

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Welche der folgenden Relationen \sim definieren Äquivalenzrelationen auf M ?

(i) $M = \mathbb{N}$ und $x \sim y : \iff x = y + 3$,

(ii) $M = \mathbb{Z}$ und $x \sim y : \iff p \mid (x - y)$, wobei p eine fest gewählte natürliche Zahl ≥ 1 ist,

(iii) $M = \mathbb{R}$ und $x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Sei M eine Menge. Zeige, daß durch

$$A \sim B : \iff \#A = \#B$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert wird.

Aufgabe 3. Seien M, N Mengen und $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

(i) Zeige, daß

$$x \sim_f y : \iff f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(ii) Bestimme die Mächtigkeit von M/\sim_f für folgende Abbildungen f :

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 7$,

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$,

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$,

(d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [x] :=$ größte ganze Zahl $\leq x$.