

# Vorkurs Mathematik

## Übungsblatt 3

**Definition.** Seien  $M$  eine Menge und  $H$  eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse  $\Omega$  die Menge  $M$  umfaßt. Wir definieren drei neue Aussagen wie folgt:

$$(i) \quad \forall_{x \in M} H(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_x (x \in M \Rightarrow H(x))$$

$$(ii) \quad \exists_{x \in M} H(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists_x (x \in M \wedge H(x))$$

$$(iii) \quad \exists!_{x \in M} H(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists_{x \in M} (H(x) \wedge \forall_{y \in M} (H(y) \Rightarrow x = y))$$

**Aufgabe 1.** Seien  $M$  eine Menge und  $H$  eine einstellige Aussageform mit Einsetzungsklasse  $M$ . Negieren Sie die Aussage  $\exists!_{x \in M} H(x)$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $M$  eine Menge. Zeige:

$$(i) \quad \emptyset \subset M.$$

$$(ii) \quad \text{Gilt } M \subset \emptyset, \text{ so ist } M \text{ die leere Menge.}$$

**Aufgabe 3.** Untersuche in jedem der folgenden Fälle, ob

$$A \subset B, B \subset A, A = B, A \in B$$

gilt:

$$(i) \quad A = \{\emptyset\}, B = \{\{\emptyset\}\}$$

$$(ii) \quad A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$(iii) \quad A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}, B = \{\{\emptyset\}\}$$

**Aufgabe 4.** Es seien

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\},$$

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\},$$

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}.$$

bitte wenden

Bestimme die folgenden Mengen:

(i)  $A \cup B, A \cup C, A \cup B \cup C$

(ii)  $A \cap B, A \cap C, A \cap B \cap C$

(iii)  $A \setminus B, A \setminus C, C \setminus A$

(iv)  $\mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R} \setminus C$

**Aufgabe 5.** Seien  $M, N$  Mengen. Weise nach, daß die folgenden Aussagen paarweise zueinander äquivalent sind (d.h. jede ist zu jeder der anderen äquivalent).

(i)  $M \subset N$

(ii)  $M \cup N = N$

(iii)  $M \cap N = M$

(iv)  $M \setminus N = \emptyset$

*Tip:* Man zeige die vier Implikationen “(i)  $\implies$  (ii)”, “(ii)  $\implies$  (iii)”, “(iii)  $\implies$  (iv)” und “(iv)  $\implies$  (i)”. Warum genügt das?