

# Vorkurs Mathematik

## Übungsblatt 10

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Relationen  $\sim$  definieren Äquivalenzrelationen auf  $M$ ?

(i)  $M = \mathbb{N}$  und  $x \sim y : \Leftrightarrow x = y + 3$ ,

(ii)  $M = \mathbb{Z}$  und  $x \sim y : \Leftrightarrow p|(x - y)$ , wobei  $p$  eine fest gewählte natürliche Zahl  $\geq 1$  ist,

(iii)  $M = \mathbb{R}$  und  $x \sim y : \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $M$  eine Menge. Zeige, daß durch  $A \sim B : \Leftrightarrow \#A = \#B$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathfrak{P}(M)$  definiert wird.

**Aufgabe 3.** Seien  $M, N$  Mengen und  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

(i) Zeige, daß  $x \sim_f y : \Leftrightarrow f(x) = f(y)$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$  definiert.

(ii) Bestimme die Mächtigkeit von  $M/\sim_f$  für folgende Abbildungen  $f$ :

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 7$ ,

(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ,

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$ ,

(d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [x] :=$  größte ganze Zahl  $\leq x$ .