Gewöhnliche Differentialgleichungen

Christoph Bock

Vorlesung

an der

Friedrich-Alexander-Universität

Erlangen-Nürnberg

Vorwort

Die Vorlesung *Gewöhnliche Differentialgleichungen* habe ich im WS 2009/2010 an der Universität Erlangen-Nürnberg gelesen. Das Skriptum soll zum einen den Inhalt der Vorlesung wiedergeben und zum anderen die Teile enthalten, die ich aus Zeitgründen nicht besprechen konnte.

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind von fundamentaler Bedeutung für viele Gebiete der Reinen und Angewandten Mathematik, aber auch der Physik, der übrigen Naturwissenschaften und der Wirtschaftswissenschaften. Die Vorlesung gehört daher zu den Standard-Vorlesungen des Baccalaureus- und Lehramtsstudienganges.

Als Literatur empfehle ich das sehr häufig zu einer einführenden Vorlesung über Differntialgleichungen als Grundlage dienende Buch [6] von W. Walter. Ich habe mich bei der Ausarbeitung dieser Vorlesung in den Kapiteln 1 - 4, 6, 7, 10 und 11 sowie des ersten Teiles von Kapitel 8 – bis zum Beweis des Hauptsatzes 8.2 (ii) – häufig (aber nicht durchgehend) wörtlich an einer entsprechenden meines Diplomvaters W. Henke [1] orientiert. Eine perfekte Vorlesung kann ich nicht mehr verbessern! Ich möchte mich bei ihm bedanken, daß ich die vorliegende Theorie bei ihm nachlesen durfte.

Ein gutes Nachschlagewerk zur Lösung einer reichhaltigen Menge von Differentialgleichungen ist das Buch [4] von E. Kamke. Leser, die sich mit den funktionalanalytischen Resultaten, die in der Theorie dieser Vorlesung benötigt werden, näher vertraut machen möchten, sei das Buch [3] von F. Hirzebruch und W. Scharlau nahegelegt.

Für Hinweise auf Fehler, Kritik oder Lob bin ich dankbar. Kontakten können Sie mich per E-Mail an `bock at mi.uni-erlangen.de`.

Ich sollte an dieser Stelle anmerken, daß das vorliegende Skriptum nicht gegengelesen wurde. Ich kann nicht ausschließen, daß sich Fehler eingeschlichen haben. Ich entdecke bei jeder Durchsicht kleinere Ungenauigkeiten – sprich Fehler. Aber auch dies sollte für den Leser lehrend sein: Nicht sämtliche Resultate, die in der Literatur – egal, ob Skriptum oder Buch – angegeben sind, sind wahr. Der Leser sollte sich von jedem Beweis selbst überzeugen.

Erlangen, im Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung **3**

3 Existenz- und Eindeutigkeitssätze **15**

4 Gleichungen von Differentialformen **39**

5 Implizite Differentialgleichungen erster Ordnung **47**

6 Lineare Systeme von Differentialgleichungen **55**

7 Ober- und Unterfunktionen **85**

8 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit **90**

9 Flüsse von Vektorfeldern **106**

10 Stabilitätstheorie **115**

11 Randwertaufgaben **133**

A Das Lemma von Zorn **170**

Literatur **175**

Index **176**

1 Einführung

Definition 1.1 (Gewöhnliche Differentialgleichung, Anfangswertaufgabe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

(i) Eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung* ist eine Gleichung der Gestalt

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,} \tag{1}$$

wobei $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und $F\colon M \to \mathbb{R}$ stetig (und F von der letzten Variablen tatsächlich abhängt). Für (1) schreibt man auch $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

(ii) Eine n-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtentartetes (aber nicht notwendigerweise offenes) Intervall[1] sei, heißt *Lösung von (1)*, wenn für jedes $x \in I$ gilt

$$\Big((x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in M\Big) \wedge \Big(F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0\Big).$$

(iii) Die Differentialgleichung (1) heißt *explizit*, wenn sie von der speziellen Gestalt

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))} \tag{2}$$

ist, wobei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig.

Eine Lösung von (2) ist automatisch n-mal stetig differenzierbar.

(iv) Sei $(x_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Eine *Lösung der* sog. *Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{\begin{array}{c} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array}} \tag{3}$$

ist per definitionem eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (1) derart, daß gilt $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Bemerkung. In vielen wichtigen Fällen ist die Anfangswertaufgabe (3) lösbar und je zwei Lösungen stimmen in der Nähe von x_0 überein. Es kann aber auch vorkommen, daß eine Differentialgleichung überhaupt keine Lösung besitzt (z.B. $(y')^2 + x^2 + 1 = 0$) oder daß eine Anfangswertaufgabe sogar unendlich viele Lösungen besitzt (z.B. $y' = \sqrt{|y|}, y(x_0) = 0$, s.u.)

Beispiel 1.2. Die *logistische Differentialgleichung* von Verhulst (1838) lautet

$$\boxed{y' = \lambda y\,(M - y), \quad \lambda, M \in \mathbb{R}_+.} \tag{4}$$

Interpretation: $y(t)$ ist die Anzahl der Mitglieder einer Population zur Zeit t. Es soll gelten $0 \le y(t) \le M$, d.h. $y(t)$ kann die Maximalzahl M nicht überschreiten (z.B. weil der Platz oder das Nahrungsangebot beschränkt ist.) Die

[1] Ein Intervall heißt *nicht-entartet*, wenn es mehr als einen Punkt enthält

Wachstumsrate $y'(t)$ ist proportional zum Produkt aus der Population und dem maximal möglichen Zuwachs $M - y(t)$.

$y = 0$ und $y = M$ sind triviale konstante Lösungen von (4). Wie sehen die anderen Lösungen mit $0 < y(t) < M, y(0) = y_0$ aus?

$$
\begin{aligned}
(4) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{y'}{y\,(M-y)} = \frac{1}{M}\left(\frac{y'}{y} + \frac{y'}{M-y}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad -\lambda M = -\frac{y'}{y} - \frac{y'}{M-y} = (\ln(M-y))' - (\ln(y))' = \left(\ln\left(\frac{M-y}{y}\right)\right)' \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists_{C\in\mathbb{R}}\, \forall_{t\in\mathbb{R}} \quad \underbrace{\ln\left(\frac{M-y(t)}{y(t)}\right) = C - \lambda M t}_{\Leftrightarrow \frac{M}{y(t)} = 1 + e^{C} e^{-\lambda M t} \overset{y(0)=y_0}{\Rightarrow} e^{C} = \frac{M}{y_0} - 1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{\forall_{t\in\mathbb{R}}\, y(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{y_0} - 1\right) e^{-\lambda M t}}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} M
\end{aligned}
$$

Definition 1.3 (Stystem gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung)**.** Wenn wir in (1), (2) und (3) y und F bzw. f als $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}_+$, $m \geq 2$, oder etwas allgemeiner als V-wertig, wobei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, betrachten, erhalten wir ein sog. *System von Differentialgleichungen n-ter Ordnung*.

Im Falle $V = \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $F = (F_1, \ldots, F_m)$ bzw. $f = (f_1, \ldots, f_m)$ lauten dann die Formeln etwas ausführlicher

$$
\boxed{\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} F_i(x, y_1(x), \ldots, y_m(x), y_1'(x), \ldots, y_m'(x), \ldots, y_1^{(n)}(x), \ldots, y_m^{(n)}(x)) = 0,}
$$

$$
\boxed{\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} y_i^{(n)}(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots, y_m(x), y_1'(x), \ldots, y_m'(x), \ldots, \ldots, y_1^{(n-1)}(x), \ldots, y_m^{(n-1)}(x)),}
$$

bzw.

$$
\boxed{\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} y_i(x_0) = y_{0_i}, y_i'(x_0) = y_{0_i}', \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{0_i}^{(n-1)}.}
$$

Bemerkung 1.4. In dieser Vorlesung behandeln wir nur „gewöhnliche“ Differentialgleichungen, das sind Differentialgleichungen für eine Funktion $y(x)$ in einer reellen Veränderlichen x. Dagegen ist z.B.

$$
\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_2}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} + \sin(x_1)\frac{\partial y}{\partial x_3} - 3 = 0
$$

eine Differentialgleichung für eine Funktion $y(x_1, x_2, x_3)$ in drei reellen Veränderlichen, bei der partielle Ableitungen auftreten, eine sog. *partielle Differentialgleichung*.

2 Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung

2.1. Wir betrachten in diesem Kapitel Differentialgleichungen vom Typ

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)),} \tag{5}$$

wobei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}^2$ stetige Funktion ist.

f läßt sich deuten als ein *Linienelementefeld* $\mathcal{L}$ auf D: Jedem $(x, y) \in D$ ist ein *Linienelement* zugeordnet, nämlich die eindeutig bestimmte Gerade

$$\mathcal{L}(x, y) := (x, y) + \mathbb{R}\,(1, f(x, y)) \subset \mathbb{R}^2$$

des $\mathbb{R}^2$ durch (x, y), welche Steigung $f(x, y)$ besitzt.[2]

$y\colon I \to \mathbb{R}$ ist offenbar eine Lösung von (5), wenn für jedes $x \in I$ gilt $y'(x) = f(x, y(x))$. Dann ist die Tangente an den Graphen $\{(x, y(x)) \mid x \in I\}$ von $y(x)$ im Punkte $(x, y(x))$ gleiche dem dort sitzenden Linienelement $\mathcal{L}(x, y(x))$.

Das Lösen einer Differentialgleichung vom Typ (5) ist also eigentlich ein „geometrisches Problem“.

2.2. Der einfachste Fall einer expliziten Differentialgleichung ist

$$\boxed{y'(x) = f(x),}$$

wobei $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Sei $x_0 \in J$. Dann ist $y\colon J \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$y(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung und alle Lösungen (bis auf Beschränkungen) sind von der Gestalt $y(x) + C$ mit einer beliebigen Konstanten C. Daher gilt:

Ist $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$, so ist „die“ Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben durch

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + y_0.$$

Theoretisch ist die Differentialgleichung also sehr einfach lösbar, dennoch ist das Integral über f i.a. nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar.

2.3. Wir betrachten nun den allgemeineren Fall der *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

$$\boxed{y'(x) = f(x)\,g(y(x)),} \tag{6}$$

[2] Also gilt $f(x, y) = \tan(\alpha(x, y))$, wobei $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ der Steigungswinkel von $\mathcal{L}(x, y)$ sei.

wobei $f\colon J_1 \to \mathbb{R}$, $g\colon J_2 \to \mathbb{R}$ auf Intervallen $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Sei $(x_0, y_0) \in J_1 \times J_2$. Wir suchen Lösungen $y(x)$ mit

$$y(x_0) = y_0. \tag{7}$$

1. Fall: $g(y_0) \neq 0$.

a) Wir nehmen zunächst an, wir hätten bereits eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe (6), (7), d.h.

$$\forall_{x \in I}\,(x, y(x)) \in J_1 \times J_2 \;\wedge\; y'(x) = f(x)\,g(y(x)),$$

also insbesondere $I \subset J_1$ und $y(I) \subset J_2$. Wegen der Stetigkeit von g und $g(y_0) \neq 0$ existiert dann ein

$$\text{größtes Teilintervall } \widetilde{J}_2 \text{ von } J_2 \text{ mit } y_0 \in \widetilde{J}_2 \subset \overline{g}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{8}$$

und $\widetilde{J}_2$ ist Umgebung von y_0 in J_2. Wegen der Stetigkeit von $y\colon I \to J_2$ und $y(x_0) = y_0 \in \widetilde{J}_2$ existiert weiterhin ein größtes Teilintervall $\widetilde{I}$ von I derart, daß $x_0 \in \widetilde{I} \subset \overline{y}^1(\widetilde{J}_2)$ gilt, also ist $\widetilde{I}$ Umgebung von x_0 in I. Dann folgt für alle $x \in \widetilde{I}$

$$g(\overbrace{y(x)}^{\in \widetilde{J}_2}) \neq 0,$$
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

und daher auch

$$\underbrace{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}}_{=:H(y(x))} \overset{\text{Subst.}}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}_{=:F(x)},$$

wobei gilt

$$H \text{ Stammfunktion von } \tfrac{1}{g}|_{\widetilde{J}_2} \text{ mit } H(y_0) = 0 \tag{9}$$

und

$$F \text{ Stammfunktion von } f \text{ mit } F(x_0) = 0. \tag{10}$$

Wegen $H'(s) = \frac{1}{g(s)}$ für alle $s \in \widetilde{J}_2$ besitzt H eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion, also folgt

$$y|_{\widetilde{I}} = H^{-1} \circ F|_{\widetilde{I}},$$

insbesondere ist $y(x)$ in einer Umgebung von x_0 in I die eindeutig bestimmte Lösung, (nämlich solange $g \circ y(x)$ keine Nullstelle hat.)

b) Wir zeigen nun, daß durch die obigen Formeln tatsächlich eine Lösung der Anfangswertaufgabe (6), (7) definiert wird. Seien $\widetilde{J}_2$, H und F wie in (8), (9), (10) definiert. Wir definieren

$$y := H^{-1} \circ F\colon \underbrace{\overline{F}^1(\underbrace{H(\widetilde{J}_2)}_{0 \overset{(8),(9)}{\in}})}_{x_0 \overset{(10)}{\in}} =: \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann sieht man unmittelbar, wenn man die Formeln in a) in umgekehrter Reihenfolge betrachtet:

y ist Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

und für alle $x \in \widetilde{I}$ gilt $g(y(x)) \neq 0$ sowie

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Fall: $g(y_0) = 0$. Dann ist die konstante Funktion $y\colon J_1 \to \mathbb{R}$ vom Wert y_0 trivialerweise eine Lösung der Anfangswertaufgabe (6), (7).

Bemerkung.

a) Möglicherweise existieren im 2. Fall $g(y_0) = 0$ weitere Lösungen der Anfangswertaufgabe, die in keiner Umgebung von x_0 in J_1 mit der trivialen Lösung $y = y_0$ übereinstimmen, d.h. es treten „Verzweigungen“ auf.

Beispiel. $\boxed{y' = \sqrt{|y|},}$ also $f(x) = 1$, $g(y) = \sqrt{|y|}$. 0 ist die einzige Nullstelle von g. In jedem Punkt $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, gibt es Verzweigungen von der konstanten Lösung $y = 0$ „nach rechts oben und links unten“, z.B. hat man folgende Lösungen:

$$y_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{1}{4}(x - x_0)^2, & x \geq x_0, \end{cases}$$

und im Falle $x_1 \leq x_0$

$$y_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - x_1)^2, & x \leq x_1, \\ 0, & x_1 \leq x \leq x_0, \\ \frac{1}{4}(x - x_0)^2, & x \geq x_0. \end{cases}$$

b) I.a. existieren keine auf ganz J_1 definierten Lösungen.

Beispiel. $\boxed{y' = 1 + y^2.}$ Alle maximalen (d.h. nicht fortsetzbaren) Lösungen sind

$$\tan(x - C)\colon \left]C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Es existiert also keine Lösung mit einem Definitionsintervall einer Länge $> \pi$.

Definiton. Eine Differentialgleichung der Form $\boxed{y'(x) = g(y(x))}$ heißt *autonom*. (Das ist der Spezialfall $f = 1$ von (6).)

2.4. Im Spezialfall $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y$ erhält man aus 2.3 die sog. *lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\boxed{y'(x) = f(x)\,y(x),} \tag{11}$$

wobei $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Es ist leicht zu erraten, daß gilt:

Ist $F\colon J \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so ist $y\colon J \to \mathbb{R}$, definiert durch $y(x) = C\,\mathrm{e}^{F(x)}$, $C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante, eine Lösung von (11). (12)

Wir zeigen:

(12) ist die allgemeine Lösung von (11), d.h. jede Lösung von (11) ist Beschränkung der in (12) angegebenen Funktionen. (13)

[Zu (13): Sei also $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung. Wir definieren $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := y(x)\,\mathrm{e}^{-F(x)}.$$

Dann folgt für jedes $x \in I$

$$\varphi'(x) = \underbrace{y'(x)}_{=f(x)\,y(x)}\,\mathrm{e}^{-F(x)} + y(x)\,\mathrm{e}^{-F(x)}\,\underbrace{(-F(x)}_{=-f(x)} = 0,$$

also existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = C$, d.h. $y(x) = C\,\mathrm{e}^{F(x)}$.]

Wegen (12), (13) haben wir gezeigt:

Die Gesamtheit aller maximalen – d.h. auf ganz J definierten – Lösungen von (11) bildet einen eindimensionalen Untervektorraum des unendlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ aller $\mathcal{C}^1$-Funktionen $J \to \mathbb{R}$.

Wir betrachten nun die entsprechende Anfangswertaufgabe.

Sei $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$. Ist F die Stammfunktion von f mit $F(x_0) = 0$, so ist

$$y\colon J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y_0\,\mathrm{e}^{F(x)}$$

die maximale Lösung von

$$y'(x) = f(x)\,y(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Sie ist (auf ganz J definiert und) eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Wir haben insbesondere gezeigt, daß bei der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung keine Verzweigungen auftreten, obwohl $g(y) = y$ eine Nullstelle besitzt.

2.5. Wir verallgemeinern 2.4 und betrachten nun die sog. *lineare (inhomogene) Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\boxed{y'(x) = f(x)\,y(x) + h(x),} \tag{14}$$

wobei $f, h\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Sei $F\colon J \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. In 2.4 haben wir gezeigt, daß $y_{hom}\colon J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{F(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der „zugehörigen" linearen homogenen Differentialgleichung $y'(x) = f(x)\,y(x)$ ist. Um eine Lösung $y_0\colon J \to \mathbb{R}$ von (14) zu finden, macht man den Ansatz der „Variation der Konstanten", d.h. man macht den Ansatz

$$y_0(x) = \widetilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{F(x)} \text{ mit einer differenzierbaren Funktion } \widetilde{C}\colon J \longrightarrow \mathbb{R}. \qquad (15)$$

$y_0\colon J \to \mathbb{R}$ wie in (15) ist Lösung von (14) genau dann, wenn für jedes $x \in J$ gilt

$$\underbrace{y_0'(x)}_{=f(x)\,y_0(x)+h(x)} = \widetilde{C}'(x)\,\mathrm{e}^{F(x)} + \underbrace{\widetilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{F(x)}\,F'(x)}_{=f(x)\,y_0(x)},$$

d.h. $\widetilde{C}'(x) = h(x)\,\mathrm{e}^{-F(x)}$, also genau dann, wenn gilt:

$$\widetilde{C}\colon J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist Stammfunktion von } h\,\mathrm{e}^{-F}.$$

Damit haben wir die Existenz einer Lösung $y_0\colon J \to \mathbb{R}$ von (14) gezeigt und das Auffinden auf die Bildung zweier Stammfunktionen reduziert.

Bemerkung. Man kann zeigen, siehe [2, S. 142ff], daß im Falle $f = f_0 \in \mathbb{R}$ die folgenden Lösungsansätze – in Abhängigkeit der Funktion h – stets zum Auffinden einer speziellen Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y'(x) = f_0\,y(x) + h(x)} \qquad (16)$$

führen: Sei $m \in \mathbb{N}_+$.

- $h(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i$, wobei $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$.
  Setze $y(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i\,x^i$, wobei $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$, falls $f_0 \neq 0$.
- $h(x) = (\sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}$, wobei $b_0, \ldots, b_m, a \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$.
  Ist $f_0 \neq a$ setze $y(x) = (\sum_{i=0}^{m} A_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}$ und sonst $y(x) = x\,(\sum_{i=0}^{m} A_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}$, wobei $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$.
- $h(x) = (\sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i)\cos(b\,x) + (\sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i)\sin(b\,x)$, wobei $b_1, \ldots, b_m, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$.
  Setze $y(x) = (\sum_{i=0}^{m} A_i\,x^i)\cos(b\,x) + (\sum_{i=0}^{m} B_i\,x^i)\sin(b\,x)$, wobei $A_0, \ldots, A_m$ und $B_0, \ldots B_m$ reelle Zahlen sind.
- $h(x) = (\sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}\cos(b\,x) + (\sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}\sin(b\,x)$ mit reellen Zahlen $a, b, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, wobei $b \neq 0$ sei.
  Setze $y(x) = (\sum_{i=0}^{m} A_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}\cos(b\,x) + (\sum_{i=0}^{m} B_i\,x^i)\,\mathrm{e}^{a\,x}\sin(b\,x)$ mit reellen Zahlen $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots B_m$.

Die Koeffizienten A_i, B_i, $\mathrm{i} \in \{0, \ldots, m\}$, lassen sich bestimmen, indem man die im Ansatz genannte Funktion in (16) einsetzt und einen Koeffizientenvergleich durchführt. In [2] wird dies (allgemeiner) gezeigt.

Wir behaupten nun:

Man erhält alle global auf ganz J definierten Lösungen y der linearen (inhomogenen) Differentialgleichung (14), indem man zu einer beliebigen einzelnen Lösung $y_0\colon J \to \mathbb{R}$ alle Lösungen $y_{hom}\colon J \to \mathbb{R}$ der zugehörigen linearen homogenen Differentialgleichung $y'(x) = f(x)\,y(x)$ hinzuaddiert. (17)

[Beweis von (17): Sei $y_0\colon J \to \mathbb{R}$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (14).

1.) Ist $y_{hom}\colon J \to \mathbb{R}$ Lösung der homogenen Differentialgleichung (11), so erfüllt $y := y_0 + y_{hom}\colon J \to \mathbb{R}$

$$y'(x) = \underbrace{y_0'(x)}_{=f(x)\,y_0(x)+h(x)} + \underbrace{y_{hom}'(x)}_{=f(x)\,y_{hom}(x)} = f(x)\,y(x) + h(x),$$

ist also Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (14).

2.) Ist $y\colon J \to \mathbb{R}$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (14), so erfüllt $\tilde{y} := y - y_0\colon J \to \mathbb{R}$

$$\tilde{y}'(x) = \underbrace{y'(x)}_{=f(x)\,y(x)+h(x)} - \underbrace{y_0'(x)}_{=f(x)\,y_0(x)+h(x)} = f(x)\,\tilde{y}(x),$$

ist also Lösung der homogenen Differentialgleichung (11).]

Wegen (17) haben wir gezeigt:

Die Gesamtheit aller maximalen Lösungen von (14) ist ein eindimensionaler affiner Unterrraum von $\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$.

Wir betrachten nun die entsprechende Anfangswertaufgabe.

Sei $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$. Ist F die Stammfunktion von f mit $F(x_0) = 0$ und $\widetilde{C}$ die Stammfunktion von $h\,\mathrm{e}^{-F}$ mit $\widetilde{C}(x_0) = y_0$, so ist

$$y\colon J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \widetilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{F(x)}$$

Lösung von

$$y'(x) = f(x)\,y(x) + h(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Sie ist (bis auf Beschränkung) eindeutig bestimmt.

[Denn ist $\tilde{y}\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (14) mit $\tilde{y}(x_0) = y_0$, so folgt $\tilde{y} = y|_I$: Wegen

$$\forall_{x\in I}\,(y - \tilde{y})(x) = f(x)\,y(x) + h(x) - f(x)\,\tilde{y}(x) - h(x) = f(x)\,(y - \tilde{y})(x)$$

ist nämlich $y|_I - \tilde{y}\colon I \to R$ Lösung der zugehörigen linearen homogenen Differentialgleichung (11) mit $(y - \tilde{y})(x_0) = 0$, also nach 2.4: $y - \tilde{y} = 0$.]

2.6.

$$\boxed{y'(x) = f(a\,x + b\,y(x) + c),} \tag{18}$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $b \neq 0$ annehmen, denn andernfalls ist (18) gemäß 2.2 zu lösen. Wir führen die folgende naheliegende Substitution durch:

$$u(x) := a\,x + b\,y(x) + c.$$

Ist $y(x)$ Lösung von (18), so folgt

$$u'(x) = a + b\,y'(x) = a + b\,f(u(x)) = g(u(x)),$$

wobei $g\colon J \to \mathbb{R}$ stetig mit $\forall_{t\in J}\, g(t) = a + b\,f(t)$, d.h.

$$u \text{ ist Lösung der autonomen Differentialgleichung } u'(x) = g(u(x)). \tag{19}$$

(19) kann man gemäß 2.3 lösen.

Aus einer Lösung $u(x)$ wie in (19) erhält man umgekehrt

$$y(x) := \tfrac{1}{b}\,(u(x) - a\,x - c) \text{ ist Lösung von (18).} \tag{20}$$

[Denn es gilt $y'(x) = \frac{1}{b}\,(u'(x) - a) \overset{(19)}{=} f(u(x)) \overset{\text{Def.}u}{=} f(a\,x + b\,y(x) + c)$.]

Wir haben also gezeigt, daß man gemäß (19), (20) sämtliche Lösungen von (18) erhält.

2.7. Wir betrachten die sog. *homogene Differentialgleichung*:

$$\boxed{y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right),} \tag{21}$$

wobei $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Die rechte Seite von (21) ist für $x = 0$ nicht definiert, also sind alle Lösungen auf einem Teilintervall von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Wir substituieren

$$u(x) := \frac{y(x)}{x},$$

also $x\,u(x) = y(x)$.

Ist $y(x)$ Lösung von (21), so gilt

$$u(x) + x\,u'(x) = y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) = f(u(x)),$$

also

$$u'(x) = \frac{1}{x}\,(f(u(x)) - u(x)) = \frac{1}{x}\,g(x),$$

wobei $g\colon J \to \mathbb{R}$ stetig mit $\forall_{t\in J}\, g(t) = f(t) - t$, d.h.

$$u \text{ ist Lösung der Differentialgleichung } u'(x) = \tfrac{1}{x}\,g(u(x)). \tag{22}$$

(22) kann man gemäß 2.3 lösen.

Aus einer Lösung $u(x)$ wie in (22) erhält man umgekehrt

$$y(x) := x\,u(x) \text{ ist Lösung von (21).} \tag{23}$$

[Denn es gilt $y'(x) = u(x) + x\,u'(x) \overset{(22)}{=} f(u(x)) \overset{\text{Def.}u}{=} f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.]

Wir haben also gezeigt, daß man gemäß (22), (23) sämtliche Lösungen von (21) erhält.

2.8. Wir studieren nun die sog. *Ähnlichkeits-Differentialgleichung*, welche 2.6 und 2.7 verallgemeinert:

$$\boxed{y'(x) = f\left(\frac{a\,x + b\,y(x) + c}{\alpha\,x + \beta\,y(x) + \gamma}\right),} \tag{24}$$

wobei $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

1. Fall: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$.

1.1. Fall: $(\alpha, \beta) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Dann ist $y'(x) = f\left(\frac{a}{\gamma}\,x + \frac{b}{\gamma}\,y(x) + \frac{c}{\gamma}\right)$ gemäß 2.6 zu lösen.

1.2. Fall: $(\alpha, \beta) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Dann existiert wegen der linearen Abhängigkeit von (a, b) und (α, β) genau eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) = \lambda\,(\alpha, \beta)$.

Im Falle $\beta = 0$ folgt daher $b = 0$, und $y'(x) = f\left(\frac{a\,x+c}{\alpha\,x+\gamma}\right)$ ist gemäß 2.2 zu lösen.

Sei also im folgenden $\beta \neq 0$. Wir substituieren

$$u(x) := \alpha\,x + \beta\,y(x) + \gamma,$$

also ergibt (24)

$$u'(x) = \alpha + \beta\,y'(x) = \alpha + \beta\,f\left(\frac{\lambda\,u(x) + c - \lambda\gamma}{u(x)}\right) = g(u(x)), \tag{25}$$

wobei $g\colon J \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\forall_{t \in J}\, g(t) = \alpha + \beta\,f\left(\frac{\lambda t + c - \lambda\gamma}{t}\right)$, und die autonome Differentialgleichung (25) ist gemäß 2.3 zu lösen.

Es gilt:

$$u(x) \text{ Lösung von (25)} \Longrightarrow y(x) := \tfrac{1}{\beta}\,(u(x) - \alpha\,x - \gamma) \text{ Lösung von (24).}$$

$$\left[\; y'(x) = \tfrac{1}{\beta}\,(u'(x) - \alpha) = f\left(\tfrac{\lambda\,u(x)+c-\lambda\gamma}{u(x)}\right) = f\left(\tfrac{a\,x+b\,y(x)+c}{\alpha\,x+\beta\,y(x)+\gamma}\right).\right]$$

2. Fall: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$. Nach linearer Algebra existiert dann eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ des linearen Gleichungssystemes

$$\begin{array}{rcrcrcl} a\,x_1 & + & b\,y_1 & + & c & = & 0 \\ \alpha\,x_1 & + & \beta\,y_1 & + & \gamma & = & 0 \end{array} \tag{26}$$

Wie substituieren $t := x - x_1$ und $u(t) := y\,(t + x_1) - y_1$. Dann genügt $u(t)$ der Differentialgleichung

$$u'(t) = g\left(\frac{u(t)}{t}\right), \tag{27}$$

wobei $g\colon J \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\forall_{s \in J}\, g(s) = f\left(\frac{a+b\,s}{\alpha+\beta\,s}\right)$.

[Denn es gilt

$$u'(t) \quad = \quad y'(t + x_1) = f\left(\frac{a\,(t + x_1) + b\,\overbrace{y(t + x_1)}^{=u(t)+y_1} + c}{\alpha\,(t + x_1) + \beta\,\underbrace{y(t + x_1)}_{=u(t)+y_1} + \gamma}\right)$$

$$\overset{(26)}{=} \quad f\left(\frac{a\,t+b\,u(t)}{\alpha\,t+\beta\,u(t)}\right) = f\left(\frac{a+b\,\frac{u(t)}{t}}{\alpha+\beta\,\frac{u(t)}{t}}\right) = g\left(\frac{u(t)}{t}\right). \quad]$$

(27) ist gemäß 2.7 zu lösen, und es gilt:

$u(t)$ Lösung von (27) $\Longrightarrow$ $y(x) := u(x-x_1)+y_1$ Lösung von (24).

[Denn es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x-x_1) = f\left(\frac{a+b\,\frac{u(x-x_1)}{x-x_1}}{\alpha+\beta\,\frac{u(x-x_1)}{x-x_1}}\right) \\ &= f\left(\frac{a\,(x-x_1)+b\,\overbrace{u(x-x_1)}^{=y(x)-y_1}}{\alpha\,(x-x_1)+\beta\,\underbrace{u(x-x_1)}_{=y(x)-x_1}}\right) \overset{(26)}{=} f\left(\frac{a\,x+b\,y(x)+c}{\alpha\,x+\beta\,y(x)+\gamma}\right). \quad] \end{aligned}$$

Wir untersuchen im folgenden Verallgemeinerungen der linearen Differentialgleichung 2.5.

2.9. Die Differentialgleichung

$$\boxed{y'(x)+g(x)\,y(x)+h(x)\,y^{\alpha}(x)=0,} \tag{28}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und $g,h\colon J\to\mathbb{R}$ auf einem Intervall $J\subset\mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, heißt *Bernoullische Differentialgleichung*. (Beachte, daß man für $\alpha\in\{0,1\}$ eine lineare Differentialgleichung erhielte.)

Wir werden zeigen, daß sich alle Lösungen von (28) aus Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$z'(x)+(1-\alpha)\,g(x)\,z(x)+(1-\alpha)\,h(x)=0 \tag{29}$$

gewinnen lassen.

