Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 3

Definition. Seien M eine Menge und H eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse Ω die Menge M umfaßt. Wir definieren drei neue Aussagen wie folgt:

(i) $\forall_{x\in M} H(x) \;:\Longleftrightarrow\; \forall_x \; (x \in M \Rightarrow H(x))$

(ii) $\exists_{x\in M} H(x) \;:\Longleftrightarrow\; \exists_x \; (x \in M \wedge H(x))$

(iii) $\exists!_{x\in M} H(x) \;:\Longleftrightarrow\; \exists_{x\in M} \; \big(H(x) \;\wedge\; \forall_{y\in M} \; (H(y) \Rightarrow x = y)\big)$

Aufgabe 1. Seien M eine Menge und H eine einstellige Aussageform mit Einsetzungsklasse M. Negieren Sie die Aussage $\exists!_{x\in M} H(x)$.

Aufgabe 2. Sei M eine Menge. Zeige:

(i) $\emptyset \subset M$.

(ii) Gilt $M \subset \emptyset$, so ist M die leere Menge.

Aufgabe 3. Untersuche in jedem der folgenden Fälle, ob

$$A \subset B,\; B \subset A,\; A = B,\; A \in B$$

gilt:

(i) $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$.

(ii) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(iii) $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$.

Aufgabe 4. Es seien

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}, \\ B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}, \\ C &:= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}. \end{aligned}$$

bitte wenden

Bestimme die folgenden Mengen:

(i) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$,

(ii) $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$,

(iii) $A \setminus B$, $A \setminus C$, $C \setminus A$,

(iv) $\mathbb{R} \setminus A$ und $\mathbb{R} \setminus C$.

Aufgabe 5. Seien M, N Mengen. Weise nach, daß die folgenden Aussagen paarweise zueinander äquivalent sind (d.h. jede ist zu jeder der anderen äquivalent).

(i) $M \subset N$

(ii) $M \cup N = N$

(iii) $M \cap N = M$

(iv) $M \setminus N = \emptyset$

Tip: Man zeige die Implikationen „(i) $\Rightarrow$ (ii)“, „(ii) $\Rightarrow$ (iii)“, „(iii) $\Rightarrow$ (iv)“ und „(iv) $\Rightarrow$ (i)“. Warum genügt das?

Besprechung: Freitag, den 14.09.2007 in den Übungsgruppen