WS 2007/08 Ch. Bock, Y. Deuster

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Beweise durch vollständige Induktion für $a, b \in \mathbb{R}$ den *Binomischen Lehrsatz*:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \, .$$

Bemerkung. Die bekannte Binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ergibt sich als Spezialfall für $n = 2$.

Aufgabe 2.

(i) Zeige, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = -5x + 2,$ bijektiv ist.

(ii) Sei M eine beliebige Menge. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} g : \mathfrak{P}(M) &\longrightarrow \mathfrak{P}(M) \\ N &\longmapsto g(N) = M \setminus N \end{aligned}$$

bijektiv ist. (Erinnerung: $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnet die Potenzmenge von M .)

Aufgabe 3. Gewinne aus der Zuordnungsvorschrift

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$$

eine Abbildung f mit maximalem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und diesbezüglich minimalem Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$.
Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

Aufgabe 4. M und N seien Mengen. Zeige: Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann injektiv, wenn für jede Menge X und für alle Abbildungen $g : X \to M$ und $h : X \to M$ aus $f \circ g = f \circ h$ stets $g = h$ folgt.

Aufgabe 5. M , N und P seien Mengen; die Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ seien bijektiv. Zeige:

(i) $f^{-1} : N \to M$ ist eine Abbildung.

(ii) $f^{-1} : N \to M$ ist bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

(iii) Es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Besprechung: Freitag, den 21.09.2007 in den Übungsgruppen