Mit $D\subset J\times\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge auf der die Funktion, die durch

$$f(x,y) := g(x)\,y+h(x)\,y^{\alpha}$$

gegeben ist, (definiert und) stetig ist. Beachte, daß $y^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\,\ln(y)}$ i.a. nur für $y>0$ definiert ist.

1.) Für beliebiges $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ gilt $J\times\mathbb{R}_+\subset D$. Wir bestimmen daher zunächst alle Lösungen von (28), deren Graphen in $J\times\mathbb{R}_+$ verlaufen.

Sei $y\colon I\to\mathbb{R}_+$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} &y \text{ Lösung von (28)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall_{x\in I}\; y'(x)+g(x)\,y(x)+h(x)\,y^{\alpha}(x)=0 \quad \Big|\cdot \underbrace{(1-\alpha)}_{\neq 0}\;\underbrace{y^{-\alpha}}_{>0} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall_{x\in I}\; \underbrace{(1-\alpha)\,y^{-\alpha}(x)\,y'(x)}_{=(y^{1-\alpha})'(x)}+(1-\alpha)\,g(x)\,y^{1-\alpha}(x)+(1-\alpha)\,h(x)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z:=y^{1-\alpha} \text{ Lösung von (29)}, \end{aligned}$$

also auch

$z\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lösung von (29) $\Longrightarrow y := z^{\frac{1}{1-\alpha}}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lösung von (28).

Damit haben wir gezeigt:

Durchläuft $z\colon \overbrace{I}^{\subset J} \to \mathbb{R}_+$ alle positiv-wertigen Lösungen der linearen Differentialgleichung (29), (welche nach 2.5 Beschränkungen auf ganz J definierter Lösungen $\tilde{z}\colon J \to \mathbb{R}$, die i.a. auch Werte ≤ 0 haben, sind), so durchläuft $y := z^{\frac{1}{1-\alpha}}\colon I \to \mathbb{R}_+$ alle positiv-wertigen Lösungen von (28). (30)

Insbesondere ergibt (30):

Die Anfangswertaufgabe (28), $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_+$ ist (lokal) eindeutig lösbar.

2.) Im Spezialfall $\alpha > 0$ von 1.) ist zusätzlich auch $J \times \{0\} \subset D$, d.h. es gilt $J \times [0, \infty[\subset D$. Denn dann ist y^α definiert und stetig für $y \geq 0$, wobei $0^\alpha := 0$ für $\alpha > 0$.

Es gilt:

Die konstante Funktion $y = 0\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lösung von (28). (31)

Ob Lösungen nach (links oder rechts) oben von der konstanten Lösung $= 0$ abzweigen, hängt von g, h und α ab. Z.B. ist $y' = \sqrt{y}$ für $y \geq 0$, also $y'(x) - y^{1/2}(x) = 0$ für $y \geq 0$, eine Bernoullische Differentialgleichung, von der wir bereits wissen, daß Verzweigungen nach rechts oben auftreten, vgl. 2.3.

3.) Im Spezialfall $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist zusätzlich auch $J \times \mathbb{R}_- \subset D$, also $J \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset D$. Denn dann gilt $y^\alpha = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha} y, & \alpha \geq 0 \\ \frac{1}{\prod_{i=1}^{\alpha} y}, & \alpha < 0. \end{cases}$

Wir bestimmen im folgenden alle Lösungen von (28), deren Graphen in $J \times \mathbb{R}_-$ verlaufen. Dabei müssen wir eine Fallunterscheidung machen.

1. Fall: $\alpha \in \mathbb{Z}$ ungerade. Sei $y\colon I \to \mathbb{R}_-$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt offenbar (wegen $(-1)^\alpha = -1$):

$$\begin{aligned} & y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_- \text{ Lösung von (28)} \\ \iff\ & -y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ Lösung von (28)} \\ \overset{(30)}{\iff}\ & -y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ wobei } z\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ Lösung von (29).} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

Durchläuft $z\colon \overbrace{I}^{\subset J} \to \mathbb{R}_+$ alle positiv-wertigen Lösungen der linearen Differentialgleichung (29), (welche nach 2.5 Beschränkungen auf ganz J definierter Lösungen $\tilde{z}\colon J \to \mathbb{R}$, die i.a. auch Werte ≤ 0 haben, sind), so durchläuft $y := -z^{\frac{1}{1-\alpha}}\colon I \to \mathbb{R}_-$ alle negativ-wertigen Lösungen von (28). (32)

2. Fall: $\alpha \in \mathbb{Z}$ gerade. Sei $y\colon I \to \mathbb{R}_-$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt (wegen $(-1)^\alpha = 1$):

$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_-$ Lösung von (28)

$\iff$ $-y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lösung von

$$\tilde{y}'(x) + g(x)\,\tilde{y}(x) - h(x)\,\tilde{y}^{\alpha}(x) = 0 \tag{33}$$

$\iff$ $\tilde{z} := -y^{1-\alpha} = (-y)^{1-\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lösung von

$$\tilde{z}'(x) + (1-\alpha)\,g(x)\,\tilde{z}(x) - (1-\alpha)\,h(x) = 0 \tag{34}$$

$\iff$ $z := -\tilde{z} = y^{1-\alpha} = -(-y)^{1-\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_-$ Lösung von (29).

Beachte, daß man (33) und (34) aus (28) und (29) erhält, indem man h durch $-h$ ersetzt.

Damit ist gezeigt:

Durchläuft $z\colon \overbrace{I}^{\subset J} \to \mathbb{R}_-$ alle negativ-wertigen Lösungen der linearen Differentialgleichung (29), (welche nach 2.5 Beschränkungen auf ganz J definierter Lösungen $\tilde{z}\colon J \to \mathbb{R}$, die i.a. auch Werte ≥ 0 haben, sind), so durchläuft $y := -(-z)^{\frac{1}{1-\alpha}}\colon I \to \mathbb{R}_-$ alle negativ-wertigen Lösungen von (28). (35)

Wir haben insbesondere für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$ gezeigt:

Die Anfangswertaufgabe (28), $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_-$ ist (lokal) eindeutig lösbar.

Insgesamt haben wir gezeigt:

Durch (30), (31), (32) und (35) sind alle positiv-, null- bzw. negativwertigen Lösungen beschrieben. Diese lassen sich eventuell zu „größeren“ Lösungen zusammensetzen.

2.10. Die *Riccatische Differentialgleichung* verallgemeinert die Bernoullische Differentialgleichung im Falle $\alpha = 2$:

$$\boxed{y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^2(x) = k(x),} \tag{36}$$

wobei $g, h, k\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf 3.17, den wir im nächsten Kapitel beweisen werden, folgt sofort:

Die Anfangswertaufgabe (36), $y(x_0) = y_0$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung mit maximalem Definitionsbereich; es treten also keine Verzweigungen auf.

Allerdings lassen sich die Lösungen i.a. nicht in „geschlossener Form“, d.h. durch explizite Formeln angeben. Kennt man jedoch eine einzige Lösung $y_0\colon I_0 \to \mathbb{R}$, $I_0 \subset J$, von (36) (z.B. durch „Raten“), so lassen sich alle Lösungen $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (36) mit $I \subset I_0$ explizit angeben:

Sei also $y_0\colon I_0 \to \mathbb{R}$ eine fest gewählte Lösung von (36). Ist dann $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion mit $I \subset I_0$ und definiert man $u := y - y_0$, so folgt

y Lösung von (36)

$$\iff \forall_{x\in I}\,(\underbrace{y'-y_0'}_{=u'})(x)+g(x)\,(\underbrace{y-y_0}_{=u})(x)+h(x)\,(\underbrace{\quad y^2-y_0^2\quad}_{\substack{=(y-y_0)(y+y_0)\\=u(u+2y_0)}})(x)=0,$$

d.h. u genügt der Bernoullischen Differentialgleichung

$$u'(x)+\big(g(x)+2\,y_0(x)\,h(x)\big)\;u(x)+h(x)\,u^2(x)=0. \tag{37}$$

Nach 2.9 gewinnt man alle Lösungen von (37) aus Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$z'(x)-\big(g(x)+2\,y_0(x)\,h(x)\big)\;z(x)-h(x)=0. \tag{38}$$

Genauer gilt nach (30), (35) und (31):

Durchläuft $z\colon \overbrace{I}^{\subset I_0} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ alle überall von Null verschiedenen Lösungen von (38), so durchläuft $u := \frac{1}{z}\colon I\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ alle überall von Null verschiedenen Lösungen von (37). Ferner ist $u=0$ eine Lösung von (37).

Damit folgt schließlich:

Durchläuft $z\colon I\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ alle Lösungen von (38), die keine Nullstellen besitzen, so durchläuft $y_0+\frac{1}{z}\colon I\to\mathbb{R}$ alle Lösungen von (36), die auf einem Teilintervall I von I_0 definiert sind und nicht Beschränkung von y_0 sind.

3 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Existenz- und Eindeutigkeitssätze lassen sich besonders elegant unter Verwendung funktionalanalytischer Methoden gewinnen. Wir beweisen daher in diesem Kapitel auch Ergebnisse der Funktionalanalysis - z.B. den Satz von Arzela-Ascoli, welchen wir nun vorbereiten.

Definition 3.1 (Gleichgradige Stetigkeit)**.** Seien M, N metrische Räume und $\mathcal{F}$ eine Familie von Abbildungen $M \to N$.

$\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig in* $p \in M$ genau dann, wenn gilt

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{f \in \mathcal{F}} \, f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p)).$$

$\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig* genau dann, wenn $\mathcal{F}$ in jedem $p \in M$ gleichgradig stetig ist.

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $f_n \colon M \to N$ heißt *gleichgradig stetig (in* $p \in M$*)* genau dann, wenn $\mathcal{F} := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig (in $p \in M$) ist.

Beispiel. Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subset V$ und $\mathcal{F}$ eine Familie von Abbildungen $D \to W$, die einer *Lipschitzbedingung*

$$\forall_{f \in \mathcal{F}} \forall_{p,q \in D} \, \|f(p) - f(q)\| \leq L \, \|p - q\|$$

mit einer einheitlichen *Lipschitzkonstanten* $L \in \mathbb{R}_+$ genügen.

Dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig. [Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$.]

Obwohl wir den Satz von Arzela-Ascoli später nur für den Fall $K = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, benötigen werden, beweisen wir ihn für beliebige kompakte metrische Räume, da der Beweis im wesentlichen derselbe ist, abgesehen von dem folgenden benötigten Lemma, welches im Falle $K = [a, b]$ trivial ist.

Lemma 3.2. *Sei K ein kompakter*[3] *metrischer Raum.*

Dann existiert eine höchstens abzählbare dichte[4] *Teilmenge A von K.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $\left(U_{\frac{1}{n}}(p)\right)_{p \in K}$ eine offene Überdeckung von K, folglich existiert eine endliche Teilmenge A_n von K mit

$$K = \bigcup_{p \in A_n} U_{\frac{1}{n}}(p). \tag{39}$$

$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$ ist daher eine höchstens abzählbare Teilmenge von K, und wir zeigen, daß gilt $\overline{A} = K$, d.h. $\overline{A} \supset K$:

Sei $p_0 \in K$ beliebig. Zu zeigen ist

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{p \in A} \underbrace{p_0 \in U_\varepsilon(p)}_{\Leftrightarrow p \in U_\varepsilon(p_0)}, \tag{40}$$

denn nach Analysis gilt $\overline{A} = \{p \in K \mid \forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,K)} \, U \cap A \neq \varnothing\}$.´

Beweis von (40): Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig und wähle $n \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wegen $p_0 \in K \overset{(39)}{=} \bigcup_{p \in A_n} U_{\frac{1}{n}}(p)$ existiert dann $p \in A_n \subset A$ mit $p_0 \in U_{\frac{1}{n}}(p) \subset U_\varepsilon(p)$. □

[3] Eine Teilmenge K eines topologischer Raumes X heißt *kompakt* genau dann, wenn jede Überdeckung von K durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

[4] Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *dicht* genau dann, wenn für ihre abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ gilt $\overline{A} = X$.

Satz 3.3 (von Arzela-Ascoli).
Vor.: *Seien K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum (mit Norm $\|\dots\|$), also ist V ein $\mathbb{R}$-Banachraum*[5]*. Dann ist nach Übung 3.2 auch der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}(K,V)$ aller stetigen Abbildungen $K \to V$, versehen mit der Norm*

$$\forall_{g \in \mathcal{C}(K,V)} \|g\|_\infty := \max\{\|g(p)\| \,|\, p \in K\},$$

ein $\mathbb{R}$-Banachraum.
Beh.: *Jede gleichgradig stetige, beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(K,V)$ besitzt eine Teilfolge, die in dem $\mathbb{R}$-Banachraum $\mathcal{C}(K,V)$ konvergiert, (d.h. genau, „die auf K gleichmäßig gegen eine Abbildung $f \in \mathcal{C}(K,V)$ konvergiert".)*

Beweis. Nach 3.2 existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K, die in K dicht liegt, d.h. mit $\overline{\{p_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}} = K$. Nach Voraussetzung existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty \le C$. Wegen $\|f_n(p_0)\| \le \|f_n\|_\infty \le C$ ist $(f_n(p_0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in V, besitzt also nach Bolzano-Weierstraß eine in V konvergente Teilfolge. Daher existiert eine Teilfolge $(f_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß gilt

$$(f_{0n}(p_0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } V.$$

Weiterhin existiert (wegen der Beschränktheit der Folge $(f_{0n}(p_1))_{n\in\mathbb{N}}$ in V) eine Teilfolge $(f_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß gilt

$$(f_{1n}(p_1))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } V,$$

sodann ebenso eine Teilfolge $(f_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß gilt

$$(f_{2n}(p_2))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } V,$$

u.s.w.

Wir haben auf diese Weise eine Doppelfolge in $\mathcal{F} := \{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ definiert:

$$\begin{array}{cccc} f_{00}, & f_{01}, & f_{02}, & \dots \\ f_{10}, & f_{11}, & f_{12}, & \dots \\ f_{20}, & f_{21}, & f_{22}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{konvergiert an der Stelle } p_0 \\ \text{konvergiert an den Stellen } p_0, p_1 \\ \text{konvergiert an den Stellen } p_0, p_1, p_2 \end{array}$$

Jede Zeile ist Teilfolge der vorhergehenden Zeile und von der Ausgangsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt

$$\forall_{i\in\mathbb{N}} (f_{in}(p_j))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } V \text{ für } j \in \{0,\dots,i\}.$$

Wir betrachten nun die Diagonalfolge $(f_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$. Es folgt:

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} (f_{nn}(p_j))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } V.$$

[Denn $f_{jj}(p_j), f_{j+1,j+1}(p_j), f_{j+2,j+2}(p_j), \dots$ ist offenbar Teilfolge der Folge $f_{jj}(p_j), f_{j,j+1}(p_j), f_{j,j+2}(p_j), \dots$, die in V konvergiert.]

Die Behauptung des Satzes folgt nun aus dem folgenden Lemmma, angewandt auf $A := \{p_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ und $g_n := f_{nn}$:

[5] Ein $\mathbb{K}$-*Banachraum* ist ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, der als metrischer Raum vollständig ist, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Lemma.
Vor.: *Seien K, V wie in der Voraussetzung des Satzes. Ferner seien A eine dichte Teilmenge von K und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichgradig stetige Folge in $\mathcal{C}(K,V)$ mit*

$$\forall_{a\in A}\,(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } V.$$

Beh.: *$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{C}(K,V)$, (d.h. konvergiert auf K gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung $f\colon K\to V$.)*

Beweis des Lemmas. Es genügt zu zeigen, daß $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}(K,V)$ ist.

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert zu jedem $q\in K$ ein $\delta_q\in\mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, g_n(U_{\delta_q}(q)) \subset U_{\frac{\varepsilon}{5}}(g_n(q)), \tag{41}$$

und wegen der Kompaktheit von K existieren endlich viele $p_1,\dots p_k\in K$ mit

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} U_{\delta_{p_i}}(p_i). \tag{42}$$

Für jedes $i\in\{1,\dots,k\}$ folgt aus $p_i\in K=\overline{A}$ die Existenz eines

$$a_i\in A\cap U_{\delta_{p_i}}(p_i). \tag{43}$$

$(g_n(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent, also Cauchy-Folge in V für $i\in\{1,\dots,k\}$, folglich existiert ein (gemeinsames) $n_0\in\mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n,m\geq n_0}\,\|g_n(a_i)-g_m(a_i)\| < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{44}$$

Wir zeigen, daß dann gilt

$$\forall_{n,m\geq n_0}\,\|g_n-g_m\|_\infty < \varepsilon:$$

Zu beliebigem $p\in K$ existiert nach (42) ein $i\in\{1,\dots,k\}$ mit

$$p\in U_{\delta_{p_i}}(p_i), \tag{45}$$

und es folgt für alle $n,m\geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\|g_n(p)-g_m(p)\|\\
&\leq \underbrace{\|g_n(p)-g_n(p_i)\|}_{\substack{(45),(41),q=p_i\\ <\ \frac{\varepsilon}{5}}} + \underbrace{\|g_n(p_i)-g_n(a_i)\|}_{\substack{(43),(41),q=p_i\\ <\ \frac{\varepsilon}{5}}} + \underbrace{\|g_n(a_i)-g_m(a_i)\|}_{\substack{(44)\\ <\ \frac{\varepsilon}{5}}}\\
&\quad + \underbrace{\|g_m(a_i)-g_m(p_i)\|}_{\substack{(43),(41),q=p_i\\ <\ \frac{\varepsilon}{5}}} + \underbrace{\|g_m(p_i)-g_m(p)\|}_{\substack{(45),(41),q=p_i\\ <\ \frac{\varepsilon}{5}}}\\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3.4 (Das Riemann-Integral für Abbildung $f\colon [a,b] \to V$, V endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum)**.** Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(i) Eine Abbildung $f\colon [a,b] \to V$ heißt *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$ genau dann, wenn gilt

$$\forall_{l \in V^* = \mathcal{L}(V,\mathbb{R})} \quad l \circ f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist beschränkt und Riemann-integrierbar i.S.d. Analysis I.}$$

Ist dies der Fall, so existiert genau ein $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \in V$, das sog. *Riemann-Integral von f über $[a,b]$*, mit

$$\forall_{l \in V^*} \; l\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b (l \circ f)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{46}$$

[Denn die Funktion

$$\Lambda\colon V^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l \longmapsto \int_a^b (l \circ f)(x)\,\mathrm{d}x,$$

ist offenbar $\mathbb{R}$-linear, also gilt $\Lambda \in (V^*)^*$. Nach linearer Algebra ist

$$V \longrightarrow (V^*)^*, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} V^* & \to & \mathbb{R} \\ l & \mapsto & l(v) \end{pmatrix}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, also existiert genau ein Element $v = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in V$ wie in (46).]

Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ist (46) äquivalent zu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{47}$$

Offenbar ist jede stetige Abbildung $f\colon [a,b] \to V$ Riemann-integrierbar.

(ii) Seien $f\colon [a,b] \to V$ eine Abbildung, $\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < \ldots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}$, d.h. per definitionem $a_{i-1} \le \xi_i \le a_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Wir definieren die *Riemannsche Summe von f bzgl. $\mathfrak{Z}$ und Ξ* als

$$\boxed{\mathfrak{R}(f, \mathfrak{Z}, \Xi)} := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1})\, f(\xi_i) \in V. \tag{48}$$

(iii) Seien $f\colon [a,b] \to V$ eine Riemann-integrierbare Abbildung, $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$, (d.h. eine solche, deren maximale Intervallänge gegen Null konvergiert) und Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu). \tag{49}$$

[Denn für jedes $l \in V^*$ gilt

$$l\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \overset{(46)}{=} \int_a^b (l\circ f)(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Analysis}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}(l\circ f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)$$
$$\overset{(48),\,l\text{ linear}}{=} \lim_{\nu\to\infty} l\left(\mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)\right),$$

und dies ist gleichbedeutend mit (49).]

(iv) a) Sind $f_1, f_2\colon [a,b] \to V$ zwei Riemann-integrierbare Abbildungen in V und $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\colon [a,b] \to V$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Die konstante Abbildung $f\colon [a,b] \to V$ vom Wert v ist Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,v.$$

c) Ist $f\colon [a,b] \to V$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, so gilt

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{50}$$

d) Ist $g\colon [a,b] \to V$ stetig und ist $f\colon [a,b] \to V$ definiert durch

$$f(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

so ist f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, und es gilt

$$\forall_{x\in[a,b]}\, f'(x) = g(x).$$

(Dies gilt auch für ein beliebiges Intervall. Man definiert wie in der Analysis $\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x := 0$.)

[Zu a): Für alle $l \in V^*$ sind $l \circ f_1, l \circ f_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Voraussetzung Riemann-integrierbar, also auch $\lambda_1(l \circ f_1) + \lambda_2(l \circ f_2) \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (nach Analysis). Hieraus folgt, daß $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \colon [a,b] \to V$ Riemann-integrierbar ist, denn die Linearität von l liefert $\lambda_1(l \circ f_1) + \lambda_2(l \circ f_2) = l \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$.

Des weiteren gilt für jedes $l \in V^*$

$$\begin{aligned}
l\left(\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,\mathrm{d}x\right) &\overset{(46)}{=} \int_a^b \left(\lambda_1(l \circ f_1) + \lambda_2(l \circ f_2)\right)(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Analysis}}{=} \lambda_1 \int_a^b (l \circ f_1)(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b (l \circ f_2)(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(46)}{=} \lambda_1 l\left(\int_a^b x_1(x)\,\mathrm{d}x\right) + \lambda_2 l\left(\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{l \text{ linear}}{=} l\left(\lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

also folgt a).

Zu b): Für jedes $l \in V^*$ ist $l \circ f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant, also nach Analysis Riemann-integrierbar. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
l\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) &\overset{(46)}{=} \int_a^b \underbrace{(l \circ f)(x)}_{=l(v)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Analysis}}{=} (b-a)\,l(v) \\
&\overset{l \text{ linear}}{=} l\left((b-a)\,v\right),
\end{aligned}$$

also folgt b).

Zu c): f' ist nach Voraussetzung stetig, also nach (i) Riemann-integrierbar. Des weiteren gilt für jedes $l \in V^*$ und $x \in [a,b]$

$$(l \circ f)'(x) = \mathrm{d}_x(l \circ f)(1) = \mathrm{d}_{f(x)} l \circ \mathrm{d}_x f(1) \overset{l \text{ linear}}{=} l \circ \mathrm{d}_x f(1) = l \circ c'(x),$$

also auch

$$\begin{aligned}
l\left(\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right) &\overset{(46)}{=} \int_a^b (l \circ f')(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (l \circ f)'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Analysis}}{=} (l \circ f)(b) - (l \circ f)(a) \overset{l \text{ linear}}{=} l(f(b) - f(a)).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt c).

Zu d): Seien $x \in [a,b]$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $[a,b] \setminus \{x\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Dann folgt für alle $l \in V^*$

$$l(f(x_n)) - l(f(x)) \overset{\text{Def.}}{=} l\left(\int_a^{x_n} g(t)\,\mathrm{d}t\right) - l\left(\int_a^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\overset{(46)}{=} \int_a^{x_n} (l \circ g)(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} (l \circ g)(t)\,\mathrm{d}t,$$

also

$$l\left(\frac{l(f(x_n)) - l(f(x))}{x_n - x}\right) = \frac{1}{x_n - x}\left(\int_a^{x_n} (l \circ g)(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} (l \circ g)(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

und nach Analysis konvergiert die rechte Seite für n gegen ∞ gegen $(l \circ g)(x) = l(g(x))$. Es ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = g(x).$$

Damit ist d) klar.]

(v) Seien $\|\ldots\|$ eine beliebige Norm auf V und $f\colon [a,b] \to V$ stetig, also ist auch $\|f\|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x. \tag{51}$$

[Denn seien $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge ausgezeichneter Zerlegungen von $[a,b]$ und Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\| &\overset{(49)}{=} \lim_{\nu\to\infty} \underbrace{\|\mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)\|}_{\overset{(48)}{\leq}\mathfrak{R}(\|f\|,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)} \\ &\overset{\text{Analysis}}{\leq} \int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x. \qquad]\end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, daß das Lösen eines Anfangswertproblemes gleichbedeutend mit dem Auffinden eines Fixpunktes eines gewissen Operators ist.

Satz 3.5.
Vor.: *Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ und $f\colon D \to V$ stetig. Ferner seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $y\colon I \to V$ eine Abbildung mit* $\operatorname{Graph} y \subset D$, *d.h.* $\forall_{x\in I}\,(x, y(x)) \in D$.
Beh.: *y ist genau dann Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

wenn y stetig ist und

$$\forall_{x\in I}\, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

gilt.

Beweis. „⇒“ y ist differenzierbar, also stetig. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V, \quad t \longmapsto f(t, y(t))$$

ist stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Die rechte Seite von (52) ist daher nach 3.4 eine differenzierbare Abbildung $z\colon I \to V$ mit

$$\forall_{x \in I}\, z'(x) = f(x, y(x)) = y'(x), \quad z(x_0) = y_0,$$

weshalb nach Analysis gilt $y = z$.

„⇐“ ist klar nach 3.4 (iv) d). □

Satz 3.6 (Fortsetzbarkeit von Lösungen einer Differentialgleichung)**.**
Vor.: *Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ und $f\colon D \to V$ stetig.*
Beh.: *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $y\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

und es existiere eine kompakte Teilmenge K von D mit $\operatorname{Graph} y \subset K$.

Dann läßt sich y fortsetzen zu einer Lösung $\tilde{y}\colon [a, b] \to V$ obiger Differentialgleichung.

Beweis. Sei $\| \dots \|$ eine Norm auf V. Dann ist die stetige Funktion $\|f\|\colon D \to \mathbb{R}$ auf dem Kompaktum K beschränkt, d.h.

$$\exists_{C \in \mathbb{R}}\, \|f\|_K \leq C. \tag{53}$$

Nach 3.5 „⇒“ gilt

$$\forall_{x \in [a,b[}\, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t, \tag{54}$$

und es folgt

$$\forall_{x, \tilde{x} \in [a,b[}\, \|y(x) - y(\tilde{x})\| \leq C\,|x - \tilde{x}|. \tag{55}$$

[Zu (55): Denn für $x, \tilde{x} \in [a, b[$ gilt

$$\begin{aligned} \|y(x) - y(\tilde{x})\| &\overset{(54)}{=} \left\| \int_{\tilde{x}}^{x} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{(51)}{\leq} \left| \int_{\tilde{x}}^{x} \underbrace{\| \underbrace{f(t, y(t))}_{\in K} \|}_{\overset{(53)}{\leq} C} \, \mathrm{d}t \right| \leq C\,|x - \tilde{x}|, \end{aligned}$$

beachte, daß die Betragsstriche nach der ersten Abschätzung notwendig sind, da $\tilde{x} > x$ möglich ist.]

Es gilt:

y ist fortsetzbar zu einer stetigen Abbildung $\tilde{y}\colon [a, b] \to V$ derart, daß gilt $\operatorname{Graph} \tilde{y} \subset K$. (56)

[Zum Beweis von (56) sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b[$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Dann ist $(x_n, y(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der kompakten und damit folgenkompakten Menge K, besitzt also eine in K konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $(y(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein Element y_* mit $(b, y_*) \in K \subset D$ konvergiert.

Wir definieren $\tilde{y}\colon [a,b] \to V$ durch $\tilde{y}|_{[a,b[} := y$ und $\tilde{y}(b) := y_*$. Zu zeigen ist die Stetigkeit von $\tilde{y}$ in b.

Beweis hiervon: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{2\delta}$. Dann gilt nach (55)

$$\forall_{x,\tilde{x}\in[a,b[}\, |x-\tilde{x}| < \delta \Longrightarrow \|y(x) - y(\tilde{x})\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$b - \delta < x_k < b \quad \text{und} \quad \|y(x_k) - y_*\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also folgt für alle $x \in [a,b[$ mit $|x-b| < \delta$, d.h. $b-\delta < x < b$ und $|x - x_k| < \delta$

$$\| \underbrace{\tilde{y}(x)}_{=y(x)} - \underbrace{\tilde{y}(b)}_{=y_*} \| \le \underbrace{\|y(x) - y(x_k)\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|y(x_k) - y_*\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

d.h. $\tilde{y}$ ist stetig in b.]

Wegen (54) gilt für alle $x \in [a,b[$ (beachte $\tilde{y}|_{[a,b[} = y$)

$$\underbrace{\tilde{y}(x)}_{\text{stetig in } b \text{ (nach (56))}} = y_0 + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f\ \underbrace{(t, \tilde{y}(t))}_{[a,b]\to K\subset D \text{ stetig (nach (56))}}}_{\text{stetig in } b \text{ (nach 3.4 (iv) d))}} \mathrm{d}t, \qquad (57)$$

also gilt (57) sogar für alle $x \in [a,b]$ und $\tilde{y}$ ist nach (56) stetig. Daher folgt aus 3.5 „$\Leftarrow$“, daß $\tilde{y}$ Lösung von $y'(x) = f(x, y(x))$ ist. □

Satz 3.7 (Existenzsatz von Peano für Streifen)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $J := [x_0, x_0 + a]$, $D := J \times V$ und $y_0 \in V$. $f\colon D \to V$ sei stetig und beschränkt, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f\| \le C$.*
Beh.: *Die Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0}$$

besitzt mindestens eine auf ganz J definierte Lösung.

Zusatz. *Der Satz gilt auch für Intervalle der Form a) $J = [x_0 - a, x_0]$, $a \in \mathbb{R}_+$, oder b) $J = [x_0 - a_1, x_0 + a_2]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Der Zusatz folgt im Falle a) durch Anwendung des Satzes auf

$$\tilde{f}(x,y) := -f(-x,y)\colon [-x_0, -x_0 + a] \times V \longrightarrow V.$$

Man erhält eine Lösung $\tilde{y}$ und setze dann $y(x) := \tilde{y}(-x)\colon [x_0 + a, x_0] \to V$.

Im Falle b) ergibt sich der Zusatz durch Zusammensetzen der Lösungen $y_1\colon [x_0 - a_1, x_0] \to V$ und $y_2\colon [x_0, x_0 + a_2] \to V$ mit $y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0)$, welche nach a) und dem Satz existieren.

Zum Beweis des Satzes: Nach 3.5 müssen wir eine stetige Lösung $y\colon J \to V$ der Integralgleichung

$$\forall_{x \in J}\, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \tag{58}$$

finden.

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine stetige Abbildung $z_n\colon]-\infty, x_0 + a] \to V$ durch

$$z_n|_{]-\infty, x_0]} := y_0,$$

$$\forall_{k \in \{1,\ldots,n\}}\, \forall_{x \in [x_0 + \frac{k-1}{n}a,\, x_0 + \frac{k}{n}a]}\; z_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, z_n\left(t - \frac{a}{n}\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

und setze

$$\phi_n := z_n|_J \in \mathcal{C}(J, V).$$

Wir zeigen mittels Arzela-Ascoli:

Es existiert eine Teilfolge $(\phi_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die in $\mathcal{C}(J, V)$ konvergent ist, d.h. gleichmäßig auf J gegen eine stetige Abbildung $y\colon J \to V$ konvergiert. (59)

Hieraus folgt dann nach Definition von z_{i_n}

$$\forall_{x \in J}\quad \underbrace{\phi_{i_n}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right)\,\mathrm{d}t. \tag{60}$$

Sodann werden wir zeigen:

$\left(f\left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ konvergiert gleichmäßig für $t \in J$ gegen $f(t, y(t))$. (61)

Aus (60), (61) folgt sofort (58) und der Satz ist bewiesen.

