist.

   [Denn nach 3.30 b) ist $i \circ g_1\colon]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2$ eine Immersion, aber keine differenzierbare Einbettung. Wegen der Diffeomorphie der Abbildung ${g_1}^{-1}\colon M_1 \to]-\pi,\pi[$ ist daher auch $i = (i \circ g_1) \circ {g_1}^{-1}\colon M_1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Immersion, aber keine differenzierbare Einbettung.]

   Definiere $g_2\colon]0, 2\pi[\to M$ durch $g_2(t) = (\sin(t), \sin(2t))$, also ist auch g_2 bijektiv. Analog zu oben existiert genau eine 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M_2 mit zugrundeliegender Menge M derart, daß

   $$g_2\colon]0, 2\pi[\longrightarrow M_2$$

ein Diffeomorphismus der regulären differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $]0,2\pi[$ von $\mathbb{R}$ auf M_2 ist, und M_2 ist nicht-reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

M_1 und M_2 sind verschieden als topologische Räume, also erst recht auch als differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

[Denn die offene Teilmenge $g_1(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ von M_1 ist nicht offen in M_2.]

Wir haben also gezeigt, daß zwei differenzierbare Untermannigfaltigkeiten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit derselben zugrundeliegenden Menge i.a. nicht übereinstimmen.

Hauptsatz 3.38.
Vor.: *Seien $m,n \in \mathbb{N}$ und M eine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, N eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to N$ eine Abbildung.*
Beh.: *Es existiert höchstens eine m-dimensionale differenzierbare Struktur $\mathfrak{A}$ für M derart, daß $f\colon (M,\mathfrak{A}) \to N$ eine Immersion ist.*

Korollar 1. *Zwei m-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit derselben zugrundeliegenden topologischen Struktur stimmen überein.* □

Korollar 2. *Zwei m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeiten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit derselben zugrundeliegenden Menge stimmen überein.* □

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit existiere eine m-dimensionale differenzierbare Struktur $\mathfrak{A}$ für M derart, daß gilt

$$f\colon (M,\mathfrak{A}) \longrightarrow N \text{ ist Immersion,} \tag{118}$$

insbesondere also $m \le n$. Seien

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\quad (p_1,\dots,p_n) \longmapsto (p_1,\dots,p_m),$$

und

$$\iota\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n,\quad (p_1,\dots,p_m) \longmapsto (p_1,\dots,p_n,0,\dots,0),$$

die kanonischen (differenzierbaren) Abbildungen.

Aus (118) und 3.31 folgt:

$$\forall_{p\in M}\,\exists_{U_p\in\mathcal{U}^\circ(p,M)}\,\exists_{v_p\in\mathfrak{A}_N}\quad \begin{array}{l} f(U_p) = \{q \in Gv \mid (v_p)_{m+1}(q) = \ldots = (v_p)_n(q) = 0\} \\ \text{und } u_p := ((v_p)_1 \circ f,\dots,(v_p)_m \circ f)|_{U_p} \in \mathfrak{A} \end{array} \tag{119}$$

Sei nun $\widetilde{\mathfrak{A}}$ eine beliebige m-dimensionale differenzierbare Struktur für M derart, daß gilt

$$f\colon (M,\widetilde{\mathfrak{A}}) \longrightarrow N \text{ ist Immersion.} \tag{120}$$

Wir haben zu zeigen

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}. \tag{121}$$

Aus (119) folgt, daß $\{u_p \mid p \in M\}$ ein m-dimensionaler topologischer Atlas für die topologische Mannigfaltigkeit M bestehend aus paarweise differenzierbar verträglichen Karten (d.h. ein m-dimensionaler differenzierbarer Atlas für M) mit $\{u_p \mid p \in M\} \subset \mathfrak{A}$ ist. Zum Nachweis von (121) genügt es daher nach 3.7 zu zeigen

$$\{u_p \mid p \in M\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}. \tag{122}$$

Zu (122): Sei $p \in M$. Wir setzen zur Abkürzung $U := U_p$, $v := v_p$ und $u := u_p$. Wegen 3.12(vi) ist zu zeigen, daß u_p: $(U_p, \widetilde{\mathfrak{A}}) \to u_p(U_p)$ ein Diffeomorphismus der offenen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $(U_p, \widetilde{\mathfrak{A}})$ von $(M, \widetilde{\mathfrak{A}})$[16] auf die offene differenzierbare Untermannigfaltigkeit $u_p(U_p)$ von $\mathbb{R}^m$ ist.

Nach (119) gilt

$$u = \pi|_{v(Gv)} \circ v \circ f|_U,$$

und diese Abbildung ist nach (120), (119) differenzierbar als Abbildung von $(U, \widetilde{\mathfrak{A}})$ auf $u(U)$, also ist

$$u\colon (U, \widetilde{\mathfrak{A}}) \longrightarrow u(U) \text{ differenzierbar.}$$

Des weiteren gilt

$$\iota|_{u(U)} \circ u = \iota|_{u(U)} \circ \pi|_{v(Gv)} \circ v \circ f|_U = v \circ f|_U,$$

und diese Abbildung ist nach (120), (119) eine Immersion als Abbildung von $(U, \widetilde{\mathfrak{A}})$ auf $u(U)$, also folgt indirekt

$$u\colon (U, \widetilde{\mathfrak{A}}) \longrightarrow u(U) \text{ ist Immersion.}$$

Damit ist gezeigt, daß u: $(U, \widetilde{\mathfrak{A}}) \to u(U)$ eine bijektive Immersion zwischen gleichdimensionalen (nämlich m-dimensionalen) Mannigfaltigkeiten ist, also ein Diffeomorphismus nach 3.32(v). Damit ist (122) bewiesen. □

Satz 3.39.
Vor.: *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, N eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und M eine Teilmenge von N.*
Beh.: *Es existiert genau dann eine m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N mit zugrundeliegender Menge M, die dann nach 3.38 Korollar 2 eindeutig bestimmt ist, wenn gilt*

$$\forall_{p \in M} \exists_{v \in \mathfrak{A}_N}\, p \in Gv \,\wedge\, Gv \cap M = \{q \in Gv \mid v_{m+1}(q) = \ldots = v_n(q) = 0\}.$$

In diesem Falle sagen wir: Die Teilmenge M von N ist m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N.

