Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Endliche geometrische Reihe)**.** Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Aufgabe 2.

(i) Es sei p eine *ungerade* natürliche Zahl. Man summiere für $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq -1$ die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{p-1} (-q)^k$.

(ii) Zeige: Enthält die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ einen ungeraden Primfaktor p, so ist

$$q := 2^n + 1$$

mit Sicherheit keine Primzahl.

Tip: Man mache den Ansatz $n = mp$ und benutze dann (i), um zu zeigen, daß q einen echten Teiler besitzt.

Bemerkung. Primzahlen der angegebenen Form sind also notwendig von der Form $F_n := 2^{(2^n)} + 1$. Die Zahlen F_n heißen *Fermat-Zahlen.* Nicht alle von ihnen sind wirklich Primzahlen: Die kleinste Fermat-Zahl, die keine Primzahl ist, ist $F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

(iii) $M_n := 2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.

Tip: Ist $n = a \cdot b$ zusammengesetzt, so zerlege man M_n mit Hilfe der Formel über die endliche geometrische Reihe.

Bemerkung. Ist n eine Primzahl, so ist dennoch M_n nicht notwendigerweise eine Primzahl. Beispielsweise ist $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ eine Primzahl, $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ jedoch nicht. Diejenigen M_n, die Primzahlen sind, heißen *Mersenne-Primzahlen.*

bitte wenden

Aufgabe 3. Wir betrachten die Menge D aller natürlichen Zahlen, die ,,bei Division durch 3 den Rest 1 haben":

$$D := \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} .$$

(i) D ist unter der Multiplikation natürlicher Zahlen ,,abgeschlossen"; das soll heißen: Multipliziert man zwei Elemente von D miteinander, so liegt das Ergebnis wieder in D.

(ii) Analog zu $\mathbb{N}$ nennen wir eine Zahl $c \in D$ *unzerlegbar in* D, wenn $c > 1$ ist und wenn aus $c = ab$ mit $a, b \in D$ folgt: $a = 1$ oder $b = 1$. Man zeige: Die Zahlen $4, 7, 10, 13 \in D$ sind unzerlegbar; die Zahlen $16, 28 \in D$ sind hingegen zerlegbar.

Bemerkung. Beachte, daß die Bezeichnung ,,Primzahl in D" (statt ,,unzerlegbar in D") hier mit Bedacht und aus gutem Grunde vermieden wurde (wie sich später herausstellen wird).

(iii) Jede Zahl $a \in D$ mit $a > 1$ läßt sich als endliches Produkt $a = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n$ von in D unzerlegbaren Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in D$ schreiben.

Tip: Schwierigkeiten? Es könnte nützlich sein, sich den entsprechenden Beweis für $\mathbb{N}$ nochmals zu Gemüte zu führen.

Aufgabe 4. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p > 1$. Beweise, daß p genau dann eine Primzahl ist, wenn die sog. *Primeigenschaft* gilt: Sind $a, b \geq 1$ natürliche Zahlen und ist p ein Teiler des Produktes $a \cdot b$, so folgt, daß p ein Teiler von a oder ein Teiler von b ist.
Tip: Fundamentalsatz der Arithmetik

Besprechung: Mittwoch, den 19.09.2007 in den Übungsgruppen