Zu (59) und (61): Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\forall_{x \in]-\infty, x_0 + a]}\; \|z_n(x_1) - z_n(x_2)\| \le C\,|x_1 - x_2|. \tag{62}$$

[Zu (62): Ohne Einschränkung sei $x_2 \le x_1$.

1. Fall: $x_1 < x_0$. Dann gilt $\|z_n(x_1) - z_n(x_2)\| = \|y_0 - y_0\| = 0$.

2. Fall: $x_2 \le x_0 \le x_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|z_n(x_1) - z_n(x_2)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x_1} f\left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right)\,\mathrm{d}t \right\| \le \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left\| f\left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right)\right\|}_{\le C}\,\mathrm{d}t \\ &\le C\,(x_1 - x_0) \le C\,(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

3. Fall: $x_0 < x_2$. Dann folgt erneut wegen $\|f\| \le C$

$$\|z_n(x_1) - z_n(x_2)\| = \left\| \int_{x_2}^{x_1} f\left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right) \mathrm{d}t \right\| \le C\,(x_1 - x_2). \quad]$$

Aus (62) folgt für $n \in \mathbb{N}_+$

$$\forall_{t \in J=[x_0, x_0+a]} \quad \| \overbrace{z_n\left(t - \tfrac{a}{n}\right)}^{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_n(t)} - \overbrace{y_0}^{=z_n(x_0)} \| \begin{cases} = 0, & t - \frac{a}{n} < x_0, \\ \le C\,a, & t - \frac{a}{n} \ge x_0 \end{cases} \tag{63}$$
$$\text{und } \|z_n(t) - y_0\| \le C\,a.$$

Aus der Definition von ϕ_n, (62) und (63) folgt für jedes $n \in \mathbb{N}_+$

$$\forall_{x_1, x_2 \in J} \|\phi_n(x_1) - \phi_n(x_2)\| \le C\,\|x_1 - x_2\|$$

und

$$\forall_{x \in J} \|\phi_n(x)\| \le \|\phi_n(x) - y_0\| + \|y_0\| \le C\,a + \|y_0\| =: C_1,$$

d.h. $\|\phi_n\|_\infty \le C_1$. Daher ist die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ aus $\mathcal{C}(J, V)$ nach 3.1 Beispiel gleichgradig stetig und beschränkt. (59) folgt nun aus den Satz von Arzela-Ascoli 3.3.

Zu zeigen bleibt (61): Wegen

$$\forall_{t \in J} \left\| z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right) - y(t) \right\| \le \underbrace{\left\| z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right) - z_{i_n}(t) \right\|}_{\overset{(62)}{\le} C\frac{a}{i_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \| \underbrace{z_{i_n}(t)}_{=\phi_{i_n}(t)} - y(t) \|$$

und wegen (59) konvergiert auch $\left(z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gleichmäßig für $t \in J$ gegen $y(t)$. Ferner gilt nach (63)

$$\forall_{t \in J} \left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right) \in J \times \{v \in V \mid \|v - y_0\| \le C\} =: K \text{ kompakt},$$

$\left(t, z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ konvergiert für $t \in J$ gleichmäßig gegen $(t, y(t))$, also auch $(t, y(t)) \in K$, und $f|_K \colon K \to V$ ist als stetige Abbildung auf dem Kompaktum $K \subset (\mathbb{R} \times V)$[6] bekanntlich gleichmäßig stetig. Hieraus folgt (61) folgendermaßen:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann existiert zunächst ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß

$$\forall_{(t_1, v_1), (t_2, v_2) \in K} \|(t_1, v_1) - (t_2, v_2)\| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1, v_1) - f(t_2, v_2)\| < \varepsilon$$

und sodann ein $n_0 \in \mathbb{N}_+$ derart, daß

$$\forall_{n \ge n_0} \forall_{t \in J} \left\| z_{i_n}\left(t - \frac{a}{i_n}\right) - y(t) \right\| < \delta,$$

[6] normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\|(t, v)\| = \max\{|t|, \|v\|\}$

also

$$\forall_{n\geq n_0}\forall_{t\in J}\left\|\underbrace{f\left(t, z_{i_n}\left(t-\frac{a}{i_n}\right)\right)}_{\in K} - f\underbrace{(t,y(t))}_{\in K}\right\| < \varepsilon.$$

Auf (59) und (61) hatten wir den Satz zurückgeführt, welcher damit vollständig bewiesen ist. □

Satz 3.8 (Existenzsatz von Peano für Rechtecke)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes kompaktes Intervall, $x_0 \in J$, und $D := J \times \{v \in V \mid \|v - y_0\| \leq b\}$ mit $y_0 \in V$, $b \in \mathbb{R}_+$. $f\colon D \to V$ sei stetig und beschränkt, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f\| \leq C$.*
Beh.: *Die Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0}$$

besitzt mindestens eine Lösung $y\colon \underbrace{J \cap [x_0 - \frac{b}{C}, x_0 + \frac{b}{C}]}_{=:I} \to V$.

Beweis. Wir definieren eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}\colon J\times V \to V$ auf den Streifen $J \times V$ von f mit $\|f\| \leq C$ durch

$$\forall_{(x,y)\in J\times V}\, \tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \|y - y_0\| \leq b, \text{ d.h. } (x,y) \in D, \\ f\Big(x, \underbrace{y_0 - b\,\frac{y-y_0}{\|y-y_0\|}}_{=y \text{ für } \|y-y_0\|=b}\Big), & \|y - y_0\| \geq b. \end{cases}$$

Nach 3.7 inkl. Zusatz existiert eine Lösung $\tilde{y}\colon J \to V$ der Anfangswertaufgabe $y'(x) = \tilde{f}(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$. Daher gilt nach 3.5

$$\forall_{x\in I}\, \tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} \forall_{x\in I}\, \|\tilde{y}(x) - y_0\| &= \left\|\int_{x_0}^{x} \tilde{f}(t,\tilde{y}(t))\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_{x_0}^{x} \overbrace{\|\tilde{f}(t,\tilde{y}(t))\|}^{\leq C}\,\mathrm{d}t \\ &\leq C\,\underbrace{|x - x_0|}_{\leq \frac{C}{b}} \leq b \end{aligned}$$

und sodann nach Definition von $\tilde{f}$

$$\forall_{x\in I}\, \tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \tilde{y}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Somit ist $y := \tilde{y}|_I$ nach 3.5 eine Lösung von $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$. □

Satz 3.9 (Lokaler Existenzsatz von Peano).
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f\colon D \to V$ stetig.*
Beh.: *Es existieren $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und mindestens eine Lösung $y\colon [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to V$ der Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.}$$

Beweis. Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V. Wegen der Offenheit von D existiert $b \in \mathbb{R}_+$ mit

$$D_0 := [x_0 - b, x_0 + b] \times \{v \in V \mid \|v - y_0\| \le b\} \subset D$$

und wegen der Kompaktheit von D_0 sowie der Stetigkeit von f existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f\|_{D_0} \le C$. Die Behauptung folgt nun aus 3.8 mit $\varepsilon := \min\{b, \frac{b}{C}\}$. □

Wir wollen nun unter den Voraussetzungen des letzten Satzes auch die Existenz maximaler (d.h. nicht mehr forsetzbarer) Lösungen beweisen. Hierbei werden wir das Zornsche Lemma verwenden, vgl. Anhang A.

Hauptsatz 3.10 (Globaler Existenzsatz von Peano).
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ offen und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung.*
Beh.:

(i) Zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ existiert mindestens eine maximale (d.h. nicht mehr fortsetzbare) Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.}$$

Des weiteren läßt sich jede Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{64}$$

zu einer maximalen fortsetzen.

(ii) Ist $y\colon I \to V$ eine maximale Lösung von (64), so ist I ein offenes Intervall.

(iii) Ist $y\colon I \to V$ eine maximale Lösung von (64), so läuft Graph y *in D von Rand zu Rand. Letzteres soll folgendes bedeuten:*

Zu jedem Kompaktum $K \subset D$ existieren $x_-, x_+ \in I$ derart, daß gilt

$$\forall_{x \in I} \left\{ \begin{array}{l} x < x_- \\ x > x_+ \end{array} \right\} \Longrightarrow (x, y(x)) \in D \setminus K. \tag{65}$$

Bemerkung. (65) besagt, daß der Graph von y nach hinten und nach vorn schließlich aus jeder kompakten Menge herausläuft.

Beweis. Zu (i): Wegen des lokalen Existenzsatzes von Peano 3.9 genügt es, die zweite Aussage zu beweisen. Sei also $y_*\colon I_* \to V$ eine Lösung von (64). Wir setzen

$$X := \{y\colon I_y \to V \text{ Lösung von (64) mit } I_* \subset I_y \text{ und } y|_{I_*} = y_+\}$$

sowie

$$\forall_{y_1,y_2\in X}\, y_1 \le y_2 :\Longleftrightarrow \underbrace{I_{y_1} \subset I_{y_2} \;\wedge\; y_1 = y_2|_{I_1}}_{\Leftrightarrow \operatorname{Graph} y_1 \subset \operatorname{Graph} y_2 \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}\times V)} .$$

Es gilt $y_* \in X$, also $X \neq \varnothing$, und X ist durch $\le$ geordnete Menge. Wir haben zu zeigen, daß X ein maximales Element besitzt. Hierfür genügt es wegen des Zornschen Lemmas A.2 zu zeigen, daß gilt:

Ist $M \neq \varnothing$ eine totalgeordnete Teilmenge von X, so besitzt M in X eine obere Schranke.

Beweis hiervon: $\widetilde{I} := \bigcup_{y\in M} I_y \supset I_{y_*} \neq \varnothing$ ist offenbar ein Intervall. Definiere

$$\forall_{x\in\widetilde{I}}\, \tilde{y}(x) := y(x), \text{ falls } y \in M \text{ mit } x \in I_y.$$

Beachte, daß die rechte Seite in dieser Definition unabhängig von der speziellen Wahl von y ist, da aus $y_1, y_2 \in M$ mit $x \in I_{y_1} \cap I_{y_2}$ folgt – da M totalgeordnet – $y_1 \le y_2$ oder $y_2 \le y_1$ und daher $y_1(x) = y_2(x)$.

Offenbar gilt $\tilde{y} \in X$ und $\forall_{y\in M}\, \tilde{y} \ge y$, also ist $\tilde{y}$ obere Schranke von M in X.

Zu (ii): Sei $y\colon I \to V$ eine maximale Lösung von (64). Besäße I ein Maximum $x_0 \in \mathbb{R}$, so existierten nach 3.9 $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und eine Lösung $y_1\colon [x_0, x_0+\varepsilon] \to V$ von (64) mit $y_1(x_0) = y(x_0)$. Dann wäre auch $y_2\colon I \cup [x_0, x_0+\varepsilon] \to V$, definiert durch $y_2|_I := y$ und $y_2|_{[x_0,x_0+\varepsilon]} := y_1$ eine Lösung von (64), im Widerspruch zur Maximalität von y.

Analog sieht man ein, daß I kein Minimum besitzt.

Zu (iii): Sei also K eine kompakte Teilmenge von D. Angenommen es existiert kein $x_+ \in I$ mit (65). Dann gibt es eine Folge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } I \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \sup I \in \mathbb{R} \cup +\infty \text{ und } \forall_{n\in\mathbb{N}}\, (x_n, y(x_n)) \in K. \quad (66)$$

Wegen der Kompaktheit von K besitzt $(x_n, y(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine in K konvergente Teilfolge, also dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y(x_n)) = (\xi, \eta) \in K \subset D \subset \mathbb{R}\times V, \text{ also auch } \underbrace{\sup I}_{\substack{(ii)\\ \notin I}} = \xi < +\infty. \quad (67)$$

Wir werden zeigen:

$$\tilde{y}\colon \overbrace{I \cup \{\xi\}}^{\subset \mathbb{R} \text{ Intervall}} \to V, \text{ definiert durch } \tilde{y}|_I := y \text{ und } \tilde{y}(\xi) = \eta \text{ ist ebenfalls eine Lösung von (64).} \quad (68)$$

Letzteres widerspricht der Maximalität von y und die Existenz von x_+ wie in (iii) ist bewiesen. Die Existenz von x_- folgt analog.

Zu (68): Wir wählen eine Norm auf V. Wegen der Offenheit von D in $\mathbb{R}\times V$ und $(\xi,\eta)\overset{(67)}{\in} D$ existieren $a,b\in\mathbb{R}_+$ mit

$$K_1 := [\xi-a,\xi+a]\times\{v\in V\,|\,\|v-\eta\|\le 2b\}\subset D. \tag{69}$$

Da $K_1\subset D$ kompakt und $f\colon D\to V$ stetig ist, existiert $C\in\mathbb{R}_+$ mit

$$\|f|_{K_1}\|\le C. \tag{70}$$

Wegen (66), (67) existiert ferner $k\in\mathbb{N}_+$ mit

$$\begin{aligned}&(x_k,y(x_k))\in\,]\xi-a_1,\xi[\,\times\{v\in V\,|\,\|v-\eta\|\le b\}\overset{(69)}{\subset}K_1,\\ &\text{wobei } a_1:=\min\{a,\tfrac{b}{C}\}\in\mathbb{R}_+.\end{aligned} \tag{71}$$

Dann gilt (s.u.)

$$\forall_{x\in[x_k,\xi[\overset{(71)}{\subset}]\xi-a,\xi+a[}\,(x,y(x))\in\overset{\circ}{K}_1\subset K_1,\ \text{also Graph}\,y|_{[x_k,\xi[}\subset K_1. \tag{72}$$

Aus (72) und der Kompaktheit von $K_1\subset D$ folgt nach 3.6, daß sich $y|_{[x_k,\xi[}$ zu einer auf $[x_k,\xi]$ definierten Lösung von (64) fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung hat nach (67) an der Stelle ξ den Wert η. Hieraus folgt sofort (68).

Zu zeigen bleibt (72): Angenommen (72) wäre falsch. Dann existierte offenbar nach (71), (69) aus Stetigkeitsgründen ein kleinstes $\tilde{x}\in[x_k,\xi[\,\subset I$ mit $\|y(\tilde{x})-\eta\|=2b$, also $\forall_{x\in[x_k,\tilde{x}]\subset I}\,(x,y(x))\in K_1$, und es folgt wegen

$$\begin{aligned}\|y(\tilde{x})-y(x_k)\| &\overset{3.5}{=} \left\|\int_{x_k}^{\tilde{x}} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t\right\| \le \left|\int_{x_k}^{\tilde{x}}\|f(t,y(t))\|\,\mathrm{d}t\right|\\ &\overset{(70)}{\le} C\ \underbrace{|\tilde{x}-x_k|}_{<a_1,\ \text{da } \xi-a_1<x_k\le\tilde{x}<\xi}\\ &< C\,a_1\overset{(71)}{\le} b,\end{aligned}$$

daß gilt

$$2b=\|y(\tilde{x})-\eta\|\le\underbrace{\|y(\tilde{x})-y(x_k)\|}_{<b}+\underbrace{\|y(x_k)-\eta\|}_{\le b}<2b,$$

Widerspruch! □

Satz 3.11 (Banachscher Fixpunktsatz). *Seien (M,d) ein vollständiger*[7] *metrischer Raum, $A\subset M$ eine nicht-leere abgeschlosssene Teilmenge und $T\colon A\to M$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

T ist kontrahierend, *d.h. per definitionem*

$$\exists_{C\in]0,1[}\,\forall_{p,q\in A}\,d\,(T(p),T(q))\le C\,d(p,q) \tag{73}$$

und

$$T(A)\subset A. \tag{74}$$

Dann gilt:

[7] Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

(i) Es existiert genau ein $p_* \in A$ mit $T(p_*) = p_*$.

(ii) Ist $p_0 \in A$ beliebig gewählt und ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, p_{n+1} := T(p_n)$, so gilt $\lim_{n\to\infty} p_n = p_*$ und darüber hinaus

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, d(p_n, p_*) \le \frac{C^n}{1-C}\, d(p_0, p_1). \tag{75}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst:

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge.} \tag{76}$$

[Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned} d(p_n, p_{n+1}) &= d\left(T(p_{n-1}), T(p_n)\right) \overset{(73)}{\le} C\, d\left(p_{n-1}, p_n\right) \\ &\overset{(73)}{\le} C^2\, d\left(p_{n-2}, p_{n-1}\right) \le \ldots \le C^n\, d(p_0, p_1), \end{aligned}$$

also auch für $m \in \mathbb{N}_+$

$$d(p_n, p_{n+m}) \le \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{d(p_{n+i}, p_{n+i+1})}_{\le C^{n+i}\, d(p_0,p_1)} \le \underbrace{\frac{C^n}{1-C}\, d(p_0, p_1)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}, \tag{77}$$

und hieraus folgt (76).]

Da M vollständig ist, folgt aus (76) die Existenz von $p_* \in M$ mit

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p_*,$$

und weil $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach (74) eine Folge in der abgeschlossenen Menge A ist, gilt sogar $p_* \in A$. Die Gültigkeit von (75) folgt aus (77) durch Bildung des Grenzwertes für $m \to \infty$. Zum Nachweis des Satzes bleibt daher zu zeigen, daß p_* die in (i) genannte Eigenschaft hat:

Aus (73) folgt, daß $T\colon A \to M$ stetig ist, also gilt

$$p_* = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(p_n) = T(p_*).$$

Sei $p \in A$ beliebig mit $T(p) = p$. Dann ergibt (73)

$$d(p_*, p) = d\left(T(p_*), T(p)\right) \le \underbrace{C}_{\in]0,1[}\, d(p_*, p),$$

und dies ist nur im Falle $d(p_*, p) = 0$, d.h. $p = p_*$, möglich. □

Definition 3.12 ((Lokale) Lipschitzbedingung bzgl. y)**.** Seien V, W endlichdimensionale (normierte) $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subset \mathbb{R} \times V$ und $f\colon D \to W$ eine Abbildung.

(i) Wir sagen, daß *f einer (globalen) Lipschitzbedingung bzgl. y genügt*, wenn eine *Lipschitzkonstante* $L \in \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$\forall_{(x,y_1),(x,y_2)\in D}\, \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le L\, \|y_1 - y_2\|.$$

(ii) Wir sagen, daß f *einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genügt*, wenn zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ((x_0, y_0), D)$ existiert, derart, daß $f|_U \colon U \to W$ einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt.

Bemerkung. Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum sind bekanntlich äquivalent. Ob f einer (lokalen) Lipschitzbedingung bzgl. y genügt oder nicht, hängt von den Normen von V und W offenbar nur bis auf Äquivalenz ab und ist deshalb unabhängig von den gewählten Normen. Allerdings ändert sich beim Übergang zu anderen Normen i.a. „die“ Lipschitzkonstante.

Satz 3.13.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ und $f \colon D \to V$ stetig. Zusätzlich setzen wir voraus, daß zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$U_{x_0} := \{y \in V \mid (x_0, y) \in D\} \subset V$$

eine offene Teilmenge und daß f stetig partiell differenzierbar nach y *ist. Letzteres heißt per definitionem*

$\forall_{(x_0,y_0)\in D}\, f(x_0, \ldots)$ *ist differenzierbar in y_0, d.h. es existiert*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} := \mathrm{d}_{y_0}(f(x_0, \ldots)) \in \mathrm{End}(V), \tag{78}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} \colon D \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad (x_0, y_0) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

ist stetig.

Beh.:

(i) Ist $C \in \mathbb{R}$ mit $\|\frac{\partial f}{\partial y}\| \le C$ auf D, wobei $\|\ldots\|$ die Operatornorm auf $\mathrm{End}(V)$ *bezeichne, und ist U_{x_0} für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ konvex, so gilt*

$$\forall_{(x,y_1),(x,y_2)\in D}\, \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le C\, \|y_1 - y_2\|.$$

(ii) f genügt einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y.

Bemerkung. Im Falle $V = \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ mit $f_i \colon D \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist (78) äquivalent dazu, daß für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

f_i ist partiell differenzierbar nach y_j (auf D) und $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \colon D \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis als Übung. □

Satz 3.14 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf für Streifen)**.**
Vor.: *Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $J := [x_0, x_0 + a]$, $D := J \times V$ und $y_0 \in V$. $f\colon D \to V$ sei stetig und genüge einer Lipschitzbedingung bzgl. y.*[8]
Beh.: *Die Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0}$$

besitzt genau eine auf ganz J definierte Lösung.

Zusatz. *Der Satz gilt auch für Intervalle der Form a) $J = [x_0 - a, x_0]$, $a \in \mathbb{R}_+$, oder b) $J = [x_0 - a_1, x_0 + a_2]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$.*

c) Jede auf einem Teilintervall $I \subset J$ mit $x_0 \in I$ definierte Lösung obiger Anfangswertaufgabe ist Beschränkung der auf ganz J definierten Lösung.

Beweis. Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\exists_{L \in \mathbb{R}_+} \forall_{(x,y_1),(x,y_2) \in D} \, \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le L \, \|y_1 - y_2\|.$$

Sei $X := \mathcal{C}(J, V)$. Nach 3.5 ist zu zeigen, daß

$$T\colon X \longrightarrow X, \quad y \longmapsto \left(x \mapsto \underbrace{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, \mathrm{d}t}_{\text{stetig in } x\text{, sogar stetig differenzierbar}} \right)$$

genau einen Fixpunkt besitzt. Dies soll mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes 3.11 geschehen.

Durch $\forall_{y \in X} \, \|y\|_* := \max\{ \overbrace{\mathrm{e}^{-\beta x}}^{=:\psi(x)} \, \|y(x)\| \mid x \in J\}$, wobei $\beta \in \mathbb{R}_+$ mit $\beta > L$, wird eine Norm auf X definiert (Beweis als Übung), die äquivalent zu $\|\dots\|_\infty$ ist. (Es gilt nämlich $\lambda \|\dots\|_\infty \le \|\dots\|_* \le \mu \|\dots\|_\infty$, falls $\psi(J) = [\lambda, \mu]$; beachte, daß die Teilmenge J von $\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall ist.) Mit $(X, \|\dots\|_\infty)$ (siehe Übung 3.2) ist daher auch $(X, \|\dots\|_*)$ ein $\mathbb{R}$-Banachraum. Es genügt nun wegen $\frac{L}{\beta} \in \,]0, 1[$ zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{y_1, y_2 \in X} \, \|T(y_1) - T(y_2)\|_* \le \frac{L}{\beta} \, \|y_1 - y_2\|_*.$$

Beweis hiervon: Seien $y_1, y_2 \in X$ und $x \in J = [x_0, x_0 + a]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(T(y_1) - T(y_2))(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) \, \mathrm{d}t \right\| \\ &\le \int_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\|}_{\overset{\text{s.o.}}{\le} L \, \|y_1(t) - y_2(t)\|} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

[8] Beim Existenzsatz von Peano 3.7 hatten wir stattdessen die wesentlich andere Voraussetzung „f beschränkt“. Weder folgt aus der Gültigkeit einer Lipschitzbedingung die Beschränktheit noch umgekehrt.

$$
\begin{aligned}
&\leq L \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\beta t} \underbrace{\mathrm{e}^{-\beta t} \left\| y_1(t) - y_2(t) \right\|}_{\substack{\text{Def. } \|\dots\|_* \\ \leq \\ \|y_1 - y_2\|_*}} \mathrm{d}t \\
&\leq L \left\| y_1 - y_2 \right\|_* \underbrace{\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\beta t} \, \mathrm{d}t}_{= \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{\beta t} \Big|_{t=x_0}^{t=x} \leq \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{\beta x}} \\
&\leq \frac{L}{\beta} \mathrm{e}^{\beta x} \left\| y_1 - y_2 \right\|_*,
\end{aligned}
$$

also $\forall_{x \in J} \mathrm{e}^{-\beta x} \left\| (T(y_1) - T(y_2))(x) \right\| \leq \frac{L}{\beta} \left\| y_1 - y_2 \right\|_*$, und d.h. nach Definition von $\|\dots\|_*$ genau

$$
\left\| T(y_1) - T(y_2) \right\|_* \leq \frac{L}{\beta} \left\| y_1 - y_2 \right\|_*.
$$

Zu zeigen bleibt der Zusatz: a) folgt durch Anwendung des Satzes auf

$$
\tilde{f}(x, y) := -f(-x, y) \colon -J \times V \longrightarrow V.
$$

Man erhält eine Lösung $\tilde{y}$. Setze dann $y(x) := \tilde{y}(-x) \colon J \to V$.

b) ergibt sich durch Zusammensetzen der Lösungen aus a) und dem Satz.

c) folgt im Falle I kompakt aus dem Satz sowie Zusatz a) oder b), angewandt auf $D_0 := I \times V$ und $f_0 := f|_{D_0}$. Ist I nicht kompakt, so gilt $I \subset \overline{I}$, und die Behauptung gilt für $\overline{I}$, also ebenfalls für I. □

Satz 3.15 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf für Rechtecke)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes kompaktes Intervall, $x_0 \in J$, und $D := J \times \{v \in V \mid \|v - y_0\| \leq b\}$ mit $y_0 \in V$, $b \in \mathbb{R}_+$. $f \colon D \to V$ sei stetig und beschränkt, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f\| \leq C$. Ferner genüge f einer Lipschitzbedingung bzgl. y.*
Beh.: *Die Anfangswertaufgabe*

$$
\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0}
$$

besitzt genau eine auf $\underbrace{J \cap [x_0 - \frac{b}{C}, x_0 + \frac{b}{C}]}_{=: I \subset \mathbb{R} \text{ kompaktes Intervall}}$ definierte Lösung, und jede auf einem Teilintervall von I definierte Lösung der Anfangswertaufgabe ist eine Beschränkung hiervon.

Beweis. Modifiziere den Beweis von 3.14 wie folgt

$$
\begin{aligned}
A &:= \{v \in V \mid \|v - y_0\| \leq b\}, \\
X &:= \mathcal{C}(I, A).
\end{aligned}
$$

Definiere $T \colon X \to X$ analog zu oben durch

$$
\forall_{y \in X} \forall_{x \in I} \, (T(y))(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, \mathrm{d}t.
$$

Dann gilt $T(y)(I) \subset A$ für $y \in X$, da

$$\|T(y)(x) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \right\| \leq C\,|x_0 - x| \overset{x \in I}{\leq} b,$$

und die Behauptung folgt wie in 3.14. □

Satz 3.16 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f\colon D \to V$ stetig. Es existiere eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^{\circ}((x_0, y_0), D)$ derart, daß $f|_U\colon U \to W$ einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt.*
Beh.: *Für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ besitzt die Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0}$$

genau eine Lösung $y\colon [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to V$.

Beweis. Wir wählen eine Norm $\| \ldots \|$ auf V. Es existiert $b \in \mathbb{R}_+$ mit

$$D_0 := [x_0 - b, x_0 + b] \times \{v \in V \mid \|v - y_0\| \leq b\} \subset U \subset D.$$

Wir setzen $f_0 := f|_{D_0}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von D_0 existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f_0\| \leq C$. Wegen $D_0 \subset U$ genügt f_0 einer Lipschitzbedingung bzgl. y. Nach dem letzten Satz 3.15 besitzt die obige Anfangswertaufgabe genau eine auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ definierte Lösung, falls $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon \leq \min\{b, \frac{b}{C}\}$. □

Hauptsatz 3.17 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ offen und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung, die einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genügt.*
Beh.: *Zu jeden $(x_0, y_0) \in D$ besitzt die Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0} \tag{79}$$

genau eine maximale Lösung.

Zusatz. *Jede Lösung von (79) ist Beschränkung der maximalen Lösung. Die maximale Lösung ist auf einem offenen Intervall von $\mathbb{R}$ definiert, und ihr Graph läuft in D von Rand zu Rand.*

Beweis. Der Zusatz folgt aus dem Hauptsatz aufgrund von 3.10. Ebenso ergibt 3.10 die Existenz mindestens einer Lösung.

Seien $y_1\colon I_1 \to V$ und $y_2\colon I_2 \to V$ zwei maximale Lösungen von (79), also sind I_1, I_2 nach 3.10 offene Intervalle. Dann ist $I := I_1 \cap I_2$ ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$. Wir behaupten

$$y_1|_I = y_2|_I. \tag{80}$$

[Zu (80): Wir setzen

$$A := \{x \in I \mid y_1(x) = y_2(x)\} \quad \text{und} \quad B := \{x \in I \mid y_1(x) \neq y_2(x)\},$$

also $A \cup B = I$, $A \cap B = \varnothing$ und $x_0 \in A$ (wegen $y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0)$.) Aus Stetigkeitsgründen ist B offen in I. Wegen des Zusammenhanges von I bleibt zum Nachweis von (80), d.h. von $A = I$, nur zu zeigen:

$$A \text{ ist offen in } I.$$

Beweis hiervon: Sei $\xi \in A$, also $y_1(\xi) = y_2(\xi) =: \eta$. Nach 3.16 existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \subset I$ und $\forall_{x \in [\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]}\, y_1(x) = y_2(x)$. Insbesondere gilt daher $]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset A$.]

Mit I_1, I_2 ist wegen $x_0 \in I = I_1 \cap I_2$ auch $\widetilde{I} := I_1 \cup I_2$ ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$, und wegen (80) ist auch $y\colon \widetilde{I} \to V$, definiert durch $y_{I_1} := y_1$, $y_{I_2} := y_2$ eine Lösung von (79), die eine Fortsetzung sowohl von y_1 als auch von y_2 ist. Wegen der Maximalität von y_1 und y_2 folgt schließlich $I_1 = \widetilde{I}$ und $I_2 = \widetilde{I}$, d.h. $I_1 = I_2$, $y_1 = y$ und $y_2 = y$, also $y_1 = y_2$. □

Wir fassen die wichtigen Resulate 3.10 und 3.17 sowie 3.13, formuliert für den Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, noch einmal zusammen:

Hauptsatz 3.18.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung und $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in D$.*
Beh.:

(i) Die Anfangswertaufgabe (des Systems von Differentialgleichungen)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n'(x) & = & f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{array}, \quad \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}}$$

besitzt eine maximale Lösung.

Jede Lösung läßt sich zu einer maximalen Lösung fortsetzen.

Jede maximale Lösung ist auf einem offenen Intervall definiert, und ihr Graph läuft in D von Rand zu Rand.