Beweis. „⇒" ist klar nach 3.34.

„⇐" Wir betrachten im folgenden M stets als topologischen Raum mit der Teilraumtopologie bzgl. N. Seien wieder

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (p_1, \ldots, p_n) \longmapsto (p_1, \ldots, p_m),$$

[16] Daß $(U_p, \widetilde{\mathfrak{A}})$ eine offene differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $(M, \widetilde{\mathfrak{A}})$ ist, liegt daran, daß $(M, \mathfrak{A})$ und $(M, \widetilde{\mathfrak{A}})$ als topologische Räume übereinstimmen.

und

$$\iota\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (p_1,\dots,p_m) \longmapsto (p_1,\dots,p_n,0,\dots,0),$$

die kanonischen (differenzierbaren) Abbildungen.

Nach Voraussetzung gilt

$$\forall_{p\in M}\exists_{v_p\in\mathfrak{A}_N} \quad \begin{array}{l} p\in Gv \wedge Gv\cap M = \{q\in Gv \,|\, v_{m+1}(q) = \ldots = v_n(q) = 0\}, \\ \text{o.B.d.A. existieren } V_p \in \operatorname{Top}(\mathbb{R}^n), W_p \in \operatorname{Top}(\mathbb{R}^m) \text{ mit} \\ \qquad\qquad v_p(Gv_p) = V_p \times W_p, \\ \text{also } v_p(Gv_p\cap M) = V_p \times \{0\} = \iota(V_p). \end{array} \tag{123}$$

Wir setzen

$$u_p := \pi \circ v_p|_{Gv_p\cap M} = \pi|_{V_p\times\{0\}} \circ v_p|_{Gv_p\cap M}, \tag{124}$$

also ist $u_p\colon Gv_p\cap M \to V_p$ ein Homöomorphismus (beachte, daß $V_p\times\{0\}$ durch π homöomorph auf V_p abgebildet wird) des offenen Teilraumes $Gu_p := Gv_p\cap M$ von M auf den offenen Teilraum V_p von $\mathbb{R}^n$.

Folglich ist $\{u_p \,|\, p\in M\}$ ein m-dimensionaler Atlas für M, d.h. M ist topologische Mannigfaltigkeit. (M ist hausdorffsch mit abzählbarer Basis, da M topologischer Teilraum von N ist.)

Wir behaupten:

$$\{u_p \,|\, p\in M\} \text{ ist } m\text{-dimensionaler differenzierbarer Atlas für } M. \tag{125}$$

[Zu (125): Seien $p,\tilde{p}\in M$. Wir setzen $u := u_p$, $\tilde{u} := u_{\tilde{p}}$, $v := v_p$, $\tilde{v} := v_{\tilde{p}}$, $V := V_p$ und $\widetilde{V} := V_{\tilde{p}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \tilde{u}\circ u &\overset{(124)}{=} \pi|_{\widetilde{V}\times\{0\}} \circ \tilde{v}|_{G\tilde{v}\cap M} \circ \left(v|_{Gv\cap M}\right)^{-1} \circ \left(\pi|_{V\times\{0\}}\right)^{-1} \\ &= \pi\circ(\tilde{v}\circ v^{-1})\circ \iota|_{u(Gu\cap G\tilde{u})}, \end{aligned}$$

und dies ist eine differenzierbare Abbildung $u(Gu\cap G\tilde{u}) \to \mathbb{R}^m$, womit (125) gezeigt ist.]

Sei $\mathfrak{A}$ die nach (125) und 3.7 eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur für M mit $\{u_p \,|\, p\in M\}\subset\mathfrak{A}$. $i\colon M \hookrightarrow N$ bezeichne die Inklusion. Zu zeigen bleibt:

$$\iota\colon (M,\mathfrak{A}) \hookrightarrow N \text{ ist Immersion.} \tag{126}$$

Beweis hiervon: Sei $p\in M$. u_p ist differenzierbare Karte von $(M,\mathfrak{A})$ mit $p\in Gu_p$, v_p ist differenzierbare Karte von N mit $i(p) = p\in Gv_p$, und es gilt

$$\begin{aligned} v_p\circ i\circ u_p{}^{-1} &\overset{(124)}{=} v_p\circ i\circ \left(v_p|_{Gv_p\cap M}\right)^{-1} \circ \left(\pi|_{V_p\times\{0\}}\right)^{-1} \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} v_p\circ i\circ v_p{}^{-1}|_{V_p\times\{0\}} \circ \iota|_{V_p} \\ &= \iota|_{V_p}, \end{aligned}$$

also

$$i|_{Gv_p\cap M} = v_p{}^{-1}\circ(v_p\circ i\circ u_p{}^{-1})\circ u_p = v_p{}^{-1}\circ\iota|_{V_p}\circ u_p,$$

und diese Abbildung ist eine Immersion $Gv_p\cap M \to N$ als Komposition von solchen. (Beachte, daß nach (123) V_p durch ι in $V_p\times W_p = v_p(Gv_p)$ immersiert wird.)

Da dies für beliebiges $p\in M$ gezeigt ist, haben wir (126) bewiesen. □

Bemerkung. Ist in 3.39 speziell $N = V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M \subset V$, so ist gezeigt, daß M genau dann eine m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von V ist, wenn M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit im Sinne der Analysis ist.

Satz 3.40. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f\colon M \to N$ eine injektive Immersion einer m-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit N. Dann gilt:*

(i) $f\colon M \longrightarrow N$ *differenzierbare Einbettung*
$\iff f(M)$ *ist reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N.*

(ii) $f\colon M \longrightarrow N$ *differenzierbare Einbettung*
$\implies f\colon M \longrightarrow f(M)$ *Diffeomorphismus*[17].

