WS 2007/08 Ch. Bock, Y. Deuster

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aufgabe 2. Man beweise durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \, : \, n^3 \leq 3^n \, .$$

Anleitung: Nachdem man die Behauptung für $n = 0, 1, 2$ geprüft hat, führe man einen Induktionsanfang bei $n = 3$ und einen Induktionsschluß unter der Voraussetzung $n \geq 3$ durch. Man mache sich klar, warum dadurch die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen wird. — Das Vorgehen, den Induktionsanfang nicht bei $n = 0$, sondern bei einer anderen ganzen Zahl durchzuführen, bezeichnet man als *Verschobenen Induktionsanfang.*

Aufgabe 3. In der Ebene liegen $n \in \mathbb{N}_+$ verschiedene Geraden, so daß je zwei dieser Geraden sich schneiden; jedoch soll durch einen Schnittpunkt von zwei Geraden keine weitere Gerade hindurchgehen.
Die Geraden zerlegen die Ebene in eine gewisse Anzahl T_n von Gebieten. Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele:

Anzahl der Geraden n	Anzahl der Gebiete T_n
1	$2 = 1 + 1$
2	$4 = 2 + 2 = 1 + (1 + 2)$
3	$7 = 4 + 3 = 1 + (1 + 2 + 3)$

(i) Man veranschauliche sich die Verhältnisse anhand einer Skizze.

(ii) Erweitere die Tabelle um die Zeilen für $n = 4$ und $n = 5$.

(iii) Man stelle eine Vermutung für T_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ auf und beweise diese Vermutung mittels vollständiger Induktion.

bitte wenden

Aufgabe 4. Die sog. FIBONACCI-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, die um das Jahr 1202 von LEONARDO VON PISA (der der Sohn eines BONACCIO war, und den man deswegen auch „filius Bonacci" oder kurz FIBONACCI nannte) entdeckt wurde, wird „rekursiv" durch die folgende Vorschrift definiert:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \ : \ f_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \text{ oder } n = 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{für } n \geq 3 \end{cases} .$$

Wir setzen weiter

$$a := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \quad \text{und} \quad b := \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{5}) .$$

Damit sind a und b offenbar die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Zeige durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \ : \ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (a^n - b^n) .$$

Aufgabe 5. Man finde den Fehler in dem „Beweis" aus der Vorlesung, daß alle Menschen dieselbe Augenfarbe haben.

Besprechung: Dienstag, den 18.09.2007 in den Übungsgruppen