(ii) Genügt darüber hinaus f einer lokalen Lipschitzbedingung – dies ist z.B. der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, auf ganz D definiert und dort stetig sind, insbesondere also, wenn f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist –, so existiert genau eine maximale Lösung, und jede Lösung ist Beschränkung dieser maximalen Lösung. □

3.19 (Die Äquivalenz zwischen Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(i) Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).} \tag{81}$$

1.) Ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ Lösung von (81), also insbesondere y n-mal differenzierbar, so ist die differenzierbare Abbildung $z\colon I \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\forall_{x \in I}\, z(x) := (y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),$$

Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & z_2(x) \\ z_2'(x) & = & z_3(x) \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n-1}'(x) & = & z_n(x) \\ z_n'(x) & = & f(x, z_1(x), \ldots, z_n(x)), \end{array}} \tag{82}$$

d.h. $z'(x) = F(x, z(x))$, wobei $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig, definiert durch

$$F_i(x, z_1, \ldots, z_n) := \begin{cases} z_{i+1}, & i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ f(x, z_1, \ldots, z_n), & i = n. \end{cases}$$

2.) Ist umgekehrt $z\colon I \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (82), so folgt

$$\begin{gathered} z_1'(x) = z_2(x), \\ z_1''(x) = z_2'(x) = z_3(x), \\ \vdots \\ z_1^{(n-1)}(x) = \ldots = z_{n-1}'(x) = z_n(x), \\ z_1^{(n)}(x) = z_n'(x) = f(x, z_1(x), z_1'(x), \ldots, z_1^{(n-1)}(x)), \end{gathered}$$

also ist $z_1\colon I \to \mathbb{R}$ Lösung von (81).

3.) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ mit $(x_0, y_0) \in D$. Dann entspricht eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boxed{(81), \quad y(x_0) = y_{01},\ y'(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}}$$

umkehrbar eindeutig einer Lösung $z = (z_1, \ldots, z_n)$ der Anfangswertaufgabe

$$\boxed{(82), \quad z(x_0) = y_0.}$$

(ii) Allgemeiner lassen sich z.B. auch Systeme von Differentialgleichungen n-ter Ordnung zu Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung umformen, indem man die Ableitungen der Ordnung $< n$ als neue Funktionen einführt.

Beispiel. Ein Massepunkt (der Masse 1) bewege sich im Raum unter dem Einfluß eines zeitabhängigen Kraftfeldes

$$\mathfrak{k} = (f, g, h)\colon \underbrace{D}_{\subset \mathbb{R}^4} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Seine Bahn $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ erfülle die Bewegungsgleichung $\ddot{c} = \mathfrak{k}$, d.h.:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(t,x,y,z) \\ \ddot{y} &= g(t,x,y,z) \\ \ddot{z} &= h(t,x,y,z) \end{aligned}$$

Dieses System von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist äquivalent zum folgenden System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad \dot{u} = f(t,x,y,z) \\ \dot{y} &= v, \quad \dot{v} = g(t,x,y,z) \\ \dot{z} &= w, \quad \dot{w} = h(t,x,y,z) \end{aligned}$$

Aus 3.18, 3.19 folgen leicht Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Anfangswertaufgaben bei Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Hauptsatz 3.20.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f(x, y_1, \ldots, y_n) \colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in D$.*
Beh.:

(i) Die Anfangswertaufgabe

$$\boxed{\begin{aligned} &y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \\ &y(x_0) = y_{01},\ y'(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n} \end{aligned}}$$

besitzt eine maximale Lösung.

Jede Lösung läßt sich zu einer maximalen Lösung fortsetzen, und jede maximale Lösung ist auf einem offenen Intervall definiert.

(ii) Genügt darüber hinaus f einer lokalen Lipschitzbedingung – dies ist z.B. der Fall, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ auf ganz D definiert und dort stetig sind, insbesondere also, wenn f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist –, so existiert genau eine maximale Lösung, und jede Lösung ist Beschränkung dieser maximalen Lösung.

Beweis. Wegen 3.18 und 3.19 ist nur zu zeigen:

Ist $U \subset D$ offen und genügt $f|_U \colon U \to \mathbb{R}$ einer Lipschitzbedingung, so ist letzteres auch für $F|_U \colon U \to \mathbb{R}^n$, F wie in 3.19 (i), der Fall.

Beweis hiervon: Wir verwenden auf $\mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm $\| \ldots \|_\infty$, die gegeben isr durch

$$\forall_{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n} \|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty := \max \{|a_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Existiere also $L \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{(x,y),(x,\tilde{y}) \in U} |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L \|y - \tilde{y}\|_\infty.$$

Dann folgt für alle $(x,y),(x,\tilde{y}) \in U$ auch

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n-1\}} \, |\underbrace{F_i(x,y)}_{=y_{i+1}} - \underbrace{F_i(x,\tilde{y})}_{=\tilde{y}_{i+1}}| \leq \|y-\tilde{y}\|_\infty,$$

$$|\underbrace{F_n(x,y)}_{=f(x,y)} - \underbrace{F_n(x,\tilde{y})}_{=f(x,\tilde{y})}| \leq L\,\|y-\tilde{y}\|_\infty,$$

also $\|F(x,y)-F(x,\tilde{y})\|_\infty \leq \max\{L,1\}\,\|y-\tilde{y}\|_\infty$. □

4 Gleichungen von Differentialformen und exakte Differentialgleichungen

4.1 (Gleichungen von Differentialformen)**.**

a) Wir betrachten in diesem Kapitel Differentialgleichungen (im wahrsten Sinne des Wortes) der Form

$$\boxed{g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,} \tag{83}$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet[9] und $g, h\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, also ist $\omega := g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y$ eine stetige 1-Form auf D.

Definiton. Ein auf einem Intervall I von $\mathbb{R}$ definierter glatter[10] $\mathcal{C}^1$-Weg $c = (c_1, c_2)\colon I \to D$ heißt *Lösung von (83)* genau dann, wenn gilt

$$\forall_{t\in I}\, \omega_{c(t)}(c'(t)) = 0. \tag{84}$$

Bemerkung. (84) ist sowohl äquivalent zu

$$g(c(t))\,{c_1}'(t) + h(c(t))\,{c_2}'(t) = 0$$

als auch zu

$$\langle c'(t), (g,h)(c(t))\rangle = 0,$$

wobei $\langle \ldots, \ldots \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

Letzteres bedeutet im Falle $(g^2 + h^2)(c(t)) > 0$

$$c'(t) \in \mathbb{R}\, \underbrace{(-h, g)(c(t))}_{\neq 0},$$

also

$$\underbrace{c(t) + \mathbb{R}\, c'(t)}_{\text{Tangente an } c \text{ zur Zeit } t} = c(t) + \mathbb{R}\,(-h(c(t)), g(c(t))).$$

Es gilt:

> Sind $c\colon I \to D$ eine Lösung von (83) und $\varphi\colon J \to I$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, so ist auch $c \circ \varphi\colon J \to D$ eine Lösung von (83). (85)

[Denn für alle $s \in J$ gilt $(c \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)\, c'(\varphi(s)) \neq 0$ und weierhin $\omega_{c\circ\varphi(s)}((c \circ \varphi)'(s)) = \varphi'(s)\, \underbrace{\omega_{c(\varphi(s))}(c'(\varphi(s)))}_{=0} = 0.$]

[9] Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt *Gebiet*, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

[10] Ein differenzierbarer Weg mit nirgends verschwindender Ableitung heißt *glatt*.

Ferner gilt trivialerweise

Ist $M\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\forall_{(x,y)\in D}\, M(x,y) \neq 0$, so besitzt die Differentialgleichung

$$M(x,y)\,g(x,y)\,\mathrm{d}x + M(x,y)\,h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{86}$$

dieselben Lösungen wie (83).

Wir setzen im weiteren Verlauf von 4.1 zusätzlich voraus, daß auf D gilt

$$g^2 + h^2 > 0.$$

Man hat dann wieder (ähnlich wie in 2.1) ein Linienelementefeld: Jedem Punkt $p \in D$ ist genau eine Gerade

$$\mathcal{L}(p) := p + \mathbb{R}\,\underbrace{(-h(p), g(p))}_{\neq 0} \subset \mathbb{R}^2$$

zugeordnet, und ein glatter $\mathcal{C}^1$-Weg c in D ist genau dann Lösung von (83), wenn für alle t die Tangente an c zur Zeit t gleich dem in $c(t)$ sitzenden Lienienelement $\mathcal{L}(c(t))$ ist, vgl. die obige Definition. Dabei sind jetzt im Unterschied zu 2.1 auch Linienelemente parallel zur y-Achse („mit unendlicher Steigung“) zugelassen, ($\mathcal{L}(p) = p + \mathbb{R}\,(0,1)$, falls $h(p) = 0$.)

b) Aus (83) erhält formal durch „Division durch $\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}y$“ die Differentialgleichungen

$$\boxed{g(x,y) + h(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \text{d.h.} \quad g(x,y(x)) + h(x,y(x))\,y'(x) = 0,} \tag{87}$$

und

$$\boxed{g(x,y)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + h(x,y) = 0, \quad \text{d.h.} \quad g(x(y),y)\,y'(x) + h(x(y),y) = 0.} \tag{88}$$

Das Linienelementefeld von (87) bzw. (88) ist dasselbe wie von (83) mit folgenden Ausnahmen: In den Punkten $p \in D$ mit $h(p) = 0$ ist $\mathcal{L}(p)$ kein Linienelement von (87), in den Punkten $p \in D$ mit $g(p) = 0$ ist $\mathcal{L}(p)$ kein Linienelement von (88).

Beispiel. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $g(x,y) = x$, $h(x,y) = y$. Dann sind (83), (87), (88) gleich

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y &= 0, \\ x + y(x)\,y'(x) &= 0, \\ x(y)\,x'(y) + y &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen von (83) sind alle glatten $\mathcal{C}^1$-Wege $c = (c_1, c_2)$ in $\mathbb{R}^2$ mit ${c_1}^2 + {c_2}^2 \in \mathbb{R}_+$ konstant, z.B.

$$c\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t))$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$.

Die maximalen Lösungen von (87) sind

$$y(x)\colon\ ]-r,r[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad x\longmapsto \pm\sqrt{r^2-x^2},$$

wobei $r\in\mathbb{R}_+$, deren Graphen $]-r,r[\ \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $x\mapsto (x,\pm\sqrt{r^2-x^2})$ spezielle Lösungen von (83) sind.

Die maximalen Lösungen von (88) sind

$$x(y)\colon\ ]-r,r[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad y\longmapsto \pm\sqrt{r^2-y^2},$$

wobei $r\in\mathbb{R}_+$, deren „Graphen“ $]-r,r[\ \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $y\mapsto (\pm\sqrt{r^2-y^2},y)$ spezielle Lösungen von (83) sind.

Allgemein gilt:

Satz.

(i) Seien $c=(c_1,c_2)\colon I\to D$ Lösung von (83) und $t_j\in I$ mit $c_j'(t)(t_j)\neq 0$ für $j\in\{1,2\}$.[11] *Ferner sei I_j eine Intervall-Umgebung von $t_j\in I$ mit $\forall_{t\in I_j} c_j'(t)\neq 0$, also (nach Analysis) $c_j\colon I_j\to J_j$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf ein Intervall J_j von $\mathbb{R}$. Dann ist*

$$\left\{\begin{array}{ll}\Phi\colon J_1\longrightarrow\mathbb{R}, & x\longmapsto c_2\circ {c_1}^{-1}(x), \quad \textit{im Falle } j=1,\\ \Psi\colon J_2\longrightarrow\mathbb{R}, & y\longmapsto c_1\circ {c_2}^{-1}(y), \quad \textit{im Falle } j=2,\end{array}\right\}$$

Lösung von $\left\{\begin{array}{l}(87)\\(88)\end{array}\right\}$*, und es gilt*

$$c|_{I_j}=\left\{\begin{array}{l}(\overbrace{\ \mathrm{Graph}\,\Phi\ }^{x\mapsto(x,\Phi(x))})\circ c_1|_{I_1}\\(\underbrace{\text{„}\mathrm{Graph}\text{“}\,\Psi}_{y\mapsto(\Psi(y),y)})\circ c_2|_{I_2}\end{array}\right\},$$

d.h. $c|_{I_j}$ ist $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung des $\left\{\begin{array}{l}\textit{Graphen}\\ \textit{„Graphen“}\end{array}\right\}$ *einer Lösung von* $\left\{\begin{array}{l}(87)\\(88)\end{array}\right\}$.

(ii) Ist umgekehrt $\left\{\begin{array}{l}\Phi\\ \Psi\end{array}\right\}\colon J\to\mathbb{R}$ *eine Lösung von* $\left\{\begin{array}{l}(87)\\(88)\end{array}\right\}$*, so folgt, daß* $c:=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Graph}\,\Psi\\ \text{„}\mathrm{Graph}\text{“}\,\Phi\end{array}\right\}\colon J\to D$ *eine Lösung von (83) ist, also ist nach (85) auch jede $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung hiervon Lösung von (83).*

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall $j=2$; den Fall $j=1$ zeigt man analog.

[11] Wegen $c'(t)\neq 0$ kann jedes $t\in I$ als t_1 oder t_2 genommen werden.

Zu (i): Dann gilt für jedes $y \in J_2$

$$g\Big(\underbrace{\Psi(y)}_{=c_1\circ c_2^{-1}(y)}, \underbrace{y}_{=c_2\circ c_2^{-1}(y)}\Big)\underbrace{\Psi'(t)}_{=\frac{c_1'\circ c_2^{-1}(y)}{c_2'\circ c_2^{-1}(y)}} + h\Big(\underbrace{\Psi(y)}_{=c_1\circ c_2^{-1}(y)}, \underbrace{y}_{=c_2\circ c_2^{-1}(y)}\Big)$$

$$\overset{t:=c_2^{-1}(y)\in I_2}{=} \frac{1}{c_2'(t)}\underbrace{\big(g(c(t))\,c_1'(t) + h(c(t))\,c_2'(t)\big)}_{=0,\text{ da } c \text{ Lösung von (83)}} = 0$$

und für alle $t \in I_2$

$$(\text{„Graph“ }\Psi)\circ c_2(t) = \Big(\underbrace{\Psi}_{=c_1\circ c_2^{-1}}(c_2(t)), c_2(t)\Big) = c(t).$$

Zu (ii): Für $t \in J$ gilt

$$\omega_{c(t)}(c'(t)) = \omega_{(\Psi(t),t)}(\Psi'(t), 1) = g(\Psi(t),t)\,\Psi'(t) + h(\Psi(t),t) = 0,$$

da Ψ Lösung von (88) ist. □

Fazit: Die Lösungen von (83) sind genau diejenigen $\mathcal{C}^1$-Wege in D, die lokal $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierungen von Graphen von Lösungen von (87) bzw. von „Graphen“ von Lösungen von (88) sind.

c) **Bemerkung.** Unter den Lösungen von (83) können Verzweigungen auftreten, siehe z.B. $\sqrt{|y|}\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ auf $\mathbb{R}^2$, vgl. 2.3.

4.2 (Exakte Differentialgleichungen)**.** Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g, h\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Definiton. Die Differentialgleichung

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{89}$$

heißt *exakt*, wenn die stetige 1-Form $\omega := g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y$ exakt ist, d.h. wenn eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ existiert mit $\underbrace{\mathrm{d}F}_{=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y} = \omega$, also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = g \;\wedge\; \frac{\partial F}{\partial y} = h.$$

F mit dieser Eigenschaft heißt *Potential* oder *Stammfunktion von* ω und ist – falls existent – bis auf eine addidtive Konstante eindeutig bestimmt, vgl. Analysis.

Satz. *Seien (89) exakt und F ein Potential von ω. Dann gilt:*

(i) Ist $c\colon I \to \mathbb{R}$ ein glatter $\mathcal{C}^1$-Weg, so folgt

$$c \text{ ist Lösung von (89)} \iff F\circ c \text{ ist konstant.}$$

(ii) Gilt auf D $g^2 + h^2 > 0$, so verläuft durch jeden Punkt von D bis auf $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung genau eine (lokale) Lösungskurve, es gibt also keine Verzweigungen.

Beweis. Zu (i): Wegen $\forall_{t\in I}\, \omega_{c(t)} = \mathrm{d}_{c(t)} F$ gilt

$$\begin{aligned} c \text{ ist Lösung von (89)} &\iff \forall_{t\in I}\, \omega_{c(t)}(c'(t)) = 0 \\ &\iff \forall_{t\in I}\, (F\circ c)'(t) = 0 \\ &\iff F\circ c \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

Zu (ii): Gelte $g^2 + h^2 > 0$ und sei $(x_0, y_0) \in D$ sowie $C := F(x_0, y_0)$. Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \neq 0 \ \vee\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = h(x_0, y_0) \neq 0.$$

Wegen der $\mathcal{C}^1$-Eigenschaft von F existieren Intervall-Umgebungen J_1 von x_0 und J_2 von y_2 mit $J_1 \times J_2 \subset D$ und

$$\forall_{(x,y)\in J_1\times J_2} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \neq 0 \ \vee\ \forall_{(x,y)\in J_1\times J_2} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert daher eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\psi_2\colon J_2 \to J_1$ mit

$$\overline{F}^1(\{C\}) = \{(\psi_2(t), t) \mid t \in J_2\}$$

oder eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\psi_1\colon J_1 \to J_2$ mit

$$\overline{F}^1(\{C\}) = \{(t, \psi_1(t)) \mid t \in J_1\}.$$

Damit ist (ii) klar. □

Bemerkung.

1.) Falls (89) exakt ist und man ein Potential F von ω kennt, so ist die Differentialgleichung „im wesentlichen“ gelöst. Nach (i) muß man die Gleichung $F(c(t)) = C \in \mathbb{R}$ lediglich nach $c(t)$ auflösen, welches nach (ii) im Falle $g^2 + h^2 > 0$ lokal bis auf $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung eindeutig möglich ist.

2.) Die Differentialgleichung $\sqrt{|y|}\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ auf $\mathbb{R}^2$ kann nach (ii) nicht exakt sein, da bei ihr Verzweigungen auftreten, vgl. 4.1 c).

Wie prüft man Exaktheit? Und wie findet man im Falle der Exaktheit ein Potential? Hier gilt nach Analysis der folgende Satz.

Satz 4.3.
Vor.: *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\omega := g\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}y$ eine stetige 1-Form auf D.*
Beh.:

(i) ω ist genau dann exakt, wenn für je zwei stückweise $\mathcal{C}^1$-Wege $c, \tilde{c}$ in D mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt gilt

$$\int_c \omega = \int_{\tilde{c}} \omega.$$

(ii) Ist ω exakt und $p_0 \in D$ beliebig, so ist $F\colon D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\forall_{p\in D} \quad F(p) := \int_{c_p} \omega, \quad \text{wobei } c_p \text{ ein beliebiger stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Weg in } D \text{ von } p_0 \text{ nach } p \text{ ist,}$$

ein Potential von ω. □

Beispiel. $D := \mathbb{R}^2$, $\omega := x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$.

Für jeden stückweise $\mathcal{C}^1$-Weg $c\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\forall_{t\in[\alpha,\beta]}\ \omega_{c(t)}(c'(t)) = c_1(t)\,{c_1}'(t) + c_2(t)\,{c_2}'(t) = \frac{1}{2}({c_1}^2 + {c_2}^2)'(t),$$

also

$$\int_c \omega = \int_\alpha^\beta \omega_{c(t)}(c'(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}({c_1}^2(t) + {c_2}^2(t))\Big|_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big|_{c(\alpha)}^{c(\beta)},$$

und die rechte Seite hängt nur von $c(\alpha)$ und $c(\beta)$ ab. Daher ist ω nach (i) exakt.

Mit $p_0 := (0,0)$ erhält man daher $F(x,y) := \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ nach (ii) als Potential.

Alle Lösungen der Differentialgleichung $\omega = 0$ erhält man nach Bemerkung 1.) in 4.2 durch Auflösen von $F(c_1,c_2) = C \in \mathbb{R}$, d.h. von ${c_1}^2 + {c_2}^2 = C$.

Ebenfalls aus der Analysis bekannt ist der folgende Satz für stetig differenzierbare (anstelle von stetigen) 1-Formen.

Satz 4.4.
Vor.: *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\omega := g\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}y$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf D.*
Beh.:

(i) ω ist exakt $\Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$.[12]

(ii) D ist sternförmig und $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x} \Longrightarrow \omega$ ist exakt. □

Bemerkung.

1.) Man kann leicht zeigen, daß (ii) richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung „D ist sternförmig“ ersetzt durch „D ist $\mathcal{C}^1$-diffeomorph zu einem sternförmigen Gebiet“.

2.) In der Funktionentheorie beweist man, daß (ii) richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung „D ist sternförmig“ ersetzt durch eine der folgenden paarweise zueinander äquivalenten Voraussetzungen:

(1) D ist einfach-zusammenhängend.

[12] Die rechte Seite besagt genau $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}y = \left(-\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$.

(2) D ist $\mathcal{C}^\infty$-diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$.

(3) D ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$.

(4) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ ist zusammenhängende Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beispiel. Die Exaktheit von $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ auf der sternförmigen Menge $\mathbb{R}^2$ sieht man auch mittels $\dfrac{\partial x}{\partial y} = 0 \wedge \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ und (ii) ein.

4.5 (Eulerscher Multiplikator)**.**

a) Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g, h\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. I.a. ist die Differentialgleichung

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{90}$$

nicht exakt. Man kann dann eine stetige Funktion $M\colon D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suchen, derart, daß die Differentialgleichung

$$M(x,y)\,g(x,y)\,\mathrm{d}x + M(x,y)\,h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{91}$$

exakt ist und sich zunutze machen, daß (90) und (91) nach (86) dieselben Lösungen haben.

Definiton. Eine stetige Funktion $M\colon D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt *Eulerscher Multiplikator* (oder *integrierender Faktor*) *von (90)*, wenn die Differentialgleichung (91) exakt ist.

b) Wir betrachten im folgenden den Fall

$$\begin{aligned} &D \subset \mathbb{R}^2 \text{ sternförmig (oder eine der äquivalenten Aussagen (1) -}\\ &\text{(4) wie in Bemerkung 2.) zu 4.4) und } g, h\ \mathcal{C}^1\text{-Funktionen sowie}\\ &M\colon D \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ eine gegebene } \mathcal{C}^1\text{-Funktion.} \end{aligned} \tag{92}$$

Dann gilt nach 4.4

$$\begin{aligned} M \text{ Eulerscher Multiplikator von (90)} &\iff \frac{\partial(M\,g)}{\partial y} = \frac{\partial(M\,h)}{\partial x}\\ &\iff \frac{\partial M}{\partial x}\,h - \frac{\partial M}{\partial y}\,g = M\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \qquad (93)\\ &\iff \frac{\partial \ln(|M|)}{\partial x}\,h - \frac{\partial \ln(|M|)}{\partial y}\,g = \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \qquad (94) \end{aligned}$$

(93) ist eine partielle Differentialgleichung.

c) In Spezialfällen läßt sich (93) explizit lösen. Wir wollen untersuchen, wann genau im Falle $h^2 > 0$ bzw. $g^2 > 0$ ein Eulerscher Multiplikator existiert, der nur von x bzw. y abhängt und wie man diesen dann berechnen kann.

Sei also $M(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(y) \end{array} \right\}$ auf D, wobei $\left\{ \begin{array}{l} u\colon J_1 := x(D) \to \mathbb{R} \\ v\colon J_2 := y(D) \to \mathbb{R} \end{array} \right\}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion ist. ($x(D)$ und $y(D)$ sind offene Intervalle von $\mathbb{R}$, da D offen und zusammenhängend ist.) Dann besagt (94)

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\ln(|u|))'(x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}}{h}(x,y), & \text{falls } h^2 > 0 \\ (\ln(|v|))'(y) = \frac{-\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{g}(x,y), & \text{falls } g^2 > 0 \end{array} \right\}.$$

Damit ist klar, daß gilt:

1. Fall: $h^2 > 0$ und es existiere eine (stetige[13]) Funktion $f_1\colon J_1 \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{(x,y)\in D}\, f_1(x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}}{h}(x,y).$$

Sei $F_1\colon J_1 \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_1. Dann ist

$$M(x,y) := \underbrace{\mathrm{e}^{F_1(x)}}_{=u(x)}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ein Eulerscher Multiplikator von (90).

2. Fall: $g^2 > 0$ und es existiere eine (stetige) Funktion $f_2\colon J_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{(x,y)\in D}\, f_2(y) = \frac{-\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{g}(x,y).$$

Sei $F_2\colon J_2 \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_2. Dann ist

$$M(x,y) := \underbrace{\mathrm{e}^{F_2(y)}}_{=v(y)}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ein Eulerscher Multiplikator von (90).

[13] Die Stetigkeit folgt aus der Gleichung für $f_1(x)$.

5 Implizite Differentialgleichungen erster Ordnung

5.1. Wir betrachten in diesem Kapitel Differentialgleichungen vom Typ

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x)) = 0,} \tag{95}$$

wobei $F\colon M \to \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ stetige Funktion ist.

Ähnlich wie in 2.1 läßt sich (95) als eine Menge $\mathcal{L}$ von Linienelementen deuten: Die Elemente von $\mathcal{L}$ sind genau die Geraden

$$\mathcal{L}(x, y, z) := (x, y) + \mathbb{R}\,(1, z) \subset \mathbb{R}^2$$

mit $(x, y, z) \in M$ und $F(x, y, z) = 0$.

$y\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung von (95), wenn für jedes $x \in I$ die Tangente an den Graphen $\{(x, y(x)) \,|\, x \in I\}$ von y im Punkte $(x, y(x))$ ein Element von $\mathcal{L}$ ist.

Im Unterschied zu 2.1 kann ein Punkt (x, y) jetzt „Träger“ mehrerer Linienelemente sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ mehrere Lösungen $z \in \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \in M$ besitzt.

Definiton.

(i) Sei $(x_0, y_0, z_0) \in M$.
Dann heißt $\mathcal{L}(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$ ein *reguläres Linienelement von* $\mathcal{L}$, wenn Umgebungen $U \in \mathcal{U}^\circ((x_0, y_0, z_0), M)$ und $D \in \mathcal{U}^\circ((x_0, y_0), \mathbb{R}^2)$ sowie eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ existieren, derart, daß gilt

$$\forall_{(x,y,z)\in U}\, F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y). \tag{96}$$

Der Existenzsatz von Peano impliziert, daß es dann mindestens eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ von $\underbrace{y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0}_{\Rightarrow y'(x_0) = z_0}$ gibt. Jede Beschränkung $y|_{\widetilde{I}}$ von y auf ein Intervall $\widetilde{I} \subset I$ mit $\forall_{x\in\widetilde{I}}(x, y(x), y'(x)) \in U$ ist dann eine Lösung von (95).

(ii) Nicht-reguläre Linienelemente heißen *singulär*.

(iii) Eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (95) heißt *regulär* bzw. *singulär*, wenn für jedes $x \in I$ das Linienelement $\mathcal{L}(x, y(x), y'(x))$ regulär bzw. singulär ist.

(iv) Ein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ heißt *singulärer Punkt der Differentialgleichung (95)*, wenn es ein $z \in \mathbb{R}$ mit $(x_0, y_0, z) \in M$ gibt, derart, daß $\mathcal{L}(x_0, y_0, z)$ ein singuläres Linienelement ist.

Beispiel. $\boxed{y'(x)^2 = 4x^2,}$ also $F(x, y, z) = z^2 - 4x^2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Es gilt $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = 2x \vee z = -2x$, also gilt

$$\mathcal{L} = \{(x, y) + \mathbb{R}\,(1, \pm 2x) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Die regulären Linienelmente von $\mathcal{L}$ sind diejenigen mit $x \neq 0$. Die singulären Linienelmente von $\mathcal{L}$ sind von der Form

$$(0, y) + \mathbb{R}\,(1, 0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

[Für $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$ gilt

$$F(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow z = 2x,$$

und für $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-) \cup (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ gilt

$$F(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow z = -2x.$$

Außerdem ist für $y \in \mathbb{R}$ eine Umformung wie in (96) in keiner Umgebung von $(0, y, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ möglich.]

Die singulären Punkte der Differentialgleichung sind $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$.

Die maximalen Lösungen der Differentialgleichung sind durch $x \mapsto x^2 + C$, $x \mapsto -x^2 + C$, $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{array} \right\}$ und $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} -x^2 + C, & x \geq 0 \\ x^2 + C, & x < 0 \end{array} \right\}$ gegeben, wobei $C \in \mathbb{R}$ ist.

Reguläre Lösungen sind nur auf Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ oder nur auf Teilmengen von $\mathbb{R}_-$ definiert.

Anfangswertaufgaben sind in diesem Beispiel nie lokal eindeutig lösbar.

Bemerkung.

a) Ist F in (95) in $(x_0, y_0, z_0) \in \overset{\circ}{M}$ stetig differenzierbar und gilt

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

so folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen, daß $\mathcal{L}(x_0, y_0, z_0)$ ein reguläres Linienelement ist.

b) Ist F in (95) auf ganz M stetig differenzierbar, also insbesondere M offen, so folgt aus der Singularität eines Linienelementes $\mathcal{L}(x_0, y_0, z_0)$, daß gilt

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{97}$$

Umgekehrt muß ein Linienelement $\mathcal{L}(x_0, y_0, z_0)$ mit (97) aber nicht singulär sein.

Beispiel. Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) := (z - f(x, y))^2.$$

Dann ist offenbar jedes Linienelement regulär. Andererseits gilt für alle $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2\,(\underbrace{z_0 - f(x_0, y_0)}_{=0}) = 0.$$

5.2 (Notwendige Bedingungen für die Existenz von $\mathcal{C}^2$-Lösungen der Differentialgleichung $F(x,y,y') = 0$ mit nirgends verschwindender zweiter Ableitung)**.** Seien $F\colon M \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ stetig und $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Lösung von $F(x,y(x),y'(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$, $t_0 := y'(x_0)$, wobei $x_0 \in I$, $(x_0,y_0,t_0) \in M$, mit

$$\forall_{x\in I}\, y''(x) \neq 0.$$

(i) Dann ist y' ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von I auf ein Intervall $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ und besitzt daher einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

$$c_1 := (y')^{-1}\colon \widetilde{I} \longrightarrow I, \quad (c_1(t_0) = x_0) \tag{98}$$

als Umkehrfunktion. Sei

$$c_2 := y \circ c_1\colon \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (c_2(t_0) = y_0), \tag{99}$$

also ist c_2 eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit

$$y = c_2 \circ {c_1}^{-1}, \tag{100}$$

$$\forall_{t\in\widetilde{I}}\, {c_2}'(t) = y'(c_1(t))\,{c_1}'(t) = t\,{c_1}'(t). \tag{101}$$

Außerdem gilt wegen (99), (98)

$$\forall_{t\in\widetilde{I}}\, F(c_1(t),c_2(t),t) = 0. \tag{102}$$

(ii) Ist F sogar differenzierbar, so gilt für jedes $t \in \widetilde{I}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(c_1(t),c_2(t),t) + t\,\frac{\partial F}{\partial y}(c_1(t),c_2(t),t)\right){c_1}'(t) \\ = -\frac{\partial F}{\partial z}(c_1(t),c_2(t),t),\\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(c_1(t),c_2(t),t) + t\,\frac{\partial F}{\partial y}(c_1(t),c_2(t),t)\right){c_2}'(t) \\ = -t\,\frac{\partial F}{\partial z}(c_1(t),c_2(t),t).\end{aligned} \tag{103}$$

[(103) folgt durch Differenzieren von (102) und anschließender Ausnutzung von (101).]

Bemerkung. (103) ist ein System von Differentialgleichungen für zwei gesuchte Funktionen c_1, c_2. Kann man dieses lösen, so erhält man eine Parametrisierung (c_1,c_2) eines Lösungsgraphen von $F(x,y(x),y'(x)) = 0$. Falls c_1 zusätzlich ein glatter Weg ist, so liefert (100) eine explizite Darstellung einer Lösung.