Beweis. 1.) Sei $f\colon M \to N$ differenzierbare Einbettung. Dann gilt nach 3.34

$$\forall_{p\in M} \exists_{v\in\mathfrak{A}_N}\, f(p) \in Gv \wedge Gv \cap f(M) = \{q \in Gv \,|\, v_{m+1}(q) = \ldots = v_n(q) = 0\},$$

also ist $f(M)$ nach 3.39 m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N.

2.) Sei $f(M)$ eine m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N. Dann ist nach 3.36(ii) auch

$$f\colon M \longrightarrow f(M) \text{ eine Immersion,}$$

also eine bijektive Immersion zwischen m-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, d.h. nach 3.32(v):

$$f\colon M \longrightarrow f(M) \text{ ist Diffeomorphismus,}$$

insbesondere ist f Homöomorphismus von M auf den Teilraum $f(M)$ von N, also auch

$$f\colon M \longrightarrow f(M) \text{ differenzierbare Einbettung.}$$

Mit 1.) und 2.) sind (i) und (ii) gezeigt. □

Hauptsatz 3.41 (Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten).
Vor.: *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n, $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $q \in f(M)$ ein* regulärer Wert von f*, d.h. per definitionem*

$$\forall_{p\in N}\, f_{*p}\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \text{ surjektiv,}$$

also gilt $m \geq n$.
Beh.: *$\overset{-1}{f}(\{q\})$ ist eine $(m-n)$-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N.*

[17] von M auf die m-dimensionale reguläre differenzierbare Untermannigfaltigkeit $f(M)$ von N, vgl. (i)

Zusatz. *Bezeichnet* $i\colon \overset{-1}{f}(\{q\}) \hookrightarrow M$ *die Inklusion, so gilt*

$$\forall_{p\in\overset{-1}{f}(\{q\})}\, i_{*p}\Big(T_p\overset{-1}{f}(\{q\})\Big) = \operatorname{Kern}(f_*p).$$

Beweis. Seien $p \in \overset{-1}{f}(\{q\})$, $v \in \mathfrak{A}_N$ mit $q \in Gv$ und $v(q) = 0$ sowie $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$, $u(p) = 0$ und $f(Gu) \subset Gv$. Dann ist

$$v \circ f \circ u^{-1}\colon u(Gu) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Abbildung einer Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$ mit $v \circ f \circ u^{-1}(0) = 0$ und

$$(v \circ f \circ u^{-1})_{*0} = v_{*q} \circ f_{*p}(u^{-1})_{*0} \text{ surjektiv,}$$

also gilt nach 3.25: $\mathrm{d}_0(v \circ f \circ u^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

In der Analysis beweist man, daß dann ein Diffeomorphismus h einer Umgebung U von 0 in $\mathbb{R}^m$ auf eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^m$ existiert derart, daß

$$(v \circ f \circ u^{-1}) \circ h = \pi|_U \text{ mit } \pi := (x_1, \dots, x_n)\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $\tilde{u} := h^{-1} \circ u$ eine differenzierbare Karte von M mit $p \in G\tilde{u}$. Wir behaupten

$$G\tilde{u} \cap \overset{-1}{f}(\{q\}) = \{\tilde{p} \in G\tilde{u} \mid \tilde{u}_1(\tilde{p}) = \dots = \tilde{u}_n(\tilde{p}) = 0\}. \tag{127}$$

[Zu (127): Für alle $\tilde{p} \in G\tilde{u}$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(\tilde{p}) = \dots = \tilde{u}_n(\tilde{p}) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\pi|_U \circ \tilde{u})(\tilde{p}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ((v \circ f \circ u^{-1} \circ h) \circ (h^{-1} \circ u))(\tilde{p}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (v \circ f)(\tilde{p}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad f(\tilde{p}) = q,
\end{aligned}$$

also gilt (127).]

Da $p \in \overset{-1}{f}(\{q\})$ beliebig gewählt war, folgt aus (127) und 3.39 „$\Leftarrow$“ offenbar die Behauptung des Hauptsatzes.

Zum Beweis des Zusatzes: Da $i_{*p}\colon T_p\overset{-1}{f}(\{q\}) \to T_pM$ injektiv ist, gilt

$$\dim i_{*p}\Big(T_p\overset{-1}{f}(\{q\})\Big) = m - n = \dim \operatorname{Kern}(f_*p),$$

also genügt es zu zeigen, daß

$$i_{*p}\Big(T_p\overset{-1}{f}(\{q\})\Big) \subset \operatorname{Kern}(f_*p).$$

Beweis hiervon: Seien $v \in T_p\overset{-1}{f}(\{q\})$ und $c\colon I \to \overset{-1}{f}(\{q\})$ ein differenzierbarer Weg mit $t_0 \in I$, $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = v$. Dann ist $f \circ i \circ c$ konstant vom Wert q, also gilt

$$f_{*p}(i_{*p}v) = \dot{\widehat{f \circ i \circ c}}(t_0) = 0.$$

□

Hauptsatz 3.42 (Whitneyscher Immersions- und Einbettungssatz)**.** *Es seien $m \in \mathbb{N}_+$ und M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(i) Es existiert eine Immersion $f\colon M \to \mathbb{R}^{2m-1}$ derart, daß $f(M)$ im Falle $m > 1$ eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2m-1}$ ist.

(ii) Es existiert eine differenzierbare Einbettung $f\colon M \to \mathbb{R}^{2m}$ so, daß $f(M)$ eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2m}$ ist.[18]

Wir geben im folgenden einen Beweis für das „um eine Dimension schwächere Resultat“ im Falle einer kompakten Mannigfaltigkeit M, d.h. wir beweisen:

Hauptsatz 3.43. *Es seien $m \in \mathbb{N}_+$ und M eine m-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(i) Es existiert eine Immersion von M in $\mathbb{R}^{2m}$.

