WS 2007/08 Ch. Bock, Y. Deuster

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 2.5!

Aufgabe 2. Seien M, N, P Teilmengen einer Menge X. Zeige (wo immer möglich durch „Verfolgen von Inklusionen“, ansonsten „elementweise“):

(i) $(X \setminus M) \cup M = X$

(ii) $(X \setminus M) \cap M = \varnothing$

(iii) $M \setminus M = \varnothing$

(iv) $M \setminus \varnothing = M$

(v) $M \cup N = M \cup (N \setminus M)$

(vi) $M = (M \setminus N) \cup (M \cap N)$

(vii) $M \cap (N \setminus M) = \varnothing$

(viii) $M \cup N = X \iff X \setminus M \subset N$

(ix) $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \implies M \subset P$

Aufgabe 3.

(i) Bestimme $\mathfrak{P}(\varnothing)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing))$ und $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)))$.

(ii) Seien M, N Mengen. Zeige:

$$\mathfrak{P}(M \cap N) = \mathfrak{P}(M) \cap \mathfrak{P}(N) .$$

(iii) Beweise oder widerlege (für beliebige Mengen M, N):

(a) $\mathfrak{P}(M \cup N) \subset \mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N)$
(b) $\mathfrak{P}(M \cup N) \supset \mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N)$
(c) $\mathfrak{P}(M \cup N) = \mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N)$

bitte wenden

Aufgabe 4. Für beliebige Mengen M, N heißt die Menge

$$M \Delta N := (M \cup N) \setminus (M \cap N)$$

die *symmetrische Differenz von* M *und* N.

(i) Veranschauliche $M \Delta N$ in einem „Venn-Diagramm" („Kartoffelbildchen").

(ii) Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Beweise:

(a) $A_1 \Delta B_1 = (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_1)$

(b) $(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

(iii) Seien M eine Menge und $A, B, C \subset M$. Zeige:

(a) $A \Delta B \subset M$

(b) $A \Delta B = B \Delta A$

(c) $A \Delta \varnothing = A$

(d) $A \Delta A = \varnothing$

(e) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Aufgabe 5. Beweisen Sie:

(i) Es existiert keine Menge M mit $\forall_X \; X \in M$, d.h. es gibt keine „Menge aller Mengen".

(ii) Sei M eine Menge. Dann existiert keine Menge $\tilde{M}$ mit

$$\forall_X \; (X \in \tilde{M} \Longleftrightarrow X \notin M),$$

d.h. es gibt keine „Komplementärmenge von M".

Besprechung: Montag, den 17.09.2007 in den Übungsgruppen