Diese Methode zum Auffinden einer Lösung heißt *Integration durch Differentiation*. Man beachte, daß man dadurch i.a. nicht sämtliche Lösungen erhält.

Beispiel. $\boxed{y(x) = 2x\,y'(x) + \mathrm{e}^{y'(x)}}$ ergibt gemäß (102)

$$c_2(t) = 2\,c_1(t)\,t + \mathrm{e}^t. \tag{104}$$

Hieraus folgt mit (101), daß gilt $t\,{c_1}'(t) = 2\,{c_1}'(t)\,t + 2\,c_1(t) + \mathrm{e}^t$, also

$$t\,{c_1}'(t) = -2\,c_1(t) - \mathrm{e}^t. \tag{105}$$

Eine Lösung von (105) auf einem Intervall, das 0 nicht enthält, erhält man wie folgt: Die Differentialgleichung

$${c_1}'(t) = -\frac{2}{t}\,c_1(t) - \frac{\mathrm{e}^t}{t}$$

kann gemäß 2.5 gelöst werden. Aus (104) erhält man dann die zweite Komponente einer Parametrisierung.

5.3.

$$\boxed{x = g(y'(x)),} \tag{106}$$

wobei $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Zunächst ist klar, daß jede Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset g(J)$ definiert sein muß. Zusätzlich muß $y'\colon I \to \mathbb{R}$ injektiv sein.

Sei nun $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (106). Dann ist y' zwar i.a. unstetig, aber dennoch folgt aus dem Darbouxschen Zwischenwertsatz für die Ableitung (siehe Übung 8.1), daß $\widetilde{I} := y'(I) \subset J$ ebenfalls ein Intervall ist. Weiterhin ist

$$g|_{\widetilde{I}}\colon \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ injektiv.} \tag{107}$$

[Zu (107): Sind $t_1, t_2 \in \widetilde{I}$ mit $g(t_1) = g(t_2)$, so existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $y'(x_1) = t_1, y'(x_2) = t_2$, d.h. nach (106)

$$x_1 = g(y'(x_1)) = g(y'(x_2)) = x_2,$$

und somit gilt auch $t_1 = t_2$.]

Ist umgekehrt $\widetilde{I} \subset J$ ein Intervall mit (107), so folgt aus der Stetigkeit von g, daß $I := g(\widetilde{I})$ ebenfalls ein Intervall von $\mathbb{R}$ ist sowie die Existenz einer stetigen Umkehrfunktion $\left(g|_{\widetilde{I}}\right)^{-1}\colon I \to \widetilde{I}$ von $g|_{\widetilde{I}}$. Dann wird für $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{x \in I}\, y(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \left(g|_{\widetilde{I}}\right)^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \tag{108}$$

eine stetig differenzierbare Lösung von (106), $y(x_0) = y_0$ definiert.

Wir haben damit gezeigt, daß durch (108) sämtliche Lösungen von (106) gegeben sind.

5.4.

$$\boxed{y(x) = g(y'(x)),} \tag{109}$$

wobei $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion ist.

Wir untersuchen, welche Aussagen wir über $\mathcal{C}^2$-Lösungen $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (109) machen können.

Zunächst gilt $\forall_{x\in I}\, y'(x) = g'(y'(x))\, y''(x)$, also folgt

$$\forall_{x\in I}\, y''(x) = 0 \Longrightarrow \underbrace{y'(x) = 0}_{\overset{(109)}{\Rightarrow} 0\in J}.$$

Daher gibt es nur im Falle $0 \in J$ eine Lösung mit $y'' = 0$, und für diese gilt dann auch $y' = 0$, also $y = g(0)$.

Besitzt hingegen y'' überhaupt keine Nullstelle, also

$$\forall_{x\in I}\, y''(x) \neq 0,$$

so folgt mit $c_1 := (y')^{-1}\colon \underbrace{\widetilde{I}}_{\subset J} \to I, c_2 := y \circ c_1\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ wie in (98), (99) nach (109)

$$\forall_{t\in\widetilde{I}}\, c_2(t) = g(t) \tag{110}$$

und daher aus (101)

$$\forall_{t\in\widetilde{I}}\, g'(t) = t\, \underbrace{{c_1}'(t)}_{\neq 0}. \tag{111}$$

Seien nun $I_0 \subset \widetilde{I}$ ein Intervall mit $0 \notin I_0$, $x_0 \in c_1(I_0)$, $t_0 \in I_0$ mit $c_1(t_0) = x_0$ sowie $y_0 := c_2(t_0) = g(t_0)$. Dann folgt aus (111)

$$\forall_{t\in I_0}\, c_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

und somit nach Definition von c_2 und (110)

$$\forall_{x\in c_1(I_0)}\, y(x) = g({c_1}^{-1}(x)) = g\Big(\big((t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\, \mathrm{d}\tau)|_{I_0}\big)^{-1}(x)\Big). \tag{112}$$

Besitzt $g'|_{I_0}$ keine Nullstelle, so ist umgekehrt durch (112) eine Lösung von (109) gegeben.

5.5. Wir betrachten die sog. *Clairautsche Differentialgleichung*

$$\boxed{y(x) = x\, y'(x) + g(y'(x)),} \tag{113}$$

wobei $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

(i) Ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Lösung von (95) mit $y'' = 0$. Dann existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\forall_{x\in I}\, y(x) = \lambda x + \mu$, und aus (113) folgt $\forall_{x\in I}\, \lambda x + \mu = \lambda x + g(\lambda)$, also insbesondere $\lambda \in J$.

Umgekehrt wird für jedes $\lambda \in J$ durch

$$y_\lambda\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda x + g(\lambda)$$

eine Lösung von (113) definiert.

(ii) Sei nun zusätzlich g eine $\mathcal{C}^2$-Funktion mit

$$\forall_{x\in J}\, g''(x) > 0.$$

Dann ist offenbar $-g'\colon J \to \widetilde{J}$ ein Diffeomorphismus von J auf ein offenes Intervall $\widetilde{J}$ von $\mathbb{R}$. $h\colon \widetilde{J} \to J$ bezeichne die Umkehrabbildung von $-g'$.

Ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Lösung von (113) mit

$$\forall_{x\in I}\, y''(x) \neq 0,$$

so folgt aus (113)

$$\begin{aligned} \forall_{x\in I}\, y'(x) &= y'(x) + x\,y''(x) + g'(y'(x))\,y''(x) \\ &= y'(x) + \underbrace{y''(x)}_{\neq 0}\,\big(x + g'(y'(x))\big), \end{aligned}$$

also $\forall_{x\in I}\, x = -g'(y'(x))$ und $y' = h|_I$. Letzteres ergibt zusammen mit (113) für jedes $x \in I$

$$y(x) = x\,h(x) + g(h(x)) \tag{114}$$

Definiert man umgekehrt $y\colon \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ durch (114), so erfüllt y offenbar die Differentialgleichung (113).

Die Kurve $M := \operatorname{Graph} y$ ist *Enveloppe (Einhüllende)* der Geradenschar $\{G_\lambda := \operatorname{Graph} y_\lambda \,|\, \lambda \in J\}$, d.h. per definitionem, daß die Geradenschar $\{G_\lambda \,|\, \lambda \in J\}$ genau die Schar aller Tangenten an die Kurve M ist. Für jedes $\lambda \in J$ tangiert G_λ die Kurve M in genau einem Punkt (nämlich im Punkt $(x_0, y(x_0))$, wobei $x_0 = -g'(\lambda)$, d.h. $\lambda = h(x_0)$) und verläuft sonst oberhalb von M.

[Beweis hiervon: Für die Tangente $T_{y(x_0)}(x)$ an $y(x_0)$ mit $T(0) = y(x_0)$ gilt

$$\begin{aligned} & T_{y(x_0)}(x) = y'(x_0)\,(x - x_0) + y(x_0) \\ \overset{(114),\, h=(-g')^{-1}}{\iff} \quad & T_{y(x_0)}(x) = h(x_0)\,x + g(h(x_0)) \\ \iff \quad & T_{y(x_0)}(x) = y_\lambda(x) \text{ mit } \lambda = h(x_0). \end{aligned}$$

Daher besitzen $\operatorname{Graph} y$ und $\operatorname{Graph} y_\lambda$ für jedes $\lambda \in J$ mindestens einen Schnittpunkt, nämlich für $x_0 = -g'(\lambda)$.

Weiterhin gilt $y' = h$ und $y'_\lambda = \lambda$. Da h wegen

$$h' = \big((-g')^{-1}\big)' = \frac{1}{-g'' \circ (-g')^{-1}} \overset{g''>0}{<} 0$$

streng monoton fallend ist, gilt

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} x_0 \iff y'(x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} y'(x_0) = h(-g'(\lambda)) = -\lambda = y'_\lambda(x_0).$$

Hieraus folgt, daß sich $\operatorname{Graph} y$ und $\operatorname{Graph} y_\lambda$ nur in $(x_0), y(x_0))$ schneiden.]

Bemerkung. Aus den linearen Lösungen y_λ und der nicht-linearen Lösung y lassen sich weitere Lösungen zusammensetzen. Es läßt sich zeigen, daß man so alle Lösungen von (113) erhält, vgl. z.B. [5].

5.6. Die sog. *Alembertsche Differentialgleichung*

$$\boxed{y(x) = x\,f(y'(x)) + g(y'(x)),} \tag{115}$$

wobei $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, verallgemeinert offenbar 5.5.

(i) Wie in 5.5 sei für jedes $\lambda \in J$ die Funktion $y_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_\lambda(x) = \lambda x + g(\lambda).$$

Dann ist $\{y_\lambda \,|\, \lambda \in J \text{ mit } f(\lambda) = \lambda\}$ genau die Menge der $\mathcal{C}^2$-Lösungen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (115).

[Denn aus $y(x) = \lambda x + \mu$ folgt mit (115) $f(\lambda) = \lambda$ sowie $g(\lambda) = \mu$, und y_λ mit $f(\lambda) = \lambda$ erfüllt offenbar (115).]

(ii) Seien zusätzlich f, g $\mathcal{C}^1$-Funktionen.

a) Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall definierte $\mathcal{C}^2$-Lösung von (115) mit

$$\forall_{x\in I}\, y''(x) \neq 0.$$

Dann folgt mit $c_1 := (y')^{-1}\colon \underbrace{\widetilde{I}}_{\subset J} \to I, c_2 := y \circ c_1\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ wie in (98), (99) aus (115) für jedes $t \in \widetilde{I}$

$$c_2(t) = y \circ c_1(t) = c_1(t)\, f(t) + g(t), \tag{116}$$

$$t\,{c_1}'(t) \overset{(102)}{=} {c_2}'(t) = {c_1}'(t)\, f(t) + c_1(t) f'(t) + g'(t),$$

$$ {c_1}'(t)\,(t - f(t)) = c_1(t)\, f'(t) + g'(t). \tag{117}$$

Im Falle $\forall_{t\in\widetilde{I}} f(t) \neq t$ erfüllt c_1 also die lineare inhomogene lineare Differentialgleichung

$${c_1}'(t) = \frac{f'(t)}{t - f(t)}\, c_1(t) + \frac{g'(t)}{t - f(t)}, \tag{118}$$

die wir mittels 2.5 lösen können.

Bemerkung. Im Falle der Clairautsche Differentialgleichung gilt stets $f(t) = t$ und $f'(t) = 1$, also nach (117) $c_1(t) = -g'(t)$. Mit $h := {c_1}^{-1} = (-g')^{-1}$ folgt dann aus der Definition von c_1 zunächst $y' = h$ und sodann nach (117) auch $y(x) = x\,h(x) + g(h(x))$, vgl. 5.5.

b) Sind $\widetilde{I} \subset J$ ein offenes Intervall mit $\forall_{t\in\widetilde{I}} f(t) \neq t$, $c_1\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (118) mit $\forall_{t\in\widetilde{I}} {c_1}'(t) \neq 0$ und $c_2\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ durch (116) definiert, so

wird durch (100) eine $\mathcal{C}^2$-Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (115) definiert mit $\forall_{x\in I}\, y'(x) = {c_1}^{-1}(x)$ und somit auch $\forall_{x\in I}\, y''(x) \neq 0$.
[Zum Beweis hiervon genüge c_1 der Differentialgleichung (118), d.h. es gilt (117). Nach Definition von c_2 durch (116) folgt dann

$$ {c_2}'(t) = {c_1}'(t)\, f(t) + c_1(t)\, f'(t) + g'(t) \overset{(117)}{=} t\, {c_1}'(t). $$

Hieraus und aus der Definition von $y = c_2 \circ {c_1}^{-1}$ folgt weiter

$$ \begin{aligned} y'(x) &= {c_2}' \circ {c_1}^{-1}(x)\, \left({c_1}^{-1}\right)'(x) \\ &= {c_1}'({c_1}^{-1}(x))\, {c_1}^{-1}(x)\, \frac{1}{{c_1}'({c_1}^{-1}(x))} = {c_1}^{-1}(x) \end{aligned} $$

und schließlich wegen $y = c_2 \circ {c_1}^{-1}$ sowie der Gültigkeit von (116)

$$ y(x) = x\, f(y'(x)) + g(y'(x)), $$

d.h. y erfüllt (115).]

6 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Definition 6.1 (Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung)**.** Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(i) Seien $A\colon J \to \mathrm{End}(V)$ und $b\colon J \to V$ stetige Abbildungen. Dann heißt

$$\boxed{y'(x) = A(x)\,y(x) + b(x)} \tag{119}$$

(in Verallgemeinerung von 2.4 und 2.5) *lineare Differentialgleichung erster Ordnung (mit Werten in V).*

Im Falle $V = \mathbb{R}^n$ läßt sich (119) auch als folgendes *lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung* auffassen:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_1'(x) &=& a_{11}(x)\,y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x)\,y_n(x) + b_1(x) \\ &\vdots& \\ y_n'(x) &=& a_{n1}(x)\,y_1(x) + \ldots + a_{nn}(x)\,y_n(x) + b_n(x) \end{array}} \tag{120}$$

(ii) Im Falle $b = 0$ heißen (119) bzw. (120) *linear homogen*, andernfalls heißen sie *linear inhomogen.*

Hauptsatz 6.2 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $A\colon J \to \mathrm{End}(V)$ und $b\colon J \to V$ stetige Abbildungen.*
Beh.: *Für jedes $(x_0, y_0) \in J \times V$ besitzt die (V-wertige) Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x) = A(x)\,y(x) + b(x), \quad y(x_0) = y_0} \tag{121}$$

genau eine auf ganz J definierte Lösung $y\colon J \to \mathbb{R}$, und alle Lösungen von (121) sind Beschränkung dieser maximalen Lösung.

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß gilt:

Für jedes kompakte Intervall $I \subset J$ mit $x_0 \in I$ existiert genau eine Lösung $y\colon I \to V$ von (121).

(Beachte, daß J Vereinigung derartiger kompakter Intervalle ist.)

Seien also $I \subset J$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \times V \to V$ definiert durch

$$f(x, y) := A(x)\,y + b(x).$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf 3.14 bleibt lediglich zu zeigen, daß f einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt.

Beweis hiervon: Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V. Dann ist auch $\mathrm{End}(V)$ mit der entsprechenden Operatornorm, die wir ebenfalls mit $\|\dots\|$ bezeichnen, normiert. Wegen der Kompaktheit von I und der Stetigkeit von $\|A(\dots)\|_I$ existiert $L \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall_{x\in I}\, \|A(x)\| \le L$. Dann folgt für alle $(x,y),(x,\tilde{y}) \in I \times V$

$$\begin{aligned} \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| &= \|A(x)\,y - A(x)\,\tilde{y}\| = \|A(x)\,(y-\tilde{y})\| \\ &\le \|A(x)\|\,\|y-\tilde{y}\| \le L\,\|y-\tilde{y}\|. \end{aligned}$$

□

Wir untersuchen im folgenden zunächst den homogenen Fall näher.

Satz 6.3.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A\colon J \to \mathrm{End}(V)$ eine stetige Abbildung.*
Beh.:

(i) Die Menge $\mathcal{L}$ aller auf ganz J definierten Lösungen $y\colon J \to V$ von

$$y'(x) = A(x)\,y(x) \tag{122}$$

ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(ii) Für jedes $x_0 \in J$ ist die Abbildung

$$\mathcal{L} \longrightarrow V, \quad y \longmapsto y(x_0) \tag{123}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus.

(iii) Für alle $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{L}$ gilt

$$\begin{aligned} &\{y_1,\dots,y_n\} \text{ Basis von } \mathcal{L} \\ \iff\ &\forall_{x\in J}\,\{y_1(x),\dots,y_n(x)\} \text{ Basis von } V \\ \iff\ &\exists_{x\in J}\,\{y_1(x),\dots,y_n(x)\} \text{ Basis von } V. \end{aligned}$$

Definiton. Eine Basis $\{y_1,\dots,y_n\}$ von $\mathcal{L}$ heißt ein *Fundamentalsystem von Lösungen von (122).*

Beweis. Zu (i), (ii): Für alle $y,\tilde{y} \in \mathcal{L}$, $\lambda,\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $x \in J$ gilt

$$\begin{aligned} (\lambda y + \tilde{\lambda}\tilde{y})'(x) &= \lambda y'(x) + \tilde{\lambda}\tilde{y}'(x) = \lambda A(x)\,y(x) + \tilde{\lambda}A(x)\,\tilde{y}'(x) \\ &= A(x)\,(\lambda y + \tilde{\lambda}\tilde{y})(x), \end{aligned}$$

also ist $\mathcal{L}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Abbildung (123) ist trivialerweise $\mathbb{R}$-linear und nach 6.2 auch bijektiv, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus.
(iii) folgt aus (ii). □

Satz 6.4.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A\colon J \to \mathrm{End}(V)$ eine stetige Abbildung.*
Beh.: *Für jedes $(x_0, Y_0) \in J \times \mathrm{End}(V)$ besitzt die ($\mathrm{End}(V)$-wertige) Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{Y'(x) = A(x) \circ Y(x), \quad Y(x_0) = Y_0} \tag{124}$$

genau eine Lösung $Y\colon J \to \mathrm{End}(V)$.

Zusatz.

a) Seien $x_0 \in J$ und $\mathfrak{Y}_{x_0}\colon J \to \mathrm{End}(V)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$Y'(x) = A(x) \circ Y(x), \quad Y(x_0) = \mathrm{id}_V.$$

Dann ist für jedes $y_0 \in V$ die eindeutig bestimmte Lösung $y\colon J \to V$ der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = A(x)\, y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben durch

$$\forall_{x \in J}\, y(x) = \mathfrak{Y}_{x_0}(x)\, y_0. \tag{125}$$

b) Ist $B \in \mathrm{End}(V)$, so ist mit $Y\colon J \to \mathrm{End}(V)$ auch

$$Y \circ B\colon J \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad x \longmapsto Y(x) \circ B$$

Lösung von $Y'(x) = A(x) \circ Y(x)$.

Bemerkung. Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, können wir $\mathrm{End}(V)$ kanonisch mit $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ identifizieren. Sind dann $y_1, \ldots, y_n\colon J \to \mathbb{R}^n$ n Lösungen von

$$y'(x) = A(x)\, y(x),$$

also ist $y_j = \begin{pmatrix} y_{j1} \\ \vdots \\ y_{jn} \end{pmatrix}\colon J \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit ${y_j}'(x) = A(x)\, y_j(x)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, so ist

$$Y := (y_1 \ldots y_n) = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}\colon J \longrightarrow \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

Lösung der $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$-wertigen Differentialgleichung

$$Y'(x) = A(x)\, Y(x).$$

Beweis. Zum Zusatz: a) Sei $y\colon J \to V$ durch (125) definiert. Dann folgt aus der Bilinearität von $\mathrm{End}(V) \times V \to V$, $(Y, x) \mapsto Y(x)$, der Konstanz von y_0 und Analysis II für jedes $x \in J$

$$y'(x) = {\mathfrak{Y}_{x_0}}'(x)\, y_0 = A(x) \circ \mathfrak{Y}_{x_0}\, y_0 = A(x)\, y(x)$$

sowie

$$y(x_0) = \underbrace{\mathfrak{Y}_{x_0}}_{= \mathrm{id}_V}\, y_0.$$

b) Für $x \in J$ gilt

$$(Y \circ B)'(x) = Y'(x) \circ B = A(x) \circ Y(x) \circ B = A(x) \circ (Y \circ B)(x).$$

Beweis des Satzes: Wie im Beweis von 6.2 genügt es zu zeigen:

Ist $I \subset J$ ein kompaktes Teilintervall, so genügt

$$f\colon I \times \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad (x, Y) \longmapsto A(x) \circ Y$$

einer Lipschitzbedingung bzgl. Y.

Beweis hiervon: Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V. Dann ist auch $\mathrm{End}(V)$ mit der entsprechenden Operatornorm, die wir ebenfalls mit $\|\dots\|$ bezeichnen, normiert. Wegen der Kompaktheit von I und der Stetigkeit von $\|A(\dots)\|_I$ existiert $L \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall_{x \in I} \|A(x)\| \le L$. Dann folgt für alle $(x, Y), (x, \widetilde{Y}) \in I \times \mathrm{End}(V)$

$$\begin{aligned} \|f(x,Y) - f(x,\widetilde{Y})\| &= \|A(x) \circ Y - A(x) \circ \widetilde{Y}\| = \|A(x) \circ (Y - \widetilde{Y})\| \\ &\le \|A(x)\| \, \|Y - \widetilde{Y}\| \le L \, \|Y - \widetilde{Y}\|. \end{aligned}$$

□

Satz 6.5 (Wronski-Determinante)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $A\colon J \to \mathrm{End}(V)$ eine stetige Abbildung und $Y\colon J \to \mathrm{End}(V)$ eine Lösung von*

$$Y'(x) = A(x) \circ Y(x). \tag{126}$$

Beh.: *$\phi := \det Y\colon J \to \mathbb{R}$, die sog.* Wronski-Determinante *ist Lösung der Differentialgleichung*

$$\phi'(x) = \mathrm{Spur}\, A(x) \; \phi(x), \tag{127}$$

also gilr nach 2.4 für beliebiges $x_0 \in J$

$$\forall_{x \in J} \det Y(x) = \det Y(x_0) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{Spur}\, A(t) \, \mathrm{d}t \right)$$

und daher entweder $\forall_{x \in J} \det Y(x) \neq 0$ oder $\forall_{x \in J} \det Y(x) = 0$.

Beweis. Sei $x_0 \in J$ beliebig. Wir haben zu zeigen, daß gilt

$$\phi'(x_0) = \mathrm{Spur}\, A(x_0) \; \phi(x_0). \tag{128}$$

Nach 6.4 inkl. Zusatz a) und b) gilt

$$\forall_{x \in J} Y(x) = \mathfrak{Y}_{x_0}(x) \circ Y(x_0). \tag{129}$$

[Denn auf beiden Seiten von (129) stehen Lösungen von (126), die wegen $\mathfrak{Y}_{x_0}(x_0) = \mathrm{id}_V$ an der Stelle x_0 denselben Wert haben.]
Daher folgt

$$\forall_{x \in J} \phi(x) = \det Y(x) \overset{(129)}{=} \det \mathfrak{Y}_{x_0}(x) \cdot \underbrace{\det Y(x_0)}_{= \phi(x_0)}$$

und daher auch

$$\phi'(x_0) = (\det \mathfrak{Y}_{x_0})'(x_0) \, \phi(x_0).$$

Zum Nachweis von (128) bleibt daher zu zeigen, daß gilt

$$(\det \mathfrak{Y}_{x_0})'(x_0) = \operatorname{Spur} A(x_0).$$

Beweis hiervon: Wir definieren $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(s) := \det(\mathrm{id}_V + s\,A(x_0))$. Bezeichnet dann $P_{A(x_0)}$ das charakteristische Polynom von $A(x_0)$, so gilt für alle $s \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} h(s) &= \det\left(s\left(A(x_0) + \frac{1}{s}\,\mathrm{id}_V\right)\right) = s^n\,P_{A(x_0)}(-\frac{1}{s}) \text{ mit } n := \dim_{\mathbb{R}} V \\ &= s^n\left((-1)^n\left(-\frac{1}{s}\right)^n + (-1)^{n-1}\operatorname{Spur} A(x_0)\left(-\frac{1}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \det A(x_0)\right) \\ &= 1 + \operatorname{Spur} A(x_0)\,s + \ldots + \det A(x_0)\,s^n, \end{aligned}$$

also $h'(0) = \operatorname{Spur} A(x_0)$ und somit

$$\begin{aligned} (\det \mathfrak{Y}_{x_0})'(x_0) &= \left(\mathrm{d}_{\mathfrak{Y}_{x_0}(x_0)} \det\right)\left(\mathfrak{Y}_{x_0}{}'(x_0)\right) \\ &\overset{6.4\,a)}{=} (\mathrm{d}_{\mathrm{id}_V} \det)\,(A(x_0) \circ \mathrm{id}_V) = (\mathrm{d}_{\mathrm{id}_V} \det)\,(A(x_0)) \\ &= h'(0) = \operatorname{Spur} A(x_0). \end{aligned}$$

□

6.6 (D'Alembertsches Reduktionsverfahren für lineare homogene Systeme erster Ordnung)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}\colon J \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Wir betrachten das lineare homogene System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\boxed{\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}\; y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,y_j(x),} \tag{130}$$

d.h. $y'(x) = A(x)\,y(x)$.

I.a. ist es nicht möglich, für die Lösungen von (130) explizite Formeln anzugeben. Kennt man jedoch eine von Null verschiedene Lösung von (130), so läßt sich das Auffinden aller Lösungen von (130) zurückführen auf das Lösen eines linearen homogenen Systems von $(n-1)$ Differentialgleichungen, also einer Differentialgleichung weniger, und zwar nach dem *d'Alembertschen Reduktionsverfahren*, das wir im folgenden beschreiben:

Sei

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ eine von Null verschiedene Lösung von (130).} \tag{131}$$

Ist $x_0 \in J$ beliebig, so gilt nach 6.3 (ii) $u(x_0) \neq 0$, also existiert $k \in \{1,\ldots,n\}$ mit $u_k(x_0) \neq 0$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß gilt $u_1(x_0) \neq 0$ (andernfalls sind die Komponenten umzunumerieren.) Aus Stetigkeitsgründen existiert dann eine Intervall-Umgebung $I \subset J$ von x_0 mit

$$\forall_{x\in I}\; u_1(x) \neq 0. \tag{132}$$

Dem Reduktionsverfahren von d'Alembert liegt folgende Idee zugrunde: Suche weitere Lösungen $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (130) von der Gestalt

$$y(x) = \phi(x)\,u(x) + z(x) \text{ mit } z_1 = 0,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \phi(x) \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}, \tag{133}$$

wobei $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ und $z_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, differenzierbare Funktionen sind.

$y\colon I \to \mathbb{R}$ wie in (133) ist genau dann Lösung von (130), wenn gilt

$$\phi'(x)\,u(x) + \phi(x)\,u'(x) + z'(x) = \phi(x)\,A(x)\,u(x) + A(x)\,z(x),$$

d.h. wegen (131) genau

$$z'(x) = A(x)\,z(x) - \phi'(x)\,u(x). \tag{134}$$

(134) ist wegen $z = 0$, $z' = 0$ äquivalent zu

$$\sum_{j=2}^{n} a_{1j}(x)\,z_j(x) = \phi'(x)\,\underbrace{u_1(x)}_{\overset{(132)}{\neq} 0} \tag{135}$$

$$\text{und } \forall_{i \in \{2,\ldots,n\}}\, z_i'(x) = \left(\sum_{j=2}^{n} a_{ij}(x)\,z_j(x)\right) - \underbrace{\phi'(x)}_{\overset{(135)}{=} \ldots}\,u_i(x),$$

d.h. zu $\big((135) \wedge (136)\big)$, wobei

$$\forall_{i \in \{2,\ldots,n\}}\, z_i'(x) = \sum_{j=2}^{n} \left(a_{ij}(x) - \frac{u_i(x)}{u_1(x)}\,a_{1j}(x)\right) z_j(x) \tag{136}$$

ein lineares homogenes System von $(n-1)$ Differentialgleichungen ist.

Hat man eine von Null verschiedene Lösung $\begin{pmatrix} z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}\colon I \to \mathbb{R}^{n-1}$ von (136) gefunden, so kann man dazu $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ wie in (135) bestimmen, d.h.

$$\phi(x) \text{ beliebige Stammfunktion von } \frac{1}{u_1(x)} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(x)\,z_j(x), \tag{137}$$

und erhält dann durch (133) eine weitere Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ von (130).

Wir zeigen darüber hinaus, daß man auf diese Weise prinzipiell alle Lösungen von (130) erhalten kann:

Satz. *Seien* $\left\{z^k = \begin{pmatrix} z_2^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix} \mid k \in \{1, \ldots, n-1\}\right\}$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen* $I \to \mathbb{R}^{n-1}$ *von (136) und* ϕ^k *zu* z^k *gemäß (137) bestimmt.*

Dann definiert (133) für $k \in \{1,\dots,n-1\}$ eine Lösung $y^k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ von (130), und $\{u|_I, y^1, \dots, y^{n-1}\}$ bildet ein Fundamentalsystem von Lösungen $I \to \mathbb{R}^n$ von (130).

Beweis. Seien $\lambda, \lambda^1, \dots, \lambda^{n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda\, u|_I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k y^k = 0. \tag{138}$$

(138) bedeutet für die erste Komponente

$$\lambda\, u_1|_I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k \underbrace{y_1^k}_{\overset{(133)}{=} \phi^k\, u_1|_I} = 0,$$

d.h. wegen (132)

$$\lambda + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k\, \phi^k = 0, \tag{139}$$

und für die weiteren Komponenten $i \in \{2,\dots,n\}$

$$\lambda\, u_i|_I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k\, y_i^k = 0,$$

d.h. nach (133)

$$\left(\lambda + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k\, \phi^k\right) u_i|_I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k\, z_i^k,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k \begin{pmatrix} z_2^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix} = 0,$$

und $\left\{ \begin{pmatrix} z_2^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix} \mid k \in \{1,\dots,n-1\} \right\}$ bildet ein Fundamentalsystem von Lösungen von (136). Hieraus folgt zunächst $\lambda^k = 0$ für $k \in \{1,\dots,n-1\}$ und sodann aus (139) auch $\lambda = 0$, womit der Satz gezeigt ist. □

Beispiel. Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{1}{x}\, y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= \frac{1}{x^2}\, y_1(x) + \frac{2}{x}\, y_2(x) \end{aligned} \tag{140}$$

Es gilt also

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R}). \tag{141}$$

Offenbar ist $u(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ Lösung von (140) mit $\forall_{x \in \mathbb{R}_+} u_1(x) \neq 0$. (136) lautet dann

$$z_2{}'(x) = \left(a_{22}(x) - \frac{u_2(x)}{u_1(x)} a_{12}(x) \right) z_2(x) \overset{(141)}{=} \frac{1}{x} z_2(x),$$

und hat als Lösung

$$z_2(x) = x, \tag{142}$$

also $\{x\}$ als Fundamentalsystem. (137) lautet

$$\phi'(x) = \frac{1}{u_1(x)} a_{12}(x) z_2(x) \overset{(141),(142)}{=} -\frac{1}{x},$$

also können wir (wegen $x \in \mathbb{R}_+$) wählen

$$\phi(x) = -\ln(x). \tag{143}$$

Die weitere Lösung $y(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$ von (140) gemäß (133) ist also gleich

$$\begin{aligned} y(x) &= \phi(x) \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \end{pmatrix} \overset{(141),(142),(143)}{=} -\ln(x) \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^2 \ln(x) \\ x \ln(x) + x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^2 \ln(x) \\ x \ln(x) + x \end{pmatrix} \right\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (140) bildet.

