WS 2007/08 Ch. Bock, Y. Deuster

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 16

Aufgabe 1. Seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Ferner sei $g \in G$. Zeigen sie, daß

$$gHg^{-1} := \{g \circ h \circ g^{-1} \mid h \in H\}$$

ebenfalls eine Untergruppe von G ist. Sie heißt *zu H konjugierte Untergruppe in G*.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Untersuchen Sie in diesem Fall auch auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(i) $\varphi_1 : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)\,, \quad x \longmapsto x + 1,$

(ii) $\varphi_2 : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)\,, \quad x \longmapsto 2 \cdot x,$

(iii) $\varphi_3 : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot)\,, \quad x \longmapsto x^2,$

(iv) $\varphi_4 : (\mathbb{R}_+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)\,, \quad x \longmapsto \ln(x).$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ und berechnen Sie deren Kern. Untersuchen Sie welche injektiv, welche surjektiv und welche Isomorphismen sind.

Tip. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(n) = \varphi(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ Summanden}})$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie Satz 4.14 aus der Vorlesung:
Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein bijektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, daß dann auch $\varphi^{-1} : H \to G$ ein bijektiver Homomorphismus ist.

Besprechung: Donnerstag, den 04.10.2007 in den Übungsgruppen