Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 16

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Sei $g \in G$. Zeigen sie, daß

$$gHg^{-1} := \{g \circ h \circ g^{-1} \mid h \in H\}$$

ebenfalls eine Untergruppe von G ist. Sie heißt *zu H konjugierte Untergruppe* in G.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R}^{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Untersuchen Sie in diesem Fall auch auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(i) $\phi_1 : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)\,, \quad x \mapsto x + 1$

(ii) $\phi_2 : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)\,, \quad x \mapsto 2 \cdot x$

(iii) $\phi_3 : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot)\,, \quad x \mapsto x^2$

(iv) $\phi_4 : \big(\mathbb{R}^{>0}, \cdot\big) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)\,, \quad x \mapsto \log(x)$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\phi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ und berechnen Sie deren Kern. Untersuchen Sie welche injektiv, welche surjektiv und welche Isomorphismen sind.
Tip. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\phi(n) = \phi(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}})$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie Satz 14 aus der Vorlesung:
Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen. Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein bijektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, daß dann auch $\phi^{-1} : H \longrightarrow G$ ein bijektiver Homomorphismus ist.

Besprechung: Donnerstag, den 04.10.2007 in den Übungsgruppen