6.7 (Das Lösen linearer inhomogener Systeme erster Ordnung)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_+$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A\colon J \to \mathrm{End}(V)$, $b\colon J \to V$ stetige Abbildungen. Wir betrachten das lineare inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\boxed{y'(x) = A(x)\, y(x) + b(x).} \tag{144}$$

Das zugehörige homogene System ist

$$y'(x) = A(x)\, y(x). \tag{145}$$

Zunächst gilt analog zu (17):

Man erhält alle global auf ganz J definierten Lösungen von (144), indem man zu einer beliebigen einzelnen Lösung $J \to V$ alle Lösungen $J \to V$ des zugehörigen homogenen Systems (145) hinzuaddiert. (146)

Wir haben in 6.6 diskutiert, wie man – in günstigen Fällen – alle globalen Lösungen des homogenen finden kann. Dies führt dann zu Y wie in (147), s.u. Wir zeigen nun, wie man dann analog zu 2.5 eine spezielle Lösung von (144) mittels *Variation der Konstanten* finden kann.

Sei $Y\colon J \to \mathrm{End}(V)$ eine Lösung der $\mathrm{End}(V)$-wertigen Differentialgleichung

$$Y'(x) = A(x) \circ Y(x) \tag{147}$$

(vgl. 6.2) mit $\exists_{x\in J} \det Y(x) \neq 0$, d.h. genau nach 6.5

$$\forall_{x\in J} \det Y(x) \neq 0, \text{ also } Y(x) \in \mathrm{Aut}(V).$$

Dann gilt:

Alle Lösungen $J \to V$ von (145) sind durch

$$y_v\colon J \longrightarrow V, \quad x \longmapsto Y(x)\,v, \quad \text{wobei } v \in V, \tag{148}$$

gegeben.

[Zu (148): Wegen der Bilinearität von $\mathrm{End}(V) \times V \to V$, $(B, y) \mapsto By$ gilt nach Analysis II

$$\forall_{x\in J}\, {y_v}'(x) = Y'(x)\,v \overset{(147)}{=} A(x) \circ Y(x)\,v = A(x)\,y_v(x),$$

d.h. y_v ist Lösung von (145).

Ist nun $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine beliebige Basis von V, so ist für jedes $x \in J$ wegen $Y(x) \in \mathrm{Aut}(V)$ auch $\{\underbrace{Y(x)\,v_1}_{=y_{v_1}(x)}, \ldots, \underbrace{Y(x)\,v_n}_{=y_{v_n}(x)}\}$ eine Basis von V, d.h. nach 6.3 (ii), daß $\{y_{v_1}, \ldots, y_{v_n}\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (145) ist. Damit ist (148) klar.]

Um eine Lösung $y\colon V$ von (144) zu finden, machen wir nun den Ansatz

$$y(x) = Y(x)\,v(x), \tag{149}$$

wobei $v\colon J \to V$ eine noch zu bestimmende differenzierbare Abbildung ist.

$y\colon J \to V$ wie in (149) ist Lösung von (144) genau dann, wenn für alle $x \in J$ gilt

$$\begin{aligned} A(x)\,y(x) + b(x) &\overset{(144)}{=} y'(x) \overset{(149)}{=} Y'(x)\,v(x) + Y(x)\,v'(x) \\ &\overset{(147)}{=} A(x) \circ Y(x)\,v(x) + Y(x)\,v'(x) \\ &\overset{(149)}{=} A(x)\,y(x) + Y(x)\,v'(x), \end{aligned}$$

d.h. wegen $Y(x) \in \mathrm{Aut}(V)$, daß gilt $v'(x) = Y(x)^{-1}\,b(x)$, also falls $x_0 \in J$ beliebig

$$\forall_{x\in J}\, v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}\,b(t)\,\mathrm{d}t. \tag{150}$$

Aus (149), (150) folgt:

Für $x_0 \in J$ ist die Lösung $y\colon J \to \mathbb{R}$ von (144) mit $y(x_0) = 0$ gegeben durch

$$\forall_{x\in J}\, y(x) = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}\, b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} Y(x) \circ Y(t)^{-1}\, b(t)\,\mathrm{d}t. \tag{151}$$

Beachte bei der letzten Gleichheit, daß auf beiden Seiten Abbildungen $J \to V$ stehen, die an der Stelle x_0 verschwinden und auf J dieselbe Ableitung haben.

Aus (146), (148), (151) folgt schließlich:

Für alle $(x_0, y_0) \in J \times V$ ist die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = A(x)\, y(x) + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben durch

$$\forall_{x\in J}\, y(x) = Y(x) \circ Y(x_0)^{-1}\, y_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}\, b(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $Y\colon J \to \mathrm{Aut}(V)$ Lösung von $Y'(x) = A(x) \circ Y(x)$ ist.

Satz 6.8 (Die Exponentialabbildung für Endomorphismen als differenzierbare Abbildung)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(i) Durch

$$\boxed{\forall_{A\in\mathrm{End}(V)}\ \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$

wird eine Abbildung $\exp\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ *definiert, die sog.* Exponentialabbildung für $\mathrm{End}(V)$.

(ii) $\exp\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ *ist differenzierbar und für alle* $A, B \in \mathrm{End}(V)$ *gilt*

a) $(\mathrm{d}_A \exp)(B)$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(A^{k-1} \circ B + A^{k-2} \circ B \circ A + A^{k-3} \circ B \circ A^2 + \ldots + B \circ A^{k-1}\right)$,

b) $A \circ B = B \circ A \Longrightarrow (\mathrm{d}_A \exp)(B) = \exp(A) \circ B = B \circ \exp(A)$,

c) $\mathrm{d}_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(V)}$.

(iii) a) $\forall_{A,B\in\mathrm{End}(V)}\, A \circ B = B \circ A \Longrightarrow \exp(A + B) = \exp(A) \circ \exp(B)$,

b) $\exp(\mathrm{End}(V)) \subset \mathrm{Aut}(V)$,

c) Für alle $A \in \mathrm{End}(V)$ *ist* $c\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(V)$, *definiert durch*

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\, c(t) := \exp(t\,A),$$

ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ *in* $\mathrm{Aut}(V)$ *mit* $c(0) = \mathrm{id}_V$ *und* $c'(0) = A$. *Insbesondere gilt für alle* $t, s \in \mathbb{R}$

$$\exp((s + t)\,A) = \exp(s\,A) \circ \exp(t\,A) \text{ und } \exp(t\,A)^{-1} = \exp(-t\,A).$$

Bemerkung. Im Falle $V = \mathbb{R}^n$ kann man $\mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ identifizieren und erhält eine Abbildung $\exp\colon \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, die sog. *Exponentialabbildung für Matrizen.* Im Falle $V = \mathbb{R}$ erhält man die übliche Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis. Wir wählen eine Norm auf V, also ist $\mathrm{End}(V)$ mit der Operatornorm $\| \dots \|$ versehen, und diese macht $\mathrm{End}(V)$ zu einem $\mathbb{R}$-Banachraum.

(i) folgt aus $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|) \in \mathbb{R}$.

Zu (ii) a): Wir zeigen zunächst, daß die rechte Seite von a) konvergiert:

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(A^{k-1} \circ B + A^{k-2} \circ B \circ A + \dots + B \circ A^{k-1} \right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\|A\|^{k-1} \|B\| + \dots + \|B\| \|A\|^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \|A\|^{k-1}}{k!} \|B\| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \|B\| = \exp(\|A\|) \|B\|. \end{aligned}$$

Nun weisen wir nach, daß für alle $A, B \in \mathrm{End}(V)$ mit $B \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\left\| \exp(A+B) - \exp(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(A^{k-1} \circ B + A^{k-2} \circ B \circ A + \dots + B \circ A^{k-1} \right) \right\|}{\|B\|} \qquad (152) \\ &\leq \frac{\exp(\|A\| + \|B\|) - \exp(\|A\|)}{\|B\|} - \exp(\|A\|). \end{aligned}$$

[Zu (152): Im folgenden ist es geschickt, $A_0 := A$ und $A_1 := B$ zu setzen. Es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned} (A_0 + A_1)^k &= (A_0 + A_1) \circ \dots \circ (A_0 + A_1) = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_k) \in \{0,1\}^k} A_{\nu_1} \circ \dots \circ A_{\nu_k} \\ &= \sum_{r=0}^{k} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_k) \in \{0,1\}^k \\ \nu_1 + \dots + \nu_k = r}} A_{\nu_1} \circ \dots \circ A_{\nu_k}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\left\| (A_0 + A_1)^k - A_0^k - \left(A_0^{k-1} \circ A_1 + A_0^{k-2} \circ A_1 \circ A_0 + \dots + A_1 \circ A_0^{k-1} \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{r=2}^{k} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_k) \in \{0,1\}^k \\ \nu_1 + \dots + \nu_k = r}} A_{\nu_1} \circ \dots \circ A_{\nu_k} \right\| \\ &\leq \sum_{r=2}^{k} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_k) \in \{0,1\}^k \\ \nu_1 + \dots + \nu_k = r}} \|A_{\nu_1}\| \cdots \|A_{\nu_k}\| \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} (\|A_0\| + \|A_1\|)^k - \|A_0\|^k \\ &\quad - \left(\|A_0\|^{k-1} \|A_1\| + \|A_0\|^{k-2} \|A_1\| \|A_0\| + \dots + \|A_1\| \|A_0\|^{k-1} \right) \\ &= (\|A_0\| + \|A_1\|)^k - \|A_0\|^k - k \|A_0\|^{k-1} \|A_1\|. \end{aligned}$$

Somit folgt für jedes $n \in \mathbb{N}_+$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\| (A_0 + A_1)^k - A_0^k - \left(A_0^{k-1} \circ A_1 + A_0^{k-2} \circ A_1 \circ A_0 + \ldots + A_1 \circ A_0^{k-1} \right) \right\|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(\|A_0\| + \|A_1\|)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\|A_0\|^k}{k!} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k \|A_0\|^{k-1} \|A_1\|}{k!}}_{= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|A_0\|^k}{k!} \right) \|A_1\|},$$

also

$$\begin{aligned}
&\left\| \exp(A_0 + A_1) - \exp(A_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(A_0^{k-1} \circ A_1 + \ldots + A_1 \circ A_0^{k-1} \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left((A_0 + A_1)^k - A_0^k \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(A_0^{k-1} \circ A_1 + \ldots + A_1 \circ A_0^{k-1} \right) \right\| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\left((A_0 + A_1)^k - A_0^k \right) - \left(A_0^{k-1} \circ A_1 + \ldots + A_1 \circ A_0^{k-1} \right) \right) \right\| \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\|A_0\| + \|A_1\|)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\|A_0\|^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|A_0\|^k}{k!} \right) \|A_1\| \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\|A_0\| + \|A_1\|)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A_0\|^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|A_0\|^k}{k!} \right) \|A_1\| \right) \\
&= \exp(\|A_0\| + \|A_1\|) - \exp(\|A_0\|) - \exp(\|A_0\|) \|A_1\|,
\end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich (152).]

(ii) a) folgt nun daraus, daß die rechte Seite von (152) für $\|B\| \to 0$ gegen

$$\exp'(\|A\|) - \exp(\|A\|) = \exp(\|A\|) - \exp(\|A\|) = 0$$

konvergiert.

(ii) b) und c) folgen sofort aus a).

Zu (iii) a): Seien $A, B \in \mathrm{End}(V)$ mit $A \circ B = B \circ A$. Dann ist nach (ii)

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad t \longmapsto \underbrace{\exp(A + tB)}_{=: f_1(t)} \circ \underbrace{\exp((1-t)B)}_{=: f_2(t)}$$

eine differenzierbare Abbildung. Aus der Bilinearität der Abbildung

$$\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad (X, Y) \longmapsto X \circ Y$$

und aus $(A + tB) \circ B = B \circ (A + tB)$ sowie $(1-t)B \circ B = B \circ (1-t)B$ folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_t f(1) &= \mathrm{d}_t f_1(1) \circ f_2(t) + f_1(t) \circ \mathrm{d}_t f_2(1) \\
&= (\mathrm{d}_{A+tB} \exp)(B) \circ \exp((1-t)B) \\
&\quad + \exp(A + tB) \circ (\mathrm{d}_{(1-t)tB} \exp)(B) \\
&\overset{(ii)\,b)}{=} \exp(A + tB) \circ B \circ \exp((1-t)B)
\end{aligned}$$

$$+\exp(A+tB)\circ(-B)\circ\exp((1-t)B)=0,$$

also ist f konstant vom Wert $\exp(A+B)=f(0)=f(1)=\exp(A)\circ\exp(B)$.

Zu (iii) b): Aus (iii) a) folgt für alle $A\in\mathrm{End}(V)$

$$\mathrm{id}_V=\exp(A-A)=\exp(A)\circ\exp(-A),$$

also $1=\det\exp(A)\cdot\det\exp(-A)$ und somit

$$\det\exp(A)\neq 0,$$

d.h. es gilt $\exp(A)\in\mathrm{Aut}(V)$.

Zu (iii) c): Sei c wie in (iii) c) definiert. Dann folgt für alle $s,t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c(s+t) &= \exp((s+t)A)=\exp(sA+tA)\\ &\overset{(iii)\,a)}{=} \exp(sA)\circ\exp(tA)\\ &= c(s)\circ c(t). \end{aligned}$$

□

Mithilfe der in 6.8 behandelte Exponentialabbildung können wir die Lösung der $\mathrm{End}(V)$-wertigen Differentialgleichung (124) im Spezialfall „A konstant und $(x_0,Y_0)=(0,\mathrm{id}_V)$“ explizit angeben:

Hauptsatz 6.9.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A\in\mathrm{End}(V)$.*
Beh.: *Die nach 6.4 eindeutig bestimmte Lösung $Y\colon\mathbb{R}\to\mathrm{End}(V)$ der Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{Y'(x)=A\circ Y(x),\quad Y(0)=\mathrm{id}_V}$$

ist gegeben durch

$$\boxed{\forall_{x\in\mathbb{R}}\,Y(x)=\exp(xA).} \tag{153}$$

Beweis. $Y\colon\mathbb{R}\to\mathrm{End}(V)$ wie in (153) ist differenzierbar als Komposition solcher Abbildungen. Nach Kettenregel und 6.8 (ii) b) folgt für jedes $x\in\mathbb{R}$

$$Y'(x)=(\mathrm{d}_{xA}\exp)(A)=A\circ\exp(xA)\overset{(153)}{=}A\circ Y(x),$$

und es gilt $Y(0)=\exp(0)=\mathrm{id}_V$. □

Aus 6.7 und 6.9 folgt sofort:

Hauptsatz 6.10.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $A\in\mathrm{End}(V)$, $J\subset\mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $b\colon J\to V$ eine stetige Abbildung und $(x_0,y_0)\in J\times V$.*
Beh.: *Die nach 6.2 eindeutig bestimmte Lösung $y\colon\mathbb{R}\to V$ der Anfangswertaufgabe*

$$\boxed{y'(x)=Ay(x)+b(x),\quad y(x_0)=y_0}$$

ist gegeben durch

$$\boxed{\forall_{x\in\mathbb{R}}\, y(x) = \exp((x-x_0)\,A)\,y_0 + \exp(x\,A)\int_{x_0}^{x} \exp(-t\,A)\,b(t)\,\mathrm{d}t.} \tag{154}$$

□

Wir wollen die Lösung eines linearen homogenen Systems mit konstanten Koeffizienten

$$y'(x) = A\,y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

noch einmal mit anderen Methoden diskutieren, nämlich unter Benutzung der Eigenwerte[14] von A. Wir wissen zwar nach (154), daß $y(x) = \exp((x-x_0)\,A)\,y_0$ die Lösung ist, in konkreten Fällen hätte man aber gern eine „noch explizitere" Beschreibung von $y(x)$.

Satz 6.11.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$. Es existiere ferner eine Basis $\{v_1,\ldots,v_n\}$ aus Eigenvektoren von A von V, d.h. A ist diagonalisierbar. Für $j \in \{1,\ldots,n\}$ sei v_j Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{R}$, also $A\,v_j = \lambda_j\,v_j$.*
Beh.: *Ist $y_j\colon \mathbb{R} \to V$ für $j \in \{1,\ldots,n\}$ definiert durch*

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\, y_j(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x}\,v_j,$$

so bildet $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ein Fundamentalsytem von Lösungen von

$$\boxed{y'(x) = A\,y(x).} \tag{155}$$

Beweis. Für $j \in \{1,\ldots,n\}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$y_j{}'(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x}\,\lambda_j\,v_j = \mathrm{e}^{\lambda_j x}\,A\,v_j = A\,(\mathrm{e}^{\lambda_j x}\,v_j) = A\,y_j(x),$$

also ist y_j Lösung von (155).

$\{y_1(0),\ldots,y_n(0)\}$ ist eine Basis von V, also bildet $\{y_1,\ldots,y_n\}$ nach 6.3 (iii) ein Fundamentalsystem von Lösungen von (155). □

I. a. sind Eigenwerte eines Endomorphismus A auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V nicht reell. Um auch in diesem Fall Lösungen von

$$y'(x) = A\,y(x)$$

ähnlich explizit angeben zu können, wie in 6.11, müssen wir die sog. *Komplexifizierungen* $V_{\mathbb{C}}$ von V und $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ betrachten.

[14] Unter einem *Eigenwert* verstehen wir hier eine ggf. komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynomes.

6.12 (Komplexifizierung reeller Vektorräume und Endomorphismen).

(i) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir setzen

$$\boxed{V_{\mathbb{C}} := V \times V,}$$

also ist $V_{\mathbb{C}}$ zunächst ebenfalls ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Für $u = (v, w) \in V_{\mathbb{C}}$ schreiben wir

$$\boxed{u =: v + \mathrm{i}\, w,} \quad \boxed{v =: \operatorname{Re} u,} \quad \boxed{w =: \operatorname{Im} u,}$$

und wir identifizieren $v \in V$ mit $(v, 0) = v + \mathrm{i}\, 0 \in V_{\mathbb{C}}$, d.h. wir betrachten V als $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $V_{\mathbb{C}}$.

Es gilt:

a) $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}\colon V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen.

b) Durch die Definition

$$\boxed{\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{v,w \in V} \, (\alpha + i\,\beta)\,(v, w) := (\alpha\, v - \beta\, w, \beta\, v + \alpha\, w)}$$

wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, den wir die *Komplexifizierung von* V nennen.

c) Sind $n := \dim V$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V, so ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ auch eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $V_{\mathbb{C}}$.

(ii) Für $A \in \operatorname{End}(V)$ definieren wir $\boxed{A_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}}$ durch

$$\forall_{v,w \in V} \, A_{\mathbb{C}}(v + \mathrm{i}\, w) = A\, v + \mathrm{i}\, A\, w.$$

$A_{\mathbb{C}}$ heißt die *Komplexifizierung von* A.

Dann gilt:

a) $A_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ ist $\mathbb{C}$-linear, d.h. $A_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$, und $A_{\mathbb{C}}|_V = A$.

b) Sind $n := \dim V$ und $A \in \operatorname{End}(V)$ sowie $(a_{kl})_{k,l \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix von A bzgl. einer geordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, so ist $(a_{kl})_{k,l \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ auch die Matrix von $A_{\mathbb{C}}$ bzgl. der geordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $V_{\mathbb{C}}$.
Insbesondere stimmt daher das charakteristische Polynom von A mit dem charakteristischen Polynom von $A_{\mathbb{C}}$ überein, und folglich haben A und $A_{\mathbb{C}}$ dieselben (komplexen) Eigenwerte.

(iii) Wir definieren für $u = v + \mathrm{i}\, w \in V_{\mathbb{C}}$

$$\boxed{\overline{u} := v - \mathrm{i}\, w,}$$

also ist $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, $u \mapsto \overline{u}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

a) Für alle $u \in V_{\mathbb{C}}$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$(u = \overline{u} \iff u \in V), \quad \overline{\overline{u}} = u, \quad \overline{\lambda\, u} = \overline{\lambda}\, \overline{u}.$$

b) Sei $A \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt für alle $u \in V_{\mathbb{C}}$: $A_{\mathbb{C}}(\overline{u}) = \overline{A_{\mathbb{C}}(u)}$.
Mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, d.h. von $A_{\mathbb{C}}$, und es gilt

$$\mathrm{Eig}(A_{\mathbb{C}}, \overline{\lambda}) = \overline{\mathrm{Eig}(A_{\mathbb{C}}, \lambda)} := \{\overline{u} \,|\, u \in \mathrm{Eig}(A_{\mathbb{C}}, \lambda)\}.$$

c) Eine Abbildung $z\colon \mathbb{R} \to V_{\mathbb{C}}$ ist genau dann Lösung von

$$z'(x) = A_{\mathbb{C}}\, z(x),$$

wenn $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z\colon \mathbb{R} \to V$ Lösungen von

$$y'(x) = A\, y(x)$$

sind.

Beweis als Übung. □

Satz 6.11 besitzt das folgende komplexe Analogon.

Satz 6.13.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $\widetilde{V}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\widetilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})$ diagonalisierbar.*
Beh.: *Ist $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von $\widetilde{V}$ mit*

$$\widetilde{A}\, u_j = \lambda_j\, u_j \text{ mit } \lambda_j \in \mathbb{C} \text{ für } j \in \{1, \ldots, n\},$$

so werden durch

$$z_j(x) := \mathrm{e}^{\lambda_j\, x}\, u_j$$

n $\mathbb{C}$-linear unabhängige Lösungen $z_1, \ldots, z_n\colon \mathbb{R} \to \widetilde{V}$ von

$$\boxed{z'(x) = \widetilde{A}\, z(x)} \tag{156}$$

definiert, und $\{z_1, \mathrm{i}\, z_1, \ldots, z_n, \mathrm{i}\, z_n\}$ bildet ein Fundamentalsytem von Lösungen $\mathbb{R} \to \widetilde{V}$ von (156), wobei $\widetilde{V}$ bei letzterem als $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefaßt sei.

Beweis. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$z_j{}'(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j\, x}\, \lambda_j\, u_j = \mathrm{e}^{\lambda_j\, x}\, \widetilde{A}\, u_j = \widetilde{A}\, (\mathrm{e}^{\lambda_j\, x}\, u_j) = \widetilde{A}\, z_j(x).$$

$\{z_1(0), \ldots, z_n(0)\}$ ist Basis des n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\widetilde{V}$, also ist offenbar $\{z_1(0), \mathrm{i}\, z_1(0), \ldots, z_n(0), \mathrm{i}\, z_n(0)\}$ Basis des $2n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\widetilde{V}$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Hauptsatz 6.14.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$ derart, daß $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ diagonalisierbar ist.*

Beh.:

(i) Es existiert eine Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ *des* $\mathbb{C}$*-Vektorraumes* $V_{\mathbb{C}}$ *bestehend aus Eigenvektoren von* $A_{\mathbb{C}}$*, d.h.*

$$A_{\mathbb{C}}\, u_j = \lambda_j\, u_j \text{ mit } \lambda_j \in \mathbb{C} \text{ für } j \in \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_l}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_{l+m}}_{\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}, \overline{\lambda_{l+1}}, \dots, \overline{\lambda_{l+m}}),\\ (u_1, \dots, u_n) &= (\underbrace{u_1, \dots, u_l}_{\in V}, u_{l+1}, \dots, u_{l+m}, \overline{u_{l+1}}, \dots, \overline{u_{l+m}}).\end{aligned}$$

(ii) Für jede Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ *von* $V_{\mathbb{C}}$ *wie in (i) gilt, falls* $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\,\beta_j$ *und* $u_j = v_j + \mathrm{i}\, w_j$ *mit* $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$*,* $v_j, w_j \in V$ *für* $j \in \{1, \dots, n\}$*:*

Durch

$$\begin{aligned}\forall_{j\in\{1,\dots,l\}}\, y_j(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_j x}\, u_j\\ \forall_{j\in\{l+1,\dots,m\}}\, y_j(x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_j x}\, u_j) = \mathrm{e}^{\alpha_j x}\,(\cos(\beta_j x)\, v_j - \sin(\beta_j x)\, w_j)\\ \forall_{j\in\{l+m+1,\dots,n\}}\, y_j(x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_j x}\, u_j) = \mathrm{e}^{\alpha_j x}\,(\sin(\beta_j x)\, v_j + \cos(\beta_j x)\, w_j)\end{aligned}$$

wird ein Fundamentalsystem $\{y_1, \dots, y_n\}$ *von Lösungen* $\mathbb{R} \to V$ *von*

$$\boxed{y'(x) = A\, y(x)} \tag{157}$$

definiert.

Beweis. (i) ist klar, und (ii) folgt daraus, daß $z_j(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x}\, u_j$ nach 6.13 Lösungen von (156) sind, 6.12 (iii) c) und der Tatsache, daß $\{y_1(0), \dots, y_n(0)\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$ und somit auch eine $\mathbb{R}$-Basis von V bilden. □

I.a. läßt sich ein Endomorphismus $\widetilde{A}$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum nicht diagonalisiern, sondern nur auf Jordansche Normalform bringen. Wie man auch in diesem Fall ein Fundamentalsystem von Lösungen von

$$z'(x) = \widetilde{A}\, z(x)$$

finden kann, soll im folgenden beschrieben werden.

6.15 (Lineare homogene Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $\widetilde{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\widetilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})$. Nach Linearer Algebra existiert eine geordnete Basis $(u_1, \dots, u_n)$ des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\widetilde{V}$ derart, daß die Matrix $B = (b_{pq})_{p,q\in\{1,\dots,n\}} \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ von $\widetilde{A}$ bzgl. $(u_1, \dots, u_n)$ die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & J_{k-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_k \end{pmatrix}$$

hat, wobei für $j \in \{1,\dots,k\}$ der Jordan-Block $J_j \in \mathrm{M}(r_j \times r_j, \mathbb{C})$ eine Matrix der Form

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ist. Es gilt also $n = \sum_{j=1}^{k} r_j$ und $P_{\widetilde{A}}(X) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - X)^{r_j}$.

Ist $z\colon \mathbb{R} \to \widetilde{V}$ eine differenzierbare Abbildung, so existieren offenbar eindeutig bestimmte differenzierbare Funktionen $z_1, \dots, z_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$z(x) = \sum_{p=1}^{n} z_p(x)\, u_p,$$

und z ist Lösung von

$$\boxed{z'(x) = \widetilde{A}\, z(x)} \tag{158}$$

genau dann, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}. \tag{159}$$

[Denn (158) besagt

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} z_p'(x)\, u_p &= z'(x) = \widetilde{A}\, z(x) = \widetilde{A}\Big(\sum_{q=1}^{n} z_q(x)\, u_q\Big) \\ &= \sum_{q=1}^{n} z_q(x)\, \widetilde{A}(u_q) = \sum_{q=1}^{n} z_q(x) \sum_{p=1}^{n} b_{pq}\, u_p \\ &= \sum_{p=1}^{n} \Big(\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\, z_q(x)\Big)\, u_p, \end{aligned}$$

also $z_p'(x) = \sum_{q=1}^{n} b_{pq}\, z_q(x)$ für $p \in \{1,\dots,n\}$.]

(159) ist äquivalent dazu, daß mit $s_j := r_1 + \ldots + r_{j-1}$ ($:= 0$, falls $j = 1$) für alle $j \in \{1,\dots,k\}$ gilt

$$\begin{pmatrix} z_{s_j+1}'(x) \\ \vdots \\ z_{s_j+r_j}'(x) \end{pmatrix} = J_j \begin{pmatrix} z_{s_j+1}(x) \\ \vdots \\ z_{s_j+r_j}(x) \end{pmatrix}. \tag{160}$$

Jede Lösung von (160) ist offenbar $\mathbb{C}$-Linearkombination der folgenden r_j $\mathbb{C}$-linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_j x} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x\, e^{\lambda_j x} \\ e^{\lambda_j x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} (x^{r_j-1}/(r_j-1)!)\, e^{\lambda_j x} \\ (x^{r_j-2}/(r_j-2)!)\, e^{\lambda_j x} \\ (x^{r_j-3}/(r_j-3)!)\, e^{\lambda_j x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}.$$

Daher ist jede Lösung $z\colon \mathbb{R} \to \widetilde{V}$ von (158) offenbar $\mathbb{C}$-Linearkombination der folgenden n Lösungen $\mathbb{R} \to \widetilde{V}$

$$\begin{gathered}
e^{\lambda_1 x}\, u_1,\ e^{\lambda_1 x}\,(x\,u_1 + u_2),\ \ldots,\ e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^{r_1-1}}{(r_1-1)!}\,u_1 + \ldots + x\,u_{r_1-1} + u_{r_1}\right),\\
e^{\lambda_2 x}\, u_{r_1+1},\ e^{\lambda_2 x}\,(x\,u_{r_1+1} + u_{r_1+2}),\ \ldots,\ e^{\lambda_2 x}\left(\frac{x^{r_2-1}}{(r_2-1)!}\,u_{r_1+1} + \ldots + u_{r_1+r_2}\right),\\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
e^{\lambda_k x}\, u_{r_1+\ldots+r_{k-1}+1},\ \ldots,\ e^{\lambda_k x}\left(\frac{x^{r_k-1}}{(r_k-1)!}\,u_{r_1+\ldots+r_{k-1}+1} + \ldots + \underbrace{u_{r_1+\ldots+r_k}}_{=n}\right),
\end{gathered} \tag{161}$$

die an der Stelle $x = 0$ der Reihe nach die Werte $u_1, \ldots, u_n$ annehmen.

Ist speziell $\widetilde{V} = V_{\mathbb{C}}$, wobei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, und $\widetilde{A} = A_{\mathbb{C}}$, wobei $A \in \operatorname{End}(V)$, so ist jede Lösung von

$$\boxed{y'(x) = A\,y(x)}$$

$\mathbb{R}$-Linearkombination der Real- und Imaginärteile der in (161) angegebenen Lösungen $\mathbb{R} \to V_{\mathbb{C}}$ von (158).

6.16 (Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Eine *lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung* ist per definitionem eine Differentialgleichung der Form

$$\boxed{u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x)\,u(x) = b(x),} \tag{162}$$

wobei $a_1, \ldots, a_{n-1}, b\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem nicht-entarteten Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Die Differentialgleichung (162) heißt im Falle $b = 0$ *homogen* und andernfalls *inhomogen*.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(Lu)(x) := u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x)\,u(x).$$

(i) Nach 3.19 (i) gilt:

Ist $u\colon I \to \mathbb{R}$ Lösung von (162), so ist

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto (u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x))$$

Lösung des folgenden Systems erster Ordnung

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= y_2(x)\\
y_2'(x) &= y_3(x)\\
&\vdots\\
y_{n-1}'(x) &= y_n(x)\\
y_n'(x) &= -a_0(x)\,y_1(x) - \ldots - a_{n-1}(x)\,y_n(x) + b(x),
\end{aligned} \tag{163}$$

und ist umgekehrt $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (163), so ist $u := y_1\colon I \to \mathbb{R}$ Lösung von (162).