(ii) Es existiert eine differenzierbare Einbettung von M in $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Wir bereiten den Beweis von 3.43 durch die folgenden vier Sätze vor.

Satz 3.44.
Vor.: *Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit.*
Beh.: *Es existieren $k \in \mathbb{N}$ und eine differenzierbare Einbettung $f\colon M \to \mathbb{R}^k$.*

Beweis. Sei $m := \dim M$. Es existiert zu jedem $p \in M$ eine Karte $u_p \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu_p$, $u_p(Gu_p) = \mathbb{R}^m$ und $u_p(p) = 0$. Dann ist $\left(\overline{u_p}^1(U_1(0))\right)_{p \in M}$ eine Überdeckung von M durch offene Teilmengen von M. M ist kompakt, also existieren $p_1, \dots p_n \in M$ derart, daß mit $u_i := u_{p_i}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{u_i}^1(U_1(0)). \tag{128}$$

In der Analysis beweist man die Existenz einer differenzierbaren[19] Funktion $\lambda\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(\mathbb{R}^m) \subset [0,1]$, $\lambda|_{\overline{U_1(0)}} = 1$ und $\lambda|_{\mathbb{R}^m \setminus U_2(0)} = 0$.[20] Wir definieren dann für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine differenzierbare Funktion $\varphi_i\colon M \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_i|_{Gu_i} := \lambda_i \circ u_i$ und $\varphi_i|_{M \setminus \overline{u_i}^1(\overline{U_2(0)})} := 0$ und setzen

$$U_i := \overline{\varphi_i}^1(\{1\}) \overset{\text{Def. } \lambda}{\supset} \overline{u_i}^1(U_1(0)), \tag{129}$$

also folgt aus (128)

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} U_i. \tag{130}$$

[18] Ist M nicht kompakt, so hat Hirsch gezeigt, daß darüber hinaus eine differenzierbare Einbettung $M \to \mathbb{R}^{2m-1}$ existiert.

[19] d.h. $\mathcal{C}^\infty$

[20] $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) := e^{-\frac{1}{t}}$ für $t > 0$, $\varphi(t) := 0$ für $t \le 0$ ist differenzierbar, daher ebenfalls $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\chi(t) := \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+\varphi(1-t)}$, $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) := \chi(t+2)\,\chi(2-t)$. Setze $\lambda(x) := \psi(|x_1|)\cdots\psi(|x_n|)$.

Wir definieren weiter für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ differenzierbare Abbildungen $g_i\colon M \to \mathbb{R}^m$, $f_i\colon M \to \mathbb{R}^{m+1}$ durch $g_i|_{Gu_i} := \varphi_i\, u_i$ und $g_i|_{M \smallsetminus \overline{u_i}^1(U_2(0))} := 0$ sowie $f_i := (g_i, \varphi_i)$. Dann ist auch $f := (f_1,\dots,f_n)\colon M \to \mathbb{R}^{n(m+1)}$ differenzierbar.

Da M kompakt ist, genügt es zum Nachweis des Satzes zu zeigen, daß f eine injektive Immersion ist.

Zur Injektivität: Seien $p,q \in M$ mit $f(p) = f(q)$. Dann folgt aus (130) die Existenz von $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $p \in U_i$, also nach Definition von φ_i: $\varphi_i(p) = 1$. Wegen der Definition von f und $f(p) = f(q)$ folgt weiter $1 = \varphi_i(p) = \varphi_i(q)$, also nach (129) auch $p,q \in U_i$. $f_i(p) = f_i(q)$ liefert nun $u_i(p) = u_i(q)$ (beachte $\varphi_i(p) = \varphi_i(q) = 1$), also $p = q$, da u_i als Karte injektiv ist.

Zur Immersivität: Sei $p \in M$ beliebig. Nach (128) existiert $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $p \in \overline{u_i}^1(U_1(0)) \overset{(129)}{\subset} U_i$. Wegen $\varphi_i|_{U_i} = 1$ ist

$$g_i|_{\overline{u_i}^1(U_1(0))} = \varphi_i|_{\overline{u_i}^1(U_1(0))}\, u_i|_{\overline{u_i}^1(U_1(0))} = u_i|_{\overline{u_i}^1(U_1(0))}\colon \overline{u_i}^1(U_1(0)) \longrightarrow U_1(0)$$

ein Diffeomorphismus, insbesondere ist

$$(g_i)_{*p}\colon T_pM \longrightarrow T_{g_i(p)}\mathbb{R}^m \text{ injektiv,}$$

also nach Definition von f auch $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}^{n(m+1)}$. □

Definition 3.45 (Nullmenge)**.** Seien $m \in \mathbb{N}_+$, M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\widetilde{M} \subset M$.

$\widetilde{M}$ heißt *Nullmenge in M* genau dann, wenn für jede Karte $u \in \mathfrak{A}_M$ die Teilmenge $u(Gu \cap \widetilde{M})$ von $\mathbb{R}^m$ eine μ_m-Nullmenge ist.

