WS 2007/08 Ch. Bock, Y. Deuster

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Beweisen Sie:

(i) $\forall_{k\in\mathbb{Z}}\ 1|k$

(ii) $\forall_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\ k|k$

(iii) $\forall_{t\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\ t|0$

(iv) $\forall_{t\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\forall_{k\in\mathbb{Z}}\ \big(t|k \Longrightarrow (-t)|k\big)$

(v) $\forall_{t\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\forall_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}}\ \big(t|k_1 \wedge t|k_2 \Longrightarrow t|(k_1+k_2)\big)$

(vi) $\forall_{t\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\forall_{m,k\in\mathbb{Z}}\ \big(t|k \Longrightarrow t|(m\cdot k)\big)$

Aufgabe 2. Sei $m\in\mathbb{N}$. Neben $0! = 1$ definiert man für $m\in\mathbb{N}_+$ die sog. *Fakultät* $m! := 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$ und bezeichnet für alle $k\in\{0,1,\ldots,m\}$

$$\begin{aligned}\binom{m}{k} &:= \frac{m!}{(m-k)!\cdot k!}\\ &= \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!} \quad \text{für } 1\le k\le m\end{aligned}$$

als *Binomialkoeffizienten.* — Aus technischen Gründen setzen wir $\binom{m}{k} := 0$ für $m<k$.

Bemerkung. Die Binomialkoeffizienten spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wesentliche Rolle, so beispielsweise bei der Entwicklung des Binoms $(a+b)^m$, oder bei der Bestimmung von erzeugenden Funktionen für rekursiv definierte Folgen (ähnlich wie in Aufgabe 5.4).

(i) Beweise für $m\in\mathbb{N}$ und $k\in\{0,\ldots,m\}$:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \qquad \text{(Symmetrieeigenschaft)},$$
$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} + \binom{m}{k} \qquad \text{(Rekursionsformel)}\,.$$

(ii) Beweise durch vollständige Induktion:

$$\forall m\in\mathbb{N}\ \forall k\in\{0,\ldots,m\}\ :\ \binom{m}{k}\in\mathbb{N}\,.$$

(iii) Zeige: Ist p eine Primzahl und $k\in\{1,\ldots,p-1\}$, so ist p ein Teiler von $\binom{p}{k}$.

bitte wenden

Aufgabe 3. Wie in Aufgabe 6.3 sei D die Menge aller natürlichen Zahlen, die „bei Division durch 3 den Rest 1 haben“:

$$D := \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} .$$

Analog zu $\mathbb{N}$ sagen wir, daß eine Zahl $a \in D$ eine Zahl $b \in D$ *in* D *teilt*, wenn es ein $c \in D$ mit $b = c\,a$ gibt. Ist dies der Fall, so schreiben wir $a|_D b$.
Wir nennen in D eine Zahl $p \in D$ *prim in* D, wenn $p > 1$ ist und wenn aus $p|_D ab$ mit $a, b \in D$ folgt: $p|_D a$ oder $p|_D b$.
Zeige: $4 \in D$ ist nicht prim in D.
Bemerkung. In Aufgabe 6.3 (ii) sahen wir, daß $4 \in D$ unzerlegbar in D ist. Wir erkennen also, daß in anderen Rechenbereichen als $\mathbb{N}$ die Begriffe „unzerlegbar“ und „prim“ nicht notwendigerweise übereinstimmen müssen.

Aufgabe 4. Finde Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die

1. weder injektiv noch surjektiv sind,
2. injektiv, aber nicht surjektiv sind,
3. surjektiv, aber nicht injektiv sind,
4. bijektiv, aber nicht die identische Abbildung sind.

Aufgabe 5. Beweisen Sie Satz 2.24!

Besprechung: Donnerstag, den 20.09.2007 in den Übungsgruppen