(162) lautet in Matrizenschreibweise

$$y'(x) = A(x)\,y(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

mit

$$A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

(ii) Sind $x_0 \in J$ und $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, so entspricht einer Lösung u der Anfangswertaufgabe

$$(162), \quad u(x_0) = u_{0n},\ u'(x_0) = u_{02},\ \dots,\ u^{(n-1)}(x_0) = u_{0n}$$

eine Lösung $y = (y_1, \dots y_n)$ der Anfangswertaufgabe

$$(163),\ y(x_0) = u_0.$$

Daher folgt aus 6.2 (dort $V = \mathbb{R}^n$):

> Für jedes $x_0 \in J$ und $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Anfangswertaufgabe
>
> $$(Lu)(x) = b(x), \quad u(x_0) = u_{0n},\ u'(x_0) = u_{02},\ \dots,\ u^{(n-1)}(x_0) = u_{0n}$$
>
> genau eine auf ganz J definierte Lösung $u\colon J \to \mathbb{R}$, und alle Lösungen sind Beschränkungen dieser maximalen Lösung.

(iii) Aus (ii) folgt analog zu 6.3 (ii), (iii):

Die Menge $\mathcal{M}$ aller auf ganz J definierten Lösungen $u\colon J \to \mathbb{R}$ der linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(Lu)(x) = 0$$

ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und für jedes $x_0 \in J$ ist

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \longmapsto (u(x_0), u'(x_0), \dots, u^{(n-1)}(x_0))$$

ein $\mathbb{R}$- Vektorraum-Isomorphismus.

Definiton. Eine Basis von $\mathcal{M}$ heißt ein *Fundamentalsystem von Lösungen von* $(Lu)(x) = 0$.

(iv) **Definition.** Für n globale Lösungen $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{M}$ von $(Lu)(x) = 0$ heißt

$$\boxed{W := W_{u_1,\dots,u_n} := \det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} : J \longrightarrow \mathbb{R}}$$

(d.i. die Wronski-Determinante der gemäß (i) zu $u_1, \dots, u_n$ korrespondierenden n Lösungen von (163) mit $b = 0$ gemäß der Bemerkung in 6.4) auch die *Wronski-Determinante von* $u_1, \dots, u_n$.

Aus (iii) folgt:

$\{u_1, \dots, u_n\}$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn für ein (oder äquivalent für alle) $x_0 \in J$ gilt: $W(x_0) \neq 0$.

Nach 6.5 gilt

$$\forall_{x \in J}\, W'(x) = \underbrace{\operatorname{Spur} A(x)}_{= -a_{n-1}(x)}\, W(x),$$

also für beliebiges $x_0 \in J$

$$\forall_{x \in J}\, W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t \right).$$

6.17 (D'Alembertsches Reduktionsverfahren für lineare homogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$, $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $a_0, \dots, a_{n-1} \colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sowie $a_n := 1$. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\boxed{u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x) = 0} \qquad (164)$$

und setzen wieder

$$(Lu)(x) := u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, u'(x) + a_0(x)\, u(x).$$

Wir werden zeigen, daß sich das Lösen aller Lösungen von (6.17) mittels des *Reduktionsverfahrens von d'Alembert* aus der Kenntnis einer von Null verschiedener Lösung von (164) auf das Lösen einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung zurückführen läßt.

Das in 6.6 angegebene d'Alembertsche Reduktionsverfahren für lineare homogene Systeme erster Ordnung leistet nicht dasselbe: Denn bei Anwendung des Verfahrens 6.6 auf das lineare homogene System erster Ordnung, das (164) entspricht, erhält man ein lineares System erster Ordnung mit einer Gleichung weniger, das i.a. nicht von der speziellen Gestalt (163) ist, also i.a. nicht einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung entspricht.

Sei

$$v \colon J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ eine von Null verschiedene Lösung von (164).} \qquad (165)$$

Wir wählen ein Teilintervall $I \subset J$ mit

$$\forall_{x \in I}\, v(x) \neq 0. \tag{166}$$

Die Idee von d'Alembert war es, weitere Lösungen $u\colon I \to \mathbb{R}$ von (164) von der Gestalt

$$u(x) = v(x)\, w(x), \tag{167}$$

wobei $w\colon I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion (und damit auch eine $\mathcal{C}^n$-Funktion) ist, zu suchen.

$u\colon I \to \mathbb{R}$ wie in (167) ist genau dann Lösung von (164), wenn stets gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (Lu)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, u^{(j)}(x) \overset{(167)}{=} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a_j(x)\, v^{(j-k)}(x)\, w^{(k)}(x) \\ &= \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \leq j}}^{n} \binom{j}{k} a_j(x)\, v^{(j-k)}(x)\, w^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j(x)\, v^{(j-k)}(x)}_{=:\, b_k(x)} \Bigg) w^{(k)}(x), \end{aligned}$$

d.h. wegen $b_0(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, v^{(j)}(x) \overset{(165)}{=} 0$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} b_k(x) (w')^{(k-1)},$$

also

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k(x) (w')^{(k)} = 0. \tag{168}$$

(168) ist eine lineare homogene Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung für $w'\colon I \to \mathbb{R}$.

Wir zeigen abschließend, daß man aus der Kenntnis aller Lösungen von (168) alle weiteren Lösungen von (164) gewinnen kann:

Satz. *Seien $\{{w_1}', \ldots {w_{n-1}}'\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (168) und $w_j\colon I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von ${w_j}'$ für $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Dann ist $\{v|_I, v\, w_1, \ldots, v\, w_{n-1}\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen $I \to \mathbb{R}$ von (164).

Beweis. Zu zeigen bleibt nur die lineare Unabhängigkeit. Zum Nachweis hiervon seien $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{x \in I}\, \lambda\, v(x) + \lambda_1\, v(x)\, w_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1}\, v(x)\, w_{n-1}(x) = 0,$$

d.h. nach (166)

$$\forall_{x \in I}\, \lambda + \lambda_1\, w_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1}\, w_{n-1}(x) = 0. \tag{169}$$

Aus (169) folgt durch Differntiation $\lambda_1\, {w_1}' + \ldots + \lambda_{n-1}\, {w_{n-1}}' = 0$, also wegen der linearen Unabhängigkeit der ${w_j}'$: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Aus (169) folgt dann auch $\lambda = 0$. □

6.18 (Das Lösen linearer inhomogener Differentialgleichungen n-ter Ordnung)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$ und $a_0, \ldots, a_{n-1}, b\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem nicht-entarteten Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die lineare inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\boxed{u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x)\,u(x) = b(x)} \tag{170}$$

und setzen wieder

$$(Lu)(x) := u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x)\,u(x).$$

Die zu (170) gehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$(Lu)(x) = 0. \tag{171}$$

Es gilt offenbar erneut:

Man erhält alle globalen Lösungen $J \to \mathbb{R}$ von (170), indem man zu einer beliebigen speziellen derartigen Lösung $J \to \mathbb{R}$ alle Lösungen $J \to \mathbb{R}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (171) hinzuaddiert. (172)

Um eine spezielle Lösung von (170) zu finden, verwenden wir wieder die Methode der *Variation der Konstanten*.

Sei die stetige Abbildung $A\colon J \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ wie in 6.16 (i) definiert. Ferner sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen $J \to \mathbb{R}$ von (171). Dann ist nach 6.16 (iv) $Y\colon J \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, definiert durch

$$\forall_{x \in J}\, Y(x) := \begin{pmatrix} u_1(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \ldots & u_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \tag{173}$$

Lösung der $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$-wertigen Differentialgleichung $Y'(x) = A(x)\,Y(x)$, und zwar mit $\forall_{x \in J} \det Y(x) \neq 0$.

Für $x_0 \in J$ ist nach 6.7 $y\colon J \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\forall_{x \in J}\, y(x) := Y(x) \int_{x_0}^{x} \underbrace{Y(t)^{-1}\,\tilde{b}(t)}_{=:\,c(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \text{wobei } \tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \tag{174}$$

eine Lösung von $y'(x) = A(x)\,y(x) + \tilde{b}(x)$, also ist $y_1\colon J \to \mathbb{R}$ wiederum nach 6.16 (i) eine Lösung von (170). Für $c(t)$ wie in (174) gilt $Y(t)\,c(t) = \tilde{b}(t)$, also nach (173) und der Cramerschen Regel (beachte, daß die Determinante der Matrix in (173) nicht verschwindet) für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$c_j(t) = \frac{\Delta_j(t)}{\det Y(t)}$$

mit

$$\Delta_j := \det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{j-1} & 0 & u_{j+1} & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_{j-1}' & 0 & u_{j+1}' & \dots & u_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)} & \dots & u_{j-1}^{(n-2)} & 0 & u_{j+1}^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_{j-1}^{(n-1)} & b & u_{j+1}^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

d.h.

$$c_j(t) = \frac{(-1)^{n+j}}{W_{u_1,\dots,u_n}(t)}\, b(t)\, W_{u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n}(t), \tag{175}$$

wobei

$$W_{u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n} := \det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{j-1} & u_{j+1} & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_{j-1}' & u_{j+1}' & \dots & u_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)} & \dots & u_{j-1}^{(n-2)} & u_{j+1}^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

gilt.

Aus (174), (173), (175) folgt schließlich:

$v\colon J \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x)\,(-1)^{n+j} \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)\, W_{u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_n}(t)}{W_{u_1,\dots,u_n}(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{176}$$

ist die allgemeine Lösung von (170).

Bemerkung. Im Spezialfall $n = 2$ gilt $W_{u_1} = u_1$ und W_{u_2}, also besagt (176) dann, daß gilt

$$v(x) = -u_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)\, u_2(t)}{W_{u_1,u_2}(t)}\,\mathrm{d}t + u_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)\, u_1(t)}{W_{u_1,u_2}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lassen sich auf lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Die direkte Lösung ist jedoch einfacher.

Hauptsatz 6.19 (Lineare homogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)**.**
Vor.: *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}\, u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\, u'(x) + a_0\, u(x) = 0, \tag{177}$$

wobei $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von

$$P(z) := z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \dots + a_1\, z + a_0,$$

und bezeichne $r_j \in \mathbb{N}_+$ die Ordnung der Nullstelle λ_j.

Beh.:

(i) Die Funktionen

$$e^{\lambda_j x}, x\,e^{\lambda_j x}, \dots, x^{r_j-1}\,e^{\lambda_j x}, \quad j \in \{1,\dots,m\} \tag{178}$$

sind n $\mathbb{C}$-linear unabhängige Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von (177).

(ii) Im Falle $a_0,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ist mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von $P(z)$, und zwar von derselben Ordnung wie λ, und wir können $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ so umnumerieren, daß gilt

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_m) = (\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_p}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_{p+1},\dots,\lambda_{p+q}}_{\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}, \overline{\lambda_{p+1}},\dots,\overline{\lambda_{l+q}}).$$

Sei $\lambda_s = \alpha_s + \mathrm{i}\,\beta_s$ mit $\alpha_s, \beta_s \in \mathbb{R}$ für $s \in \{p+1,\dots,p+q\}$.

Dann bildet die Menge, die genau

$$\begin{aligned} &x^k\,e^{\lambda_j x},\ j \in \{1,\dots,p\},\ k \in \{0,\dots,r_j-1\},\\ &\operatorname{Re}\left(x^k\,e^{\lambda_j x}\right) = x^k\,e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ j \in \{p+1,\dots,p+q\},\ k \in \{0,\dots,r_j-1\},\\ &\operatorname{Im}\left(x^k\,e^{\lambda_j x}\right) = x^k\,e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x),\ j \in \{p+1,\dots,p+q\},\ k \in \{0,\dots,r_j-1\} \end{aligned} \tag{179}$$

als Elemente enthält, ein Fundamentalsystem von Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (177).

Wir bereiten den Beweis von 6.19 durch zwei Lemmata vor.

Lemma 1. *Seien $k,n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$, $P(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \in \mathbb{C}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $P(z)$ von einer Ordnung $\geq k+1$.*

Dann ist $x^k\,e^{\lambda x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\,u^{(j)}(x) = 0. \tag{180}$$

Beweis. Für $k = 0$ ist die Behauptung wegen

$$\sum_{j=0} a_j\,u^{(j)}(x) = \sum_{j=0} a_j\,\lambda^j\,e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\,P(\lambda) = 0$$

klar.

Wir nehmen daher induktiv an, daß die Behauptung für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Sei dann λ eine Nullstelle einer Ordnung $\geq k+2$ von $P(z)$. Zu zeigen ist, daß $u(x) := x^{k+1}\,e^{\lambda x}$ die Differentialgleichung (180) löst. Wir setzen $v(x) := x^k\,e^{\lambda x}$, also gilt $u(x) = x\,v(x)$. Hieraus folgt für $j \in \{1,\dots,n\}$

$$u^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \mathrm{id}^{(l)}(x)\,v^{(j-l)}(x) = x\,v^{(j)}(x) + j\,v^{(j-l)}(x),$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_j\,u^{(j)}(x) &= x\sum_{j=0}^{n} a_j\,v^{(j)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\,a_{j+1}\,v^{(j)}(x)\\ &= x\,P(v^{(j)}(x)) + P'(v^{(j)}(x)). \end{aligned}$$

Nun ist λ eine Nullstelle der Ordnung $\geq k+2$ von $P(x)$ und somit eine Nullstelle der Ordnung $\geq k+1$ von $P'(x)$. Hieraus und aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet. □

Lemma 2. *Seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen sowie $P_1(z), \ldots, P_k(z) \in \mathbb{C}[z]$ derart, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sum_{j=1}^{k} P_j(x)\, \mathrm{e}^{\lambda_j x} = 0.$$

Dann folgt $P_j = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Beweis. Der Fall $k = 1$ ist trivial.

Gelte daher induktiv stets $\sum_{j=1}^{k+1} P_j(x)\, \mathrm{e}^{\lambda_j x} = 0$. Wegen $\mathrm{e}^{\lambda_{k+1} x} \neq 0$ folgt $\sum_{j=1}^{k} P_j(x)\, \mathrm{e}^{(\lambda_j - \lambda_{k+1}) x} + P_{k+1}(x) = 0$. $(\operatorname{Grad} P_{k+1} + 1)$-malige Differentiation der letzten Gleichung ergibt dann offenbar eine Gleichung der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(x)\, \mathrm{e}^{(\lambda_j - \lambda_{k+1}) x} = 0,$$

wobei $Q_j(z) \in \mathbb{C}[z]$ mit $\operatorname{Grad} Q_j = \operatorname{Grad} P_j$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun $Q_j = 0$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$, d.h. $\operatorname{Grad} Q_j = -\infty$. Wegen der Gleichheit der Grade muß dann auch P_j das Nullpolynom sein. □

Beweis des Hauptsatzes. Zu (i): Daß die n Funktionen aus (178) Lösungen von (177) sind, folgt aus Lemma 1.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $b_{jk} \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=0}^{r_j - 1} b_{jk}\, x^k}_{=: P_j(x)}\, \mathrm{e}^{\lambda_j x} = 0.$$

Lemma 2 ergibt, daß für jedes j gilt $P_j = 0$, also müssen auch $b_{jk} = 0$ für alle j, k gelten.

Zu (ii): Nach (i) ist klar, daß die n Funktionen in (179) Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (177) sind.

Wegen $\mathrm{e}^{\overline{(\alpha_j + \mathrm{i}\beta_j)} x} = \mathrm{e}^{\alpha_j x} (\cos(\beta_j x) - \mathrm{i} \sin(\beta_j x))$ sind alle n Funktionen in (178) $\mathbb{C}$-Linearkombinationen der n Funktionen in (179), also müssen auch letztere $\mathbb{C}$-linear unabhängig und insbesondere $\mathbb{R}$-linear unabhängig sein. □

6.20. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Wir betrachten Spezialfälle der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}\, u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\, u'(x) + a_0\, u(x) = b(x), \tag{181}$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, und setzen

$$P(x) := x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0.$$

Wegen (172) und 6.19 (ii) ist (181) gelöst, wenn wir eine spezielle Lösung von (181) finden. Hierbei ist es, abhängig von der Gestalt der Funktion b, gelegentlich hilfreich, eine Lösung derselben Gestalt zu suchen.

(i) $b(x) = A\,\mathrm{e}^{C\,x}$ mit $A, C \in \mathbb{R}^*$.

In diesem Fall gilt

$$b^{(n)}(x) + a_{n-1}\,b^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\,b'(x) + a_0\,b(x) = A\,P(C)\,e^{C\,x},$$

also ist im Falle $P(C) \neq 0$ die Funktion $\frac{1}{A\,P(C)}\,e^{C\,x}$ eine spezielle Lösung von (181).

Ist $P(C) = 0$, so setze man $x\,\mathrm{e}^{C\,x}$ in die linke Seite von (181) ein. Man erhält einen Ausdruck der Form

$$P_1(C)\,\mathrm{e}^{C\,x} \text{ mit } P_1(x) \in \mathbb{R}[x],$$

also ist im Falle $P_1(C) \neq 0$ die Funktion $\frac{1}{P_1(C)}\,e^{C\,x}$ eine spezielle Lösung von (181).

Ist $P_1(C) = 0$, so setze man $x^2\,\mathrm{e}^{C\,x}$ in die linke Seite von (181) ein. Erhält man nun in analoger Verfahrensweise keine Lösung, so setze man $x^3\,\mathrm{e}^{C\,x}$ in die linke Seite von (181) ein usw.

(ii) $b(x) = A\,\cos(C\,x) + B\,\sin(C\,x)$ mit $A, B, C \in \mathbb{R}$.

In diesem Fall setze man $\widetilde{A}\,\cos(C\,x) + \widetilde{B}\,\sin(C\,x)$ mit $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathbb{R}$ in die linke Seite von (181) ein. Gleichsetzen mit $b(x)$ führt zu einem Gleichungssystem, das man ggf. lösen kann.

Beispiel. $\boxed{u''(x) + 2\,u'(x) + u(x) = \sin(2\,x).}$
Einsetzen von $\widetilde{A}\,\cos(2\,x) + \widetilde{B}\,\sin(2\,x)$ mit $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathbb{R}$ in die linke Seite der Differentialgleichung liefert

$$(-3\,\widetilde{A} + 4\,\widetilde{B})\,\cos(2\,x) + (-4\,\widetilde{A} - 3\widetilde{B})\,\sin(2\,x),$$

also soll gelten $-3\,\widetilde{A} + 4\,\widetilde{B} = 0$ und $-4\,\widetilde{A} - 3\widetilde{B} = 1$. Das Lösen dieses Gleichungssystemes führt zur speziellen Lösung $-\frac{4}{25}\,\cos(2\,x) - \frac{3}{25}\,\sin(2\,x)$ von $u''(x) + 2\,u'(x) + u(x) = \sin(2\,x)$.

(iii) $b(x)$ ist ein Polynom vom Grade $m \in \mathbb{N}_+$.

In diesem Fall setze man $A_m\,x^m + \ldots A_1\,x + A_0$ mit $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ in die linke Seite von (181) ein. Gleichsetzen mit $b(x)$ und Koeffizientenvergleich führt zu einem Gleichungssystem, das man ggf. lösen kann.

Beispiel. $\boxed{u''(x) + 2\,u'(x) + u(x) = x^2.}$
Einsetzen von $A_2\,x^2 + A_1\,x + A_0$ mit $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ in die linke Seite der Differentialgleichung liefert

$$A_2\,x^2 + (4\,A_2 + A_1)\,x + (2\,A_2 + 2\,A_1 + A_0),$$

d.h. es soll gelten $A_2 = 1$, $4\,A_2 + A_1 = 0$ und $2\,A_2 + 2\,A_1 + A_0 = 0$. Das Lösen dieses Gleichungssystemes führt zur speziellen Lösung $x^2 - 4\,x + 6$ von $u''(x) + 2\,u'(x) + u(x) = x^2$.

6.21 (Eulersche Differentialgleichung)**.** Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Wir suchen alle Lösungen $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ der *Eulerschen Differentialgleichung*, d.i. die folgende lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\boxed{x^n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\, x\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0,} \tag{182}$$

wobei $1 =: a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{K}$, d.h. von

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}}{x}\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\, y'(x) + \frac{a_0}{x^n}\, y(x) = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(Ly)(x) := x^n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\, x\, y'(x) + a_0\, y(x).$$

Bemerkung. Mit allen Lösungen $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ von (182) hat man auch alle Lösungen $\mathbb{R}_- \to \mathbb{K}$ gefunden. Denn sind $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ und $z\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}$ zwei beliebige n-mal differenzierbare Funktionen mit $z(x) = y(-x)$, so gilt

$$\forall_{x \in \mathbb{R}_-}\ (Lz)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j\, z^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, (-x)^j\, y^{(j)}(-x) = (Ly)(-x),$$

also ist $Lz = 0$ äquivalent zu $Ly = 0$.

Satz. *Es existiert eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $1 =: b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0 \in \mathbb{K}$*

$$u^{(n)}(t) + b_{n-1}\, u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_1\, u'(t) + b_0\, u(t) = 0 \tag{183}$$

derart, daß gilt:

Sind $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ und $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ beliebige n-mal differenzierbare Funktionen mit $y = u \circ \ln$, d.h. $u = y \circ \exp$, so gilt

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\ (Mu)(t) = (Ly)\left(\mathrm{e}^t\right), \tag{184}$$

wobei wir

$$(Mu)(t) := u^{(n)}(t) + b_{n-1}\, u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_1\, u'(t) + b_0\, u(t)$$

setzen.

Folglich ist y genau dann Lösung von (182), wenn u Lösung von (183) ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst durch endliche Induktion:

Sind $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$, $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit $y = u \circ \ln$ wie im Satz, so existieren $1 =: c_{j,j}, c_{j,j-1}, \ldots, c_{j,1} \in \mathbb{K}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt $x^j\, y^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{j} c_{j,k}\, u^{(k)} \circ \ln(x)$. (185)

[Zu (185): Die Behauptung gilt im Falle $j = 1$ wegen $y'(x) = u'(\ln(x))\, \frac{1}{x}$.
Sei nun $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, und gelte (185) für j. Dann folgt

$$y^{(j+1)}(x) \overset{(185)}{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{j} c_{j,k}\, u^{(k+1)} \circ \ln(x)}_{= \sum_{k=2}^{j+1} c_{j,k-1}\, u^{(k)} \circ \ln(x)}\ \frac{1}{x^{j+1}} + \sum_{k=1}^{j} c_{j,k}\, u^{(k)} \circ \ln(x)\, \frac{-j}{x^{j+1}},$$

d.h.

$$x^{j+1}\,y^{(j+1)}(x) \;=\; \overbrace{-j\,c_{j,1}}^{=:\,c_{j+1,1}\,\in\,\mathbb{K}}\; u'\circ\ln(x) + \sum_{k=2}^{j}\Big(\overbrace{c_{j,k-1} - j\,c_{j,k}}^{=:\,c_{j+1,k}\,\in\,\mathbb{K}}\Big)\,u^{(k)}\circ\ln(x)$$
$$+ \quad \underbrace{c_{j,j}}_{=\,1\,=\,c_{j+1,j+1}}\quad u^{(j+1)}\circ\ln(x),$$

also gilt (185) für $j+1$.]

Aus (185) für $j \in \{1,\dots,n\}$ folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(Ly)\left(\mathrm{e}^t\right) &\overset{(182)}{=} a_0\,\underbrace{y\left(\mathrm{e}^t\right)}_{=\,u(t)} + \sum_{j=1}^{n} c_{j,k}\,u^{(k)}(t)\\ &= \underbrace{a_0}_{=:\,b_0\,\in\,\mathbb{K}}\,u(t) + \sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{j=k}^{n} a_j\,c_{j,k}}_{=:\,b_k\,\in\,\mathbb{K}}\Big)\,u^{(k)}(t) \qquad (186)\\ &\overset{(183)}{=} (Mu)(t).\end{aligned}$$

(Beachte, daß dann $b_n = a_n\,c_{n,n} = 1$ gilt.) Damit ist (184) gezeigt, und der Satz ist bewiesen. □

Damit haben wir die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (182) auf die Lösung der Differentialgleichung (183) zurückgeführt. (183) läßt sich mittels 6.19 lösen. Dazu muß man das Polynom

$$P(z) := \sum_{j=0}^{n} b_j\,z^j$$

kennen und dessen Nullstellen bestimmen. Die Koeffizienten von $P(z)$ kann man wie im Beweis von (185) und in (186) berechnen.

In konkreten Fällen kann man das Polynom $P(z)$ oft mit weniger Rechenaufwand aus der folgenden Formel (187) erhalten. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $x^\lambda = \exp(\lambda\,\ln(x))\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ bekanntlich unendlich oft differenzierbar mit $\left(x^\lambda\right)' = \lambda\,x^{\lambda-1}$, und es gilt

$$\frac{L\,x^\lambda}{x^\lambda} \text{ ist konstant vom Wert } P(\lambda). \qquad (187)$$

[Zu (187): Setze $y(x) := x^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda\,\ln(x)}$, $u(t) := y\left(\mathrm{e}^t\right) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left(L\,x^\lambda\right)\left(\mathrm{e}^t\right) &= (Ly)\left(\mathrm{e}^t\right) \overset{(184)}{=} (Mu)(t) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{j=0}^{n} b_j\,u^{(j)}(t)\\ &= \sum_{j=0}^{n} b_j\,\lambda^j\,u(t) = \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\,\lambda^j\right) y\left(\mathrm{e}^t\right) = P(\lambda)\,x^\lambda\left(\mathrm{e}^t\right),\end{aligned}$$

also ist $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{L\,x^\lambda}{x^\lambda}\left(\mathrm{e}^t\right)$ konstant vom Wert $P(\lambda)$.]

Beispiel. Betrachte $\boxed{x^2 y''(x) + 3x y'(x) + 7y(x) = 0}$ für $x \in \mathbb{R}_+$, also

$$(Ly)(x) = x^2 y''(x) + 3x y'(x) + 7y(x).$$

Setze $y(x) := x^\lambda$. Dann folgt $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$, $y''(x) = (\lambda-1)\lambda x^{\lambda-2}$, also $(L x^\lambda)(x) = x^\lambda (\lambda^2 - 4\lambda + 7)$. Daher ergibt (187)

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 7,$$

und dieses Polynom hat die Nullstellen $2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Nach 6.19 (ii) ist daher

$$\left\{ \mathrm{e}^{2t} \cos\left(\sqrt{3}\, t\right),\ \mathrm{e}^{2t} \sin\left(\sqrt{3}\, t\right) \right\}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von (183). Das entsprechende Fundamentalsystem von Lösungen von (182) erhält man daher (durch „$t = \ln(x)$“ nach dem Satz) als

$$\left\{ x^2 \cos\left(\sqrt{3} \ln(x)\right),\ x^2 \sin\left(\sqrt{3} \ln(x)\right) \right\}.$$

7 Ober- und Unterfunktionen

Lemma 7.1.
Vor.: *Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jede differenzierbare Funktion $z\colon J \to \mathbb{R}$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall sei, die* $\mathrm{Graph}(z) \subset D$ *erfüllt, heißt die Funktion*

$$Pz\colon J \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$\forall_{x \in J}\,(Pz)(x) := z'(x) - f(x, z(x))$$

definiert ist, der Defekt von z bzgl. der Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Beh.: *Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und I_0 ein nicht-entartetes Intervall mit linkem (bzw. rechtem) offenen Ende bei x_0*[15] *und $z_1, z_2\colon I_0 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit*

$$Pz_1 < Pz_2 \ \ (bzw.\ Pz_1 > Pz_2) \ auf\ I_0 \tag{188}$$

und

$$\exists_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}\ z_1 < z_2 \ auf\ ]x_0, x_0 + \varepsilon[\subset I_0 \ \ (bzw.\ ]x_0 - \varepsilon, x_0[\subset I_0). \tag{189}$$

Dann folgt

$$z_1 < z_2 \ (auf\ ganz\ I_0) \tag{190}$$

Beweis. Angenommen (190) gilt nicht. Dann existiert aus Stetigkeitsgründen und wegen (189) genau ein $\xi \in I_0$ mit

$$\forall_{x \in]x_0, \xi[\ (\text{bzw. }]\xi, x_0[)}\ z_1(x) < z_2(x) \tag{191}$$

und

$$z_1(\xi) = z_2(\xi). \tag{192}$$

Dann folgt für $n \in \mathbb{N}_+$ hinreichend groß mittels (192), (191)

$$z_1'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{z_1(\xi) - z_1(\xi - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{z_2(\xi) - z_2(\xi - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = z_2(\xi)$$

(bzw.

$$z_1'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{z_1(\xi) - z_1(\xi + \frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{z_2(\xi) - z_2(\xi + \frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} = z_2(\xi)),$$

also auch nach (192)

$$(Pz_1)(\xi) = \underbrace{z_1(\xi)}_{\geq z_2'(\xi)} - f(\xi, z_1(\xi)) \geq z_2'(\xi) - f(\xi, z_2(\xi)) = (Pz_2)(\xi)$$

[15] Es gilt also $I_0 =]x_0, \dots[$ (bzw. $I_0 =]\dots, x_0[$)

(bzw.

$$(Pz_1)(\xi) = \underbrace{z_1(\xi)}_{\leq z_2'(\xi)} - f(\xi, z_1(\xi)) \leq z_2'(\xi) - f(\xi, z_2(\xi)) = (Pz_2)(\xi)),$$

im Widerspruch zu (188). □

Satz 7.2.
Vor.: *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(x_0, y_0) \in D$. Wir betrachten die Anfangswertaufgabe*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0. \tag{193}$$

Seien $I = [x_0, \ldots|$ (bzw. $|\ldots, x_0]$) ein nicht-entartetes Intervall mit linkem (bzw. rechtem) Eckpunkt x_0 und $I_0 := I \setminus \{x_0\}$. Eine differenzierbare Funktion $z\colon I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall sei, mit $\mathrm{Graph}(z) \subset D$ *heißt eine* $\left\{ \begin{array}{c} \text{Oberfunktion} \\ \text{Unterfunktion} \end{array} \right\}$ bzgl. der Anfangswertaufgabe (193), *wenn gilt:*

$$Pz \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \ (\textit{bzw. } Pz \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} 0) \ \textit{auf } I \textit{ und } z(x_0) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} y_0 \tag{194}$$

oder

$$Pz \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \ (\textit{bzw. } Pz \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} 0) \ \textit{auf } I_0 \textit{ und } z(x_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} y_0 \tag{195}$$

Beh.:

(i) Ist $z\colon I \to \mathbb{R}$ eine Unterfunktion bzgl. (193) und $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (193), so gilt $z < y$ auf I_0.

(ii) Ist $z\colon I \to \mathbb{R}$ eine Oberfunktion bzgl. (193) und $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (193), so gilt $z > y$ auf I_0.

Beweis. Wir wollen 7.1 anwenden auf

$$z_1 := z|_{I_0} \quad \text{und} \quad z_2 := y|_{I_0}.$$

Die Behauptung von (i) ist gerade die Aussage (190). Zu zeigen bleibt daher lediglich, daß (188) und (189) gelten.

Zu (188): Wegen (194) oder (195) gilt, da y Lösung von (193) ist

$$\forall_{x \in I_0} (Pz_1)(x) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} 0 = (Pz_2)(x).$$

Zu (189): Wegen (194) oder (195) gilt $z(x_0) \leq y_0 = y(x_0)$.