Satz 3.46 (Mini-Sard)**.**
Vor.: *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung.*
Beh.: *$f(M)$ ist eine Nullmenge in N.*

Beweis. Seien $u \in \mathfrak{A}_M$ und $v \in \mathfrak{A}_N$ beliebig. Es genügt zu zeigen

$$(v \circ f \circ u^{-1})(u(Gu \cap \overline{f}^1(Gv))) \text{ ist eine } \mu_n\text{-Nullmenge des } \mathbb{R}^n.$$

Sei $g\colon u(Gu \cap \overline{f}^1(Gv)) \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $g(a,b) := (v \circ f \circ u^{-1})(a)$. Dann ist g eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung im Sinne der Analysis, also μ_n-nullmengentreu, d.h.

$$(v \circ f \circ u^{-1})(u(Gu \cap \overline{f}^1(Gv))) = g(u(Gu \cap \overline{f}^1(Gv)) \times \{0\})$$

ist mit $u(Gu \cap \overline{f}^1(Gv)) \times \{0\}$ eine μ_n-Nullmenge. □

Satz 3.47.
Vor.: *Seien $m, k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2m$.*
Beh.: *Falls eine Immersion von M in $\mathbb{R}^k$ existiert, so existiert auch eine Immersion von M in $\mathbb{R}^{k-1}$.*

Beweis. Seien $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ eine Immersion, $\pi\colon TM \to M$ die Fußpunktsabbildung und $g\colon TM \to \mathbb{R}^k$ die differenzierbare Abbildung, die durch

$$g(z) := \overrightarrow{f_{*\pi(z)} z}$$

gegeben ist.

Wegen $\dim TM = 2m < k$ existiert nach 3.46

$$a \in TM \setminus g(TM), \tag{131}$$

also $a \neq 0$, da $0 \in g(TM)$.

$\mathfrak{p}\colon \mathbb{R}^k \to \{b \in \mathbb{R}^k \,|\, a \perp b\}$ bezeichne die (differenzierbare) Projektion von $\mathbb{R}^k$ auf das orthogonale Komplement von a (bzgl. des euklidischen Skalarproduktes), also

$$\mathrm{Kern}(\mathfrak{p}) = \mathbb{R}\, a. \tag{132}$$

Wir zeigen, daß $\mathfrak{p} \circ f\colon M \to \{b \in \mathbb{R}^k \,|\, a \perp b\} \cong \mathbb{R}^{k-1}$ eine Immersion ist:

Angenommen es existieren $p \in M$ und $z \in T_pM \setminus \{0\}$ mit $(f \circ \mathfrak{p})_{*p} z = 0$. Da $\mathfrak{p}$ linear ist, gilt dann auch

$$\mathfrak{p}(\overrightarrow{f_{*p} z}) = \overrightarrow{\mathfrak{p}_{*f(p)}(f_{*p} z)} = 0,$$

also folgt aus (132) die Existenz von $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{f_{*p} z} = t\, a,$$

und es gilt $t \neq 0$, da $z \neq 0$ und f Immersion.

Nun gilt $g(\frac{1}{t}\, z) = \overrightarrow{f_{*p}(\frac{1}{t}\, z)} = a$, im Widerspruch zu (131). □

Satz 3.48.
Vor.: *Seien $m, k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2m + 1$.*
Beh.: *Falls eine injektive Immersion von M in $\mathbb{R}^k$ existiert, so existiert auch eine injektive Immersion von M in $\mathbb{R}^{k-1}$.*

Beweis. Seien $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ eine injektive Immersion, $\pi\colon TM \to M$ die Fußpunktsabbildung und $g\colon TM \to \mathbb{R}^k$, $h\colon M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ die differenzierbaren Abbildungen, die durch

$$g(z) := \overrightarrow{f_{*\pi(z)} z} \quad \text{und} \quad h(p, q, t) := t\,(f(p) - f(q))$$

gegeben sind.

Wegen $\dim TM = 2m < k$ und $\dim M \times M \times \mathbb{R} = 2m + 1 < k$ existiert nach 3.46

$$a \in TM \setminus (g(TM) \cup h(M \times M \times \mathbb{R})), \tag{133}$$

also $a \neq 0$, da $0 \in g(TM)$.

$\mathfrak{p}\colon \mathbb{R}^k \to \{b \in \mathbb{R}^k \,|\, a \perp b\}$ bezeichne wieder die (differenzierbare) Projektion von $\mathbb{R}^k$ auf das orthogonale Komplement von a (bzgl. des euklidischen Skalarproduktes), also

$$\mathrm{Kern}(\mathfrak{p}) = \mathbb{R}\, a. \tag{134}$$

Wir zeigen, daß $\mathfrak{p} \circ f \colon M \to \{b \in \mathbb{R}^k \,|\, a \perp b\} \cong \mathbb{R}^{k-1}$ eine injektive Immersion ist:

Die Immersivität beweist man wie im Beweis von 3.47.

Zur Injektivität: Seien $p, q \in M$ mit $(\mathfrak{p} \circ f)(p) = (\mathfrak{p} \circ f)(q)$, also folgt aus der Linearität von $\mathfrak{p}$ und (134) die Existenz von $t \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$f(p) - f(q) = t\,a. \tag{135}$$

Angenommen $p \neq q$. Dann folgt aus der Injektivität von f und (135) $t \neq 0$, also auch $h(p, q, \frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\,(f(p) - f(q)) \overset{(135)}{=} a$, im Widerspruch zu (133). □

Beweis von 3.43. (i) folgt sofort aus 3.44 und 3.47. (ii) folgt sofort aus 3.44 und 3.48. □

A Differenzierbare Überlagerungstheorie

Definition A.1. Seien E, B differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\pi\colon E \to B$ eine Abbildung.

$\pi\colon E \to B$ heißt *differenzierbare Überlagerung* genau dann, wenn gilt:

1.) $\pi\colon E \longrightarrow B$ ist Überlagerung der zugrundeliegenden topologischen Räume.

2.) $\pi\colon E \longrightarrow B$ ist Immersion.

Satz A.2. *Sei $\pi\colon E \to B$ eine Überlagerung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann gilt:*

(i) $\dim E = \dim B$.

Sind $b \in B$ und $U \in \mathcal{U}^\circ(b, B)$ zusammenhängend derart, daß U durch π schlicht überlagert wird, so gilt für jede Zusammenhangskomponente Z von $\overline{\pi}^1(U)$ in E: Z ist offen in E, und $\pi|_Z\colon Z \to U$ ist ein Diffeomorphismus.

Insbesondere ist π ein lokaler Diffeomorphismus.

(ii) Ist $f\colon M \to B$ eine differenzierbare Abbildung bzw. eine Immersion einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in B, so ist jeder stetige π-Lift $\hat{f}\colon M \to E$ von f automatisch eine differenzierbare Abbildung bzw. eine Immersion.

(iii) Jede Decktransformation $f\colon E \to E$ von π ist automatisch eine Immersion und, falls E einfach-zusammenhängend ist, sogar ein Diffeomorphismus.

(iv) Ist zusätlich E zusammenhängend und B einfach-zusammenhängend, so ist $\pi\colon E \to B$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Zu (i): Die erste Aussage gilt z.B. nach 3.31, da π lokal-homöomorphe Immersion ist. Hieraus und aus 2.10 folgt die zweite Aussage, da $\pi|_Z\colon Z \to U$ bijektive Immersion zwischen gleichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist.

Zu (ii): Seien $p \in M$ und U eine schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung von $f(p)$ in B. Sei Z die Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^1(U)$ mit $\hat{f}(p) \in Z$, also ist Z nach (i) offen in E. Wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ ist dann $G := \overline{\hat{f}}^1(Z)$ eine Umgebung von p in M und

$$f|_G = \pi \circ \hat{f}|_G = \pi|_Z \circ \hat{f}|_G,$$

also ist

$$\hat{f}|_G = (\pi|_Z)^{-1} \circ f|_G \text{ differenzierbar bzw. Immersion.}$$

(iii) folgt aus (ii), da f ein stetiger π-Lift von π ist (wegen $\pi \circ f = \pi$) sowie aus 2.24(ii).

(iv) folgt aus 2.27 und (i). □

Hauptsatz A.3. *Seien $m \in \mathbb{N}_+$, B eine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, E ein zusammenhängender und lokal-wegzusammenhängender topologischer Raum sowie $\pi\colon E \to B$ eine Überlagerung. Dann gilt:*

(i) E ist eine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(ii) Ist B sogar eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so existiert genau eine m-dimensionale differenzierbare Struktur $\mathfrak{A}$ für die topologische mannigfaltigkeit E derart, daß $\pi\colon (E, \mathfrak{A}) \to B$ eine Immersion (also eine differenzierbare Überlagerung) ist.

Beweis. Zu (i): $\pi\colon E \to B$ ist lokal-homöomorph und B ist m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, also gilt trivialerweise:

$$\text{Es existiert ein } m\text{-dimensionaler topologischer Atlas für } E. \tag{136}$$

Wir zeigen:

$$E \text{ ist hausdorffsch.} \tag{137}$$

[Zu (137): Seien $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$.

1. Fall: $\pi(e_1) = \pi(e_2)$. Sei dann U eine schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung von $\pi(e_1)$ und sei für $i \in \{1,2\}$ Z_i die Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^1(U)$ mit $e_i \in Z_i$. Dann gilt $Z_i \in \mathcal{U}^\circ(e_i, E)$ und $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$.

2. Fall: $\pi(e_1) \neq \pi(e_2)$. Da B hausdorffsch ist, existieren für $i \in \{1,2\}$ Umgebungen $U_i \in \mathcal{U}^\circ(\pi(e_i), B)$ mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Dann gilt $\overline{\pi}^1(U_i) \in \mathcal{U}^\circ(e_i, E)$ und $\overline{\pi}^1(U_1) \cap \overline{\pi}^1(U_2) = \varnothing$.]

Ferner gilt:

$$E \text{ besitzt eine abzählbare Basis.} \tag{138}$$

[Zu (138): Wähle zu jedem $b \in B$ eine schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung U_b von b in B. Dann ist $(U_b)_{b\in B}$ eine offene Überdeckung von B. Da B eine abzählbare Basis besitzt, überdecken nach dem Satz von Lindelöf[21] bereits höchstens abzählbar viele der Mengen U_b – etwa $U_i := U_{b_i}$, $i \in I \subset \mathbb{N}$, – ganz B. Ohne Einschränkung gelte $I = \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\mathfrak{Z} := \{Z \mid \exists_{i\in N}\, Z \text{ Zusammenhangskomponente von } \overline{\pi}^1(U_i)\}.$$

Jedes $Z \in \mathfrak{Z}$ ist also eine nicht-leere offene Teilmenge von E und besitzt als topologischer Teilraum von E eine abzählbare Basis, (denn Z ist homöomorph zu einem der offenen Teilräume U_i von B, welcher mit B eine abzählbare Basis besitzt.)

Wegen $E = \overline{\pi}^1(B) = \overline{\pi}^1\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{\pi}^1(U_i) = \bigcup_{Z\in\mathfrak{Z}} Z$ und da jedes $Z \in \mathfrak{Z} \subset \mathrm{Top}(E)$ als Teilraum von E eine abzählbare Basis besitzt, genügt es zum Nachweis von (138) zu zeigen, daß gilt:

$$\mathfrak{Z} \text{ ist höchstens abzählbar.} \tag{139}$$

---

[21]

Satz (von Lindelöf). *Sei M ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis $\mathfrak{B}$. Dann besitzt jede Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M durch offene Mengen eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung.*

Beweis. Zu jedem $i \in I$ existieren eine höchstens abzählbare Menge J_i und $B_{i,j} \in \mathfrak{B}$ mit $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{i,j}$. $\widetilde{\mathfrak{B}} := \{B_{i,j} \mid i \in I \wedge j \in J_i\}$ ist mit $\mathfrak{B}$ höchstens abzählbar. Zu jedem $B \in \widetilde{\mathfrak{B}}$ existiert ein $i_B \in I$ mit $B \subset U_{i_B}$, und $(U_{i_B})_{B\in\widetilde{\mathfrak{B}}}$ ist eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$. □

(Denn ist (139) gezeigt und ist für jedes $Z \in \mathfrak{Z}$ $\{H_{Z,i} \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis von Top(Z), so ist offenbar $\{H_{Z,i} \,|\, Z \in \mathfrak{Z} \wedge i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis von Top(E), da $\forall_{H \in \mathrm{Top}(E)}\, H = \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} (Z \cap H)$.)

Sei nun $Z_0 \in \mathfrak{Z}$ fest gewählt. Wir definieren eine aufsteigende Folge $(\mathfrak{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathfrak{Z}$ durch

$$\mathfrak{Z}_0 := \{Z_0\} \quad \text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}\, \mathfrak{Z}_{n+1} := \left\{\widetilde{Z} \in \mathfrak{Z} \,|\, \exists_{Z \in \mathfrak{Z}_n}\, Z \cap \widetilde{Z} \neq \varnothing\right\}.$$

Wir behaupten:

$$\mathfrak{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n. \tag{140}$$

(Zu (140): Definiere $E_1, E_2 \subset E$ durch

$$E_1 := \bigcup_{Z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n} Z \quad \text{und} \quad E_2 := \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n} Z.$$

Dann sind E_1 und E_2 offen in E, $E_1 \neq \varnothing$ (wegen $\varnothing \neq Z_0 \in E_1$) und $E = E_1 \cup E_2$ (wegen $E = \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} Z$). Wir zeigen $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Angenommen es existiert $e \in E_1 \cap E_2$. Dann existieren $Z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n$ – etwa $Z \in \mathfrak{Z}_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ – und $\widetilde{Z} \in \mathfrak{Z} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n$ mit $e \in Z \cap \widetilde{Z}$, also nach Definition $\mathfrak{Z}_{k+1}$: $\widetilde{Z} \in \mathfrak{Z}_{k+1} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n$, Widerspruch!

Nunmehr folgt wegen des Zusammenhanges von E, daß $E = E_1$, $E_2 = \varnothing$ und somit (140).)

Wegen (140) genügt es zum Nachweis von (139) zu zeigen, daß gilt:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n \text{ ist höchstens abzählbar.} \tag{141}$$

(Beweis von (141) durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Die Behauptung für $n = 0$ ist trivial nach Definition von $\mathfrak{Z}_0 = \{Z_0\}$. Nehmen wir also für $n \in \mathbb{N}$ an, daß $\mathfrak{Z}_\mathfrak{n}$ höchstens abzählbar ist. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_{n+1} &= \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}_n} \left\{\widetilde{Z} \in \mathfrak{Z} \,|\, Z \cap \widetilde{Z} \neq \varnothing\right\} \\
&= \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}_n} \bigcup_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}} \left\{\widetilde{Z} \text{ Zusammenhangskomponente von } \overline{\pi}^1(U_i) \,|\, Z \cap \widetilde{Z} \neq \varnothing\right\}
\end{aligned}$$

genügt es zum Nachweis der Behauptung für $n+1$ zu zeigen, daß für jede feste Wahl von $Z \in \mathfrak{Z}_n$ und $i \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{Z}_{Z,i} := \left\{\widetilde{Z} \text{ Zusammenhangskomponente von } \overline{\pi}^1(U_i) \,|\, Z \cap \widetilde{Z} \neq \varnothing\right\}$$

höchstens abzählbar ist. Dies ist aber klar, denn es gilt

$$Z \cap \overline{\pi}^1(U_i) = \dot{\bigcup_{\widetilde{Z} \in \mathfrak{Z}_{Z,i}}} Z \cap \widetilde{Z},$$

und die linke Seite besitzt mit Z eine abzählbare Basis während die rechte Seite die disjunkte Vereinigung von nicht-leeren im offenen Teilraum $Z \cap \overline{\pi}^1(U_i)$ von E offenen Mengen ist. Beachte, daß ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis nicht disjunkte Vereinigung überabzählbar vieler nicht-leerer offener Teilmengen sein kann.

Damit ist (141) gezeigt.)

Mit (141) ist auch (138) gezeigt.]

Wegen (136), (137) und (138) gilt (i).

Zu (ii): Setze

$$\widetilde{\mathfrak{A}} := \left\{ u\colon Gu \longrightarrow \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} Gu \in \mathrm{Top}(E),\ \pi|_{Gu}\colon Gu \longrightarrow \pi(Gu) \text{ Homöomor-} \\ \text{phismus und } \exists_{v \in \mathfrak{A}_B}\, Gv = \pi(Gu) \wedge u = v \circ \pi|_{Gu} \end{array} \right\},$$

$$\begin{tikzcd} Gu \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "u"] & \\ \pi(Gu) = Gv \arrow[r, "v"] & v(Gv) = u(Gu) \end{tikzcd}$$

beachte, daß $\pi(Gu)$ mit Gu offen ist, da Gu eine offene Abbildung ist.

Wir behaupten:

$$\widetilde{\mathfrak{A}} \text{ ist ein } m\text{-dimensionaler differenzierbarer Atlas für } E. \tag{142}$$

[Zu (142): Jedes $u \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ ist per definitionem ein Homöomorphismus eines offenen Teilraumes Gu von E auf einen Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Ferner gilt $E = \bigcup_{u \in \widetilde{\mathfrak{A}}} Gu$, da π lokal homöomorph und B differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Damit ist gezeigt, daß $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ein m-dimensionaler topologischer Atlas für E ist.

Zu zeigen bleibt die $\mathcal{C}^\infty$-Verträglichkeit, d.h.

$$\forall_{u_1, u_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}}\, u_1 \circ {u_2}^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(u_2(Gu_1 \cap Gu_2), \mathbb{R}^m).$$

Hierzu seien $u_1, u_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, also ist für $i \in \{1,2\}$ $u_i\colon Gu_i \to \mathbb{R}^m$ auf einer in E offenen Menge Gu_i definiert, $\pi|_G u_i\colon Gu_i \to \pi(Gu_i)$ ist ein Homöomorphismus und es existiert $v_i \in \mathfrak{A}_B$ mit $Gv_i = \pi(Gu_i)$ und $u_i = v_i \circ \pi|_{Gu_i}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} u_1 \circ {u_2}^{-1} &= \left(v_1|_{\pi(Gu_1 \cap Gu_2)}\right) \circ (\pi|_{Gu_1 \cap Gu_2}) \circ (\pi|_{Gu_1 \cap Gu_2})^{-1} \circ \left(v_2|_{\pi(Gu_1 \cap Gu_2)}\right)^{-1} \\ &= \left(v_1|_{\pi(Gu_1 \cap Gu_2)}\right) \circ {v_2}^{-1}|_{u_2(Gu_1 \cap Gu_2)} \\ &= (v_1 \circ {v_2}^{-1})|_{u_2(Gu_1 \cap Gu_2)} \in \mathcal{C}^\infty(u_2(Gu_1 \cap Gu_2), \mathbb{R}^m), \end{aligned}$$

da $v_1, v_2 \in \mathfrak{A}_B$.]

Aus (i) und (142) folgt mit 3.7: Es existiert genau eine differenzierbare Struktur $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}}_{\max}$ für E mit $\widetilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$. Wir behaupten:

$$\pi\colon (E, \mathfrak{A}) \longrightarrow B \text{ ist eine Immersion.} \tag{143}$$

[Zu (143): Sei $e \in E$. Dann existiert $u \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ mit $e \in Gu$, also $Gu \in \mathcal{U}^\circ(e, E)$ und es existiert $v \in \mathfrak{A}_B$ mit $Gv = \pi(Gu)$ sowie $u = v \circ \pi|_{Gu}$. Daher ist

$$\pi|_{Gu} = (v\colon v(Gv) \longrightarrow Gv)^{-1} \circ (u\colon Gu \longrightarrow u(Gu)) : Gu \longrightarrow Gv$$

ein Diffeomorphismus der offenen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit Gu und Gv von $(E, \mathfrak{A})$, folglich ist $\pi\colon Gu \to B$ eine (injektive) Immersion.]

Wegen (142), (143) ist die Existenz von $\mathfrak{A}$ wie in (ii) bewiesen. Die Einzigkeit von $\mathfrak{A}$ ist klar nach 3.38. □

Zusatz. *A.3 bleibt richtig, wenn man die Voraussetzung abschwächt, indem man „E zusammenhängend" durch „E habe höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten und B sei zusammenhängens" ersetzt.*

Wir werden den Zusatz aus dem folgenden Satz folgern:

Satz A.4.
Vor.: *Seien E, B topologische Räume, E lokal-wegzusammenhängend, B zusammenhängend und sei $\pi\colon E \to B$ eine Überlagerung, (also ist auch B lokal-wegzusammenhängend.)*
Beh.: *Für jede Zusammenhangskomponente E_0 von E, die dann automatisch offen in E ist, gilt:*
$\pi|_{E_0}\colon E_0 \longrightarrow B$ *ist eine Überlagerung, (insbesondere $\pi(E_0) = B$.)*

Beweis. 1.) Zu $\pi(E_0) = B$. „$\subset$" ist trivial. Zum Nachweis von „$\supset$" wählen wir $e_0 \in E_0$ und setzen $b_0 := \pi(e_0)$. Sei $b \in B$ beliebig. Aus der Voraussetzung folgt, daß B wegzusammenhängend ist, also existiert ein Weg $c\colon [0,1] \to B$ von b_0 nach b. Dann ist $\hat{c}_{e_0}\colon [0,1] \to E$ ein Weg, der ganz in der Zusammenhangskomponente E_0 von E verläuft, also folgt

$$b = c(1) = \pi(\underbrace{\hat{c}_{e_0}(1)}_{\in E_0}) \in \pi(E_0).$$

2.) Seien nun $b \in B$ und U eine durch π schlicht überlagerte zusammenhängende Umgebung von b in B. Dann ist jede Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi|_{E_0}}^{1}(U) = E_0 \cap \overline{\pi}^{1}(U)$ auch eine Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^{1}(U)$[22], wird also durch π, d.h. durch $\pi|_{E_0}$, homöomorph auf U abgebildet.
Damit ist die Behauptung des Satzes klar. $\square$

Beweis des Zusatzes zu A.3. Wende A.3 auf die Überlagerung $\pi|_{E_0}\colon E_0 \to B$, vgl. A.4, für alle Zusammenhangskomponenten E_0 von E an. $\square$

Hauptsatz A.5. *Sei B eine zusammenhängende m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(i) Es existieren eine einfach-zusammenhängende m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit E und eine (universelle) differenzierbare Überlagerung $\pi\colon E \to B$.

(ii) Sind $\pi\colon E \to B$ und $\tilde{\pi}\colon \widetilde{E} \to B$ zwei universelle differenzierbare Überlagerungen und sind $e_0 \in E$, $\tilde{e}_0 \in \widetilde{E}$ sowie $b_0 \in B$ mit $\pi(e_0) = \tilde{\pi}(\tilde{e}_0) = b_0$, so existiert genau ein Diffeomorphismus $g\colon E \to \widetilde{E}$ mit $g(e_0) = \tilde{e}_0$ und $\tilde{\pi} \circ g = \pi$.

Beweis. (i) folgt unmittelbar aus 2.25 und A.3. (ii) folgt unmittelbar aus 2.26 und A.2(ii). $\square$

[22] Denn ist $\widetilde{Z}$ eine beliebige Zusammenhangskomponente von $\overline{\pi}^{1}(U)$ in E, so gilt entweder $E_0 \cap \widetilde{Z} = \varnothing$ oder $E_0 \cap \widetilde{Z} \neq \varnothing$. Im Falle $E_0 \cap \widetilde{Z} \neq \varnothing$ ist $E_0 \cup \widetilde{Z}$ zusammenhängend, also – da E_0 Zusammenhangskomponente von E_0 – $E_0 \cup \widetilde{Z} \subset E_0$, d.h. $\widetilde{Z} \subset E_0$.

Index