1. Fall: $z(x_0) < y_0 = y(x_0)$. Dann existiert aus Stetigkeitsgründen ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit

$$z < y \text{ auf } [x_0, x_0 + \varepsilon[\subset I \ (\text{bzw. }]x_0 - \varepsilon, x_0] \subset I),$$

also mit

$$z_1 < z_2 \text{ auf }]x_0, x_0 + \varepsilon[\subset I_0 \ (\text{bzw. }]x_0 - \varepsilon, x_0[\subset I_0).$$

2. Fall: $z(x_0) = y_0 = y(x_0)$. Dann folgt zunächst nach Definition der Unterfunktion, daß (194) gilt, also $(Pz)(x_0) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} 0$, d.h.

$$z'(x_0) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} f(x_0, z(x_0)) = f(x_0, y(x_0)) = y'(x_0).$$

Angenommen (189) ist falsch. Dann existiert andererseits offenbar eine Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, z_1(x_0 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n) = z(x_0 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n) \geq y(x_0 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n) = z_2(x_0 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n),$$

also folgt wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z(x_0 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n) - z(x_0)}{\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n} \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} \lim_{n\to\infty} \frac{y(x_0 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n) - y(x_0)}{\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} h_n}$$

$z'(x_0) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} y'(x_0)$, Widerspruch!

(ii) zeigt man analog zu (i). □

7.3. Angenommen wir suchen eine Lösung $y\colon [x_0, b[\to \mathbb{R}$ einer Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, für die sich keine explizite Formel angeben läßt. Dann können wir auf folgende Weise Informationen über den Werteverlauf von y erhalten:

Wir verkleinern die Funktion $f(x,y)$ zu einer stetigen Funktion $f_1(x,y)$ und eventuell den Anfangswert y_0 zu y_{01} und zwar so, daß wir für die neue Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = \underbrace{f_1(x, y(x))}_{<f(x,y(x))}, \quad y(x_0) = y_{01}$$

eine Lösung $v\colon [x_0, \tilde{b}[\to \mathbb{R}$ explizit angeben können.

Dann ist v – solange $\mathrm{Graph}(v)$ in D verläuft – eine Unterfunktion bzgl. (193), also folgt aus 7.2 (i): $v < y$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich.

Analog läßt sich auch eine explizit angebbare Funktion w mit $y < w$ finden.

Beispiel. Wir betrachten die Riccatische Differentialgleichung

$$\boxed{y'(x) = x^2 + y(x)^2, \quad y(0) = 1,} \tag{196}$$

also $f := x^2 + y^2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Wir wissen, daß genau eine maximale Lösung $y\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ von (196) existiert, wobei $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$ mit $a < 0 < b$. Wir wollen $y|_{[0,b[}$ approximieren und insbesondere Informationen über b erhalten.

1.) Sei $\varepsilon \in]0,1[$ beliebig vorgegeben. Für $x > 0$ gilt

$$f_1(x,y) := y^2 < x^2 + y^2 = f(x,y), \quad y_{01} := 1-\varepsilon < 1 = y_0.$$

Die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = y^2(x), \quad y(0) = 1-\varepsilon$$

hat die Lösung

$$z\colon [0, \frac{1}{1-\varepsilon}[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1-\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)\,x},$$

also folgt aus 7.2 (i) (mit Voraussetzung (195), unterer Fall)

$$\forall_{x\in]0,1[\cap]0,b[} \; \frac{1-\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)\,x} < y(x).$$

Dies ist für alle $\varepsilon \in]0,1[$ gezeigt, also gilt auch (für $\varepsilon \to 0+$)

$$\forall_{x\in]0,1[\cap]0,b[} \; \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\substack{x\to 1- \\ \longrightarrow +\infty}} \leq y(x).$$

Hieraus folgt offenbar

$$b \leq 1 \text{ und } \forall_{x\in[0,b[} \; \frac{1}{1-x} \leq y(x). \tag{197}$$

2.) Aus (197) folgt[16]

$$\lim_{x\to b-} y(x) = +\infty. \tag{199}$$

[16] Es gilt nämlich folgende

Übungsaufgabe. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y\colon [a,b[\to \mathbb{R}$, wobei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, eine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{198}$$

Dann ist y genau dann nicht fortsetzbar zu einer Lösung $\tilde{y}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (198), wenn mindestens eine der folgenden Aussagen gilt:

(1) $\lim_{x\to b-} y(x) = +\infty$,

(2) $\lim_{x\to b-} y(x) = -\infty$ *oder*

(3) $\partial D = \overline{D} \setminus D \neq \emptyset$ *und der Abstand von* $(x, y(x))$ *zu* ∂D *konvergiert für* $x \to b-$ *gegen* 0, *d.h. genau per definitionem* $\lim_{x\to b-} \rho(x, y(x)) = 0$, *wobei* $\rho\colon D \to \mathbb{R}_+$ *definiert ist durch* $\forall_{p\in D}\, \rho(p) := \min\{\|p-q\| \mid q \in \partial D\}$.

[Tip zu „⇒“: Betrachte die Menge $M \subset \widehat{\mathbb{R}}$, definiert durch

$M := \{$Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b[$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ und $\lim_{n\to\infty} y(x_n) = c\}$,

und zeige zunächst, falls (1) und (2) nicht gelten:

$M \cup \mathbb{R}$ ist ein nicht-leeres Intervall von $\mathbb{R}$ und $\{b\} \times (M \cap \mathbb{R}) \subset \partial D$.]

3.) Für $x \in [0,b[\subset [0,1[$ gilt

$$1 + y^2 > x^2 + y^2 = f(x,y), \quad 1 \geq 1 = y_0.$$

Die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = 1 + y^2(x), \quad y(0) = 1$$

hat die Lösung

$$\tilde{z}\colon [0, \frac{\pi}{4}[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \tan(x + \frac{\pi}{4}),$$

also folgt aus 7.2 (ii) (mit Voraussetzung (194), oberer Fall)

$$\forall_{x \in]0,b[\cap]0,\frac{\pi}{4}[} \; y(x) < \tan(x + \frac{\pi}{4}).$$

Hieraus folgt offenbar nach (199)

$$b \geq \frac{\pi}{4} \text{ und } \forall_{x \in [0,\frac{\pi}{4}[} \; y(x) \leq \tan(x + \frac{\pi}{4}). \tag{200}$$

4.) In ähnlicher Weise läßt sich zeigen

$$b \geq \frac{16}{17} \text{ und } \forall_{x \in [0,\frac{16}{17}[} \; y(x) \leq \frac{1}{1 - \frac{17}{16}x}. \tag{201}$$

8 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit

Definition 8.1. Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ offen und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung, die einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genüge. Nach 3.17 gibt es zu beliebigem $(x_0, y_0) \in D$ daher eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $y_{(x_0,y_0)}\colon I(x_0, y_0) \to V$, die auf einem offenen Intervall $I(x_0, y_0)$ von $\mathbb{R}$ definiert ist, der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Wir setzen

$$\boxed{\Delta := \bigcup_{(x_0,y_0)\in D} I(x_0, y_0) \times \{(x_0, y_0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V}$$

und nennen

$$\boxed{u\colon \Delta \longrightarrow V, \quad (t, x_0, y_0) \longmapsto y_{(x_0,y_0)}(t)}$$

die *allgemeine Lösung von* $y'(x) = f(x, y(x))$.

Unser erstes Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

Hauptsatz 8.2 (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ offen und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung, die einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genügt. $u\colon \Delta \to V$ sei die allgemeine Lösung von*

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Beh.:

(i) Δ ist offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V$.

(ii) $u\colon \Delta \to V$ ist stetig.

Für den Beweis des Hauptsatzes benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 8.3 (von Gronwall)**.**
Vor.: *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit linkem Eckpunkt $x_0 \in I$ und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit*

$$\forall_{x\in I}\, \varphi(x) \le \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$.
Beh.: $\forall_{x\in I}\, \varphi(x) \le \alpha\, \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)}$

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\forall_{x\in I}\, \varphi(x) < (\alpha + \varepsilon)\, \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)}. \tag{202}$$

Zunächst gilt (202) für $x = x_0$ wegen $\varphi(x_0) \overset{\text{Vor.}}{=} \alpha < \alpha + \varepsilon$. Angenommen (202) ist falsch. Dann existiert aus Stetigkeitsgründen genau ein $x_1 \in I$ mit $x_1 > x_0$ und

$$\forall_{x \in [x_0, x_1[} \, \varphi(x) < (\alpha + \varepsilon)\, \mathrm{e}^{\beta (x - x_0)}, \tag{203}$$

$$\varphi(x_1) = (\alpha - \varepsilon)\, \mathrm{e}^{\beta (x_1 - x_0)}. \tag{204}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &\overset{\text{Vor.}}{\leq} \alpha + \beta \int_{x_0}^{x_1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t \overset{(203)}{<} \alpha + \beta \int_{x_0}^{x_1} (\alpha + \varepsilon)\, \mathrm{e}^{\beta (t - x_0)}\, \mathrm{d}t \\ &= \alpha + \Big[(\alpha + \varepsilon)\, \mathrm{e}^{\beta (t - x_0)} \Big]_{x_0}^{x_1} \overset{(204)}{=} \alpha + \varphi(x_1) - (\alpha + \varepsilon) = \varphi(x_1) - \varepsilon \\ &< \varphi(x_1), \end{aligned}$$

Widerspruch! □

Satz 8.4 (Abschätzung des Fehlers bei einer Näherungslösung einer Anfangswertaufgabe)**.**
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung, die einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt, d.h.*

$$\exists_{L \in \mathbb{R}_+} \forall_{(x,y),(x,\tilde{y}) \in D} \, \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L \, \|y - \tilde{y}\|. \tag{205}$$

Ferner seien $(x_0, y_0) \in D$ und $y\colon I \to V$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0. \tag{206}$$

Beh.: *Ist $z\colon I \to V$ differenzierbar mit* $\operatorname{Graph} z \subset D$ *und existiert eine reelle Zahl $\delta \geq 0$ mit*

$$\forall_{x \in I} \, \|z'(x) - f(x, z(x))\| \leq \delta, \tag{207}$$

so folgt

$$\forall_{x \in I} \, \|z(x) - y(x)\| \leq \|z(x_0) - y_0\|\, \mathrm{e}^{L|x - x_0|} + \frac{\delta}{L} \left(\mathrm{e}^{L|x - x_0|} - 1 \right). \tag{208}$$

Bemerkung. Im Falle $z(x_0) = y_0$ und $\delta = 0$ folgt aus (208) $z = y$, also enthält der Satz auch einen Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von (206).

Beweis. 1. Fall: $x_0 \in I$ ist linker Randpunkt von I. Wir setzen zur Abkürzung

$$\gamma := \|z(x_0) - y_0\|. \tag{209}$$

Da y Lösung von (206) ist, gilt nach 3.5

$$\forall_{x \in I} \, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t. \tag{210}$$

Wir definieren $r\colon I \to V$ durch

$$\forall_{x\in I}\, z(x) = z(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\,\mathrm{d}t + r(x). \tag{211}$$

Dann ist r differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{x\in I}\, \|r'(x)\| = \|z'(x) - f(x, z(x))\| \overset{(207)}{\leq} \delta,$$

also folgt aus dem Mittelwertabschätzungssatz der Analysis II

$$\forall_{x\in I}\, \|r(x)\| \overset{(211)}{=} \|r(x) - r(x_0)\| \leq \delta\,(x - x_0), \tag{212}$$

Die stetige Funktion $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\forall_{x\in I}\, \psi(x) = \|z(x) - y(x)\|. \tag{213}$$

Nun folgt für alle $x \in I$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\overset{(213),(211),(210)}{\leq} \|z(x_0) - y_0\| + \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, z(t)) - f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \right\| + \|r(x)\| \\
&\overset{(209),(212)}{\leq} \gamma + \int_{x_0}^{x} \|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\|\,\mathrm{d}t + \delta\,(x - x_0) \\
&\overset{(205)}{\leq} \gamma + L \int_{x_0}^{x} \|z(t) - y(t)\|\,\mathrm{d}t + \delta\,(x - x_0) \\
&\overset{(213)}{=} \gamma + L \int_{x_0}^{x} \psi(t) - \frac{\delta}{L}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\forall_{x\in I}\, \underbrace{\psi(x) + \frac{\delta}{L}}_{=:\varphi(x)} \leq \underbrace{\left(\gamma + \frac{\delta}{L}\right)}_{=:\alpha} + \underbrace{L}_{=:\beta\in\mathbb{R}_+} \int_{x_0}^{x} \underbrace{\psi(t) + \frac{\delta}{L}}_{=\varphi(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Aus dem Lemma von Gronwall 8.3 folgt daher

$$\forall_{x\in I}\, \varphi(x) \leq \alpha\, \mathrm{e}^{\beta\,(x - x_0)},$$

d.h.

$$\forall_{x\in I}\, \psi(x) \leq \gamma\, \mathrm{e}^{L\,|x - x_0|} + \frac{\delta}{L}\left(\mathrm{e}^{L\,|x - x_0|} - 1\right).$$

Wegen (213) und (209) gilt somit (208).

2. Fall: $x_0 \in I$ ist rechter Randpunkt von I. Die Behauptung folgt leicht durch Anwendung des ersten Falles auf $\tilde{f}(x, y) := -f(-x, y)$, $\tilde{y}(x) := y(-x)$ und $\tilde{z}(x) := z(-x)$.

3. Fall: x_0 ist innerer Punkt von I. Dann folgt die Behauptung durch Kombination der vorherigen Fälle. □

Satz 8.5 (Stetige Abhängigkeit auf kompakten Intervallen definierter Lösungen von den Anfangswerten und der rechten Seite einer Anfangswertaufgabe).
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R} \times V$ und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung. Weiter seien $(x_0, y_0) \in D$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \tag{214}$$

*sowie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ derart, daß der α-*Streifen von Graph y *in D enthalten ist, d.h.*

$$S_\alpha := \{(x, v) \in [a,b] \times V \mid \|v - y(x)\| \le \alpha\} \subset D. \tag{215}$$

Außerdem genüge f auf S_α einer Lipschitzbedingung bzgl. y, also

$$\exists_{L \in \mathbb{R}_+} \forall_{(x,y),(x,\tilde{y}) \in S_\alpha} \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \le L \|y - \tilde{y}\|. \tag{216}$$

Beh.: *Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß folgendes gilt: Sind*

$$\begin{aligned} &g\colon S_\alpha \longrightarrow V \text{ stetig und } z_0 \in V \text{ mit} \\ &\qquad \forall_{(x,y) \in S_\alpha} \|g(x,y) - f(x,y)\| < \delta \\ &\text{und} \\ &\qquad \|z_0 - y_0\| < \delta, \end{aligned} \tag{217}$$

so besitzt auch die „gegenüber (214) um höchstens δ gestörte" Anfangswertaufgabe

$$z'(x) = g(x, z(x)), \quad z(x_0) = z_0 \tag{218}$$

eine auf ganz $[a,b]$ definierte Lösung, und für jede solche Lösung $z\colon [a,b] \to V$ von (218) gilt

$$\forall_{x \in [a,b]} \|z(x) - y(x)\| < \varepsilon.$$

Zusatz.

1.) Ist D offen, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit (215).

2.) Genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y, so gilt (216).

Bemerkung. Die Voraussetzung, daß y auf einem kompakten Intervall definiert ist, ist notwendig! Betrachte z.B. die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$ auf $[0, \infty[$, deren allgemeine Lösung $u(x, x_0, y_0) = y_0 \, \mathrm{e}^{x - x_0}$ ist. Wir verwenden die Bezeichnungen des Satzes mit

$$f(x,y) = g(x,y) = y, \quad y(x) = u(x, 0, 0), \quad z(x) = u(x, 0, 1),$$

wobei y und z auf $[0, \infty[$ definiert seien. Dann gilt

$$|z(x) - y(x)| = |e^x| \overset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Beweis. Zum Zusatz: 1.) Im Falle $D = \mathbb{R} \times V$ ist nichts zu zeigen, und im Falle $D \subsetneqq \mathbb{R} \times V$ leistet

$$\alpha := \frac{1}{2}\, d(\operatorname{Graph} y, (\mathbb{R} \times V) \setminus D) > 0$$

das Gewünschte. Beachte, daß $\operatorname{Graph} y \subset D$ mit $[a,b]$ kompakt und $(\mathbb{R} \times V) \setminus D$ nach Voraussetzung von 1.) abgeschlossen ist.[17]

2.) ist klar nach Übung 6.2.

Zum Beweis des Satzes: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig vorgegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\varepsilon \le \alpha$. Aus Stetigkeitsgründen existiert eine Zahl $C \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{x \in I}\, \mathrm{e}^{L|x-x_0|} + \frac{1}{L}\left(\mathrm{e}^{L|x-x_0|} - 1\right) \le C, \tag{219}$$

und wir setzen

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2\,C} \le \frac{\alpha}{2\,C}.$$

Seien im folgenden g, z_0 wie (217) gewählt. Dann gilt:

Jede Lösung $z\colon I \to V$ der Anfangswertaufgabe (218) (d.h. insbesondere $I \subset [a,b]$) erfüllt
$$\forall_{x \in I}\, \|z(x) - y(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\alpha}{2}. \tag{220}$$

[Zu (220): Es gilt $\|z(x_0) - y_0\| \overset{(218)}{=} \|z_0 - y_0\| \overset{(217)}{<} \delta$ und

$$\forall_{x \in I}\, \|z'(x) - f(x, z(x))\| \overset{(218)}{=} \|g(x,y) - f(x,y)\| \overset{(217)}{<} \delta,$$

also nach 8.4 (angewandt auf $S_\alpha, f|_{S_\alpha}, y|_I$ anstelle von D, f, y)

$$\forall_{x \in I}\, \|z(x) - y(x)\| \le \delta \left(\mathrm{e}^{L|x-x_0|} + \frac{1}{L}\left(\mathrm{e}^{L|x-x_0|} - 1\right)\right) \overset{(219)}{\le} \delta\, C \overset{\text{Def. } \delta}{\le} \frac{\varepsilon}{2}. \quad]$$

Wegen (220), $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bleibt zum Nachweis des Satzes zu zeigen, daß eine auf ganz $[a,b]$ definierte Lösung von (218) existiert.

Beweis hiervon: $g\colon S_\alpha \to V$ läßt sich offenbar zu einer stetigen Abbildung $\tilde{g}\colon \widetilde{S_\alpha} \to V$ auf einer Umgebung $\widetilde{S_\alpha}$ von S_α in $\mathbb{R} \times V$ forzetzen. (Wir behaupten nicht $\widetilde{S_\alpha} \subset D$!) Die Anfangswertaufgabe

$$\tilde{z}'(x) = \tilde{g}(x, \tilde{z}(x)), \quad \tilde{z}(x_0) = z_0$$

besitzt nach dem globalen Existenzsatz von Peano 3.10 eine maximale Lösung $\tilde{z}\colon \widetilde{I} \to V$, wobei $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Da S_α kompakt ist, muß $\operatorname{Graph} \tilde{z}$

[17] **Lemma.** *Sind (M,d) ein metrischer Raum, A eine kompakte und B eine angeschlossene Teilmenge von M mit $A \cap B = \varnothing$, so gilt $d(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} > 0$.*

Beweis. Angenommen $d(A,B) = 0$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ derart, daß gilt $d(a_n, B) := \inf\{d(a_n,b) \mid b \in B\} < \frac{1}{n+1}$. Da A kompakt und damit folgenkompakt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein Element $a_* \in A$ konvergiert. Es folgt $d(a_*, B) = 0$. Daher existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n \in B$ mit $d(a_*, b_n) < \frac{1}{n+1}$. Somit muß gelten $a_* = \lim_{n\to\infty} b_n$. Weil B abgeschlossen ist, folgt $a_* \in B$, d.h. $a_* \in A \cap B$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

nach ebendiesem Satz nach hinten und nach vorne aus S_α herauslaufen. Daher existieren offenbar eindeutig bestimmte $x_1, x_2 \in \widetilde{I}$ mit $x_1 < x_2$ und $x_0 \in [x_1, x_2]$ sowie

$$\forall_{x\in[x_1,x_2]}\,(x,\tilde{z}(x)) \in \begin{cases} \overset{\circ}{S}_\alpha & \text{für } x \in]x_1, x_2[, \\ \partial S_\alpha = S_\alpha \setminus \overset{\circ}{S}_\alpha & \text{für } x \in \{x_1, x_2\}. \end{cases}$$

$z := \tilde{z}|_{[x_1,x_2]}$ ist somit ebenfalls Lösung von (218), weshalb nach (220) insbesondere gilt

$$\forall_{i\in\{1,2\}}\,\|z(x_i) - y(x_i)\| \le \frac{\alpha}{2}.$$

Wegen $(x_1, \tilde{z}(x_1)), (x_1, \tilde{z}(x_1)) \in \partial S_\alpha$ bedeutet dies nach Definition von S_α, daß x_1, x_2 Randpunkte von $[a,b]$ sein müssen, d.h. es muß gelten $x_1 = a$ und $x_2 = b$. Damit ist gezeigt, daß z eine auf $[a,b]$ definierte Lösung von (218) ist. □

Beweis von Hauptsatz 8.2. Seien also V eine endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R}\times V$ offen und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung, die einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genügt. $u\colon \Delta \to V$ bezeichne die allgemeiene Lösung von $y'(x) = f(x, y(x))$.

Sei $(t_0, x_0, y_0) \in \Delta$, also $(x_0, y_0) \in D$ und $t_0 \in I(x_0, y_0)$. Da $I(x_0, y_0)$ offen ist, existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ derart, daß $[a-\delta_1, b+\delta_1] \subset I(x_0, y_0)$ und $t_0, x_0 \in]a, b[$.

Wir setzen $y := u(\ldots, x_0, y_0)|_{[a-\delta_1,b+\delta_1]}$, d.h. y ist Lösung der Anfangswertaufgabe $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(x_0) = y_0$, und wählen eine Norm $\|\ldots\|$ auf V sowie $\alpha, L \in \mathbb{R}_+$ gemäß des Zusatzes zu 8.5. Nach 8.5 existiert dann ein $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für alle $y_1 \in V$ mit $\|y_1 - y_0\| < \delta_2$ gilt:

Die Anfangswertaufgabe $\tilde{z}'(t) = f(t, \tilde{z}(t))$, $\tilde{z}(x_0) = y_1$ besitzt eine auf ganz $[a-\delta_1, b+\delta_1]$ definierte Lösung $\tilde{z}\colon [a-\delta_1, b+\delta_1] \to V$ mit

$$\forall_{t\in[a-\delta_1,b+\delta_1]}\,\|\tilde{z}(t) - y(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{221}$$

Hieraus folgt für jedes $x_1 \in I(x_0, y_0)$ mit $|x_1 - x_0| < \delta_1$:

Die Anfangswertaufgabe $z'(t) = f(t, z(t))$, $z(x_1) = y_1$ besitzt eine auf ganz $[a, b]$ definierte Lösung, nämlich $z(t) := \tilde{z}(t + (x_0 - x_1))$. (222)

Insbesondere haben wir $(t_0, x_0, y_0) \in]a, b[\times]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\times U_{\delta_2}(y_0) \subset \Delta$ gezeigt, also $(t_0, x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$. Wegen der Beliebigkeit von $(t_0, x_0, y_0) \in \Delta$ folgt 8.2 (i).

Seien nun $y_1 \in V$ mit $\|y_1 - y_0\| < \delta_2$ und $\tilde{z}\colon [a-\delta_1, b+\delta_1] \to V$ gemäß (221) gewählt. Als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist $\tilde{z}$ gleichmäßig stetig, also existiert $\delta_3 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t,\tilde{t}\in[a-\delta_1,b+\delta_1]}\,|t - \tilde{t}| < \delta_3 \Longrightarrow \|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(\tilde{t})\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{223}$$

Seien weiter $x_1 \in I(x_0, y_0)$ mit $|x_1 - x_0| < \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_3\}$ und $z\colon [a, b] \to V$ zu x_1 wie in (222) gewählt. Dann gilt für jedes $t \in [a, b]$ mit $|t - t_0| < \frac{1}{2}\,\delta_3$

$$\|z(t) - y(t_0)\| \quad = \quad \|\tilde{z}(t + (x_0 - x_1)) - y(t_0)\|$$

$$\leq \underbrace{\|\tilde{z}(t+(x_0-x_1))-\tilde{z}(t_0)\|}_{\overset{(223)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|\tilde{z}(t_0)-y(t_0)\|}_{\overset{(221)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Hieraus und aus $z(t) = u(t, x_1, y_1)$ sowie $y(t_0) = u(t_0, x_0, y_0)$ folgt die Stetigkeit von u in (t_0, x_0, y_0), d.h. wir haben auch 8.2 (ii) gezeigt. □

Korollar 8.6.
Vor.: *Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subset \mathbb{R}\times V$ offen, $\Lambda \subset W$ offen und $f\colon D \times \Lambda \to V$, $(t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$ eine stetige Abbildung, die einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. (y, λ) genügt. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $u_\lambda\colon \Delta_\lambda \to V$ die allgemeine Lösung von*

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda).$$

Beh.:

(i) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Delta_\lambda \times \{\lambda\}$ ist offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V \times W$.

(ii) Die Abbildung $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Delta_\lambda \times \{\lambda\} \to V$, $(t, x, y, \lambda) \mapsto u_\lambda(t, x, y)$ ist stetig.

Beweis. Das Korollar folgt durch Anwendung von Hauptsatz 8.2 auf

$$(y_V, y_W)'(x) = (f(x, y_V(x), y_W(x)), 0) \in V \times W.$$

Die in V liegende Komponente der allgemeinen Lösung hiervon ist genau die in (ii) genannte Abbildung. □

Hauptsatz 8.7 (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten und Parametern)**.**
Vor.: *Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subset \mathbb{R}\times V$ offen, $\Lambda \subset W$ offen und $f\colon D \times \Lambda \to V$, $(t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$ eine stetige Abbildung, die einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y genügt.*[18] *Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $u_\lambda\colon \Delta_\lambda \to V$ die allgemeine Lösung von*

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda),$$

d.h. für jedes $(x_0, y_0, \lambda) \in D \times \Lambda$ ist

$$u_\lambda(\ldots, x_0, y_0) = y_{(x_0,y_0,\lambda)}\colon I(x_0, y_0, \lambda) \longrightarrow V$$

die eindeutig bestimmte maximale Lösung, welche auf einem offenen Intervall $I(x_0, y_0, \lambda)$ von $\mathbb{R}$ definiert ist, der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda), \quad y(x_0) = y_0.$$

[18] D.h. nach Wahl einer Norm $\|\ldots\|$ auf V existiert zu jedem $(x_0, y_0, \lambda_0) \in D \times \Lambda$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ((x_0, y_0, \lambda_0), D \times \Lambda)$ mit

$$\exists_{L\in\mathbb{R}_+} \forall_{(x,y,\lambda),(x,\tilde{y},\lambda)\in U} \|f(x, y, \lambda) - f(x, \tilde{y}, \lambda)\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

Beh.:

(i) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Delta_\lambda\times\{\lambda\}$ *ist offen in* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times V\times W$.

(ii) Die Abbildung $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Delta_\lambda\times\{\lambda\}\to V$, $(t,x,y,\lambda)\mapsto u_\lambda(t,x,y)$ *ist stetig.*

Beweis. Wir modifizieren den Beweis von Hauptsatz 8.2.[19]

Sei $(t_0,x_0,y_0,\lambda_0)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Delta_\lambda\times\{\lambda\}$, also $(x_0,y_0)\in D$ und $t_0\in I(x_0,y_0,\lambda_0)$. Da $I(x_0,y_0,\lambda_0)$ offen ist, existieren $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und $\delta_1\in\mathbb{R}_+$ derart, daß $[a-\delta_1,b+\delta_1]\subset I(x_0,y_0,\lambda_0)$ und $t_0,x_0\in\,]a,b[$.

Wir setzen $y:=u(\dots,x_0,y_0,\lambda_0)|_{[a-\delta_1,b+\delta_1]}$, d.h. y ist Lösung der Anfangswertaufgabe $y'(t)=f(t,y(t),\lambda_0)$, $y(x_0)=y_0$, und wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V sowie $\alpha,L\in\mathbb{R}_+$ gemäß des Zusatzes zu 8.5. Nach 8.5 existiert dann ein $\delta_2\in\mathbb{R}_+$ derart, daß für alle $\lambda\in\Lambda$ mit $\forall_{(x,y)\in S_\alpha}\|f(x,y,\lambda)-f(x,y,\lambda_0)\|<\delta_2$ und $y_1\in V$ mit $\|y_1-y_0\|<\delta_2$ gilt:

> Die Anfangswertaufgabe $\tilde z_\lambda'(t)=f(t,\tilde z_\lambda(t),\lambda)$, $\tilde z_\lambda(x_0)=y_1$ besitzt eine auf ganz $[a-\delta_1,b+\delta_1]$ definierte Lösung $\tilde z_\lambda\colon[a-\delta_1,b+\delta_1]\to V$ mit
>
> $$\forall_{t\in[a-\delta_1,b+\delta_1]}\|\tilde z_\lambda(t)-y(t)\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf W. $f|_{S_\alpha\times\Lambda}\colon S_\alpha\times\Lambda\to V$ ist stetig, also existiert ein $\delta_3\in\mathbb{R}_+$ derart, daß für alle $\lambda\in\Lambda$ mit $\|\lambda-\lambda_0\|<\delta_3$ gilt $U_{\delta_3}(\lambda_0)\subset\Lambda$ (beachte, daß Λ offen ist) und

$$\forall_{(x,y)\in S_\alpha}\|f(x,y,\lambda)-f(x,y,\lambda_0)\|<\delta_2.$$

Hieraus folgt für jedes $x_1\in I(x_0,y_0)$ mit $|x_1-x_0|<\delta_1$:

> Die Anfangswertaufgabe $z_\lambda'(t)=f(t,z(t),\lambda)$, $z_\lambda(x_1)=y_1$ besitzt eine auf ganz $[a,b]$ definierte Lösung, nämlich $z_\lambda(t):=\tilde z_\lambda(t+(x_0-x_1))$.

Insbesondere haben wir

$$(t_0,x_0,y_0,\lambda_0)\in\,]a,b[\times\,]x_0-\delta_1,x_0+\delta_1[\times U_{\delta_2}(y_0)\times U_{\delta_3}(\lambda_0)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Delta_\lambda\times\{\lambda\}$$

gezeigt, also folgt 8.7 (i).

Der Beweis von (ii) erfolgt nun fast identisch zu dem von 8.2 (ii). □

Unser nächstes Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

Hauptsatz 8.8 (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten)**.**
Vor.: *Seien* V *ein endlich-dimensionaler* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* $D\subset\mathbb{R}\times V$ *offen und* $f\colon D\to V$ *eine stetige Abbildung, die stetig partiell differenzierbar nach* y *ist. Es sei* $u\colon\Delta\to V$, $(t,x,y)\mapsto u(t,x,y)$ *die allgemeine Lösung von*

$$y'(x)=f(x,y(x)),$$

[19] Nachdem der Beweis von 8.2 vorgeführt wurde, sollte der nun zu führende eigentlich als Übungsaufgabe gestellt werden. Dies war im WS 2009/2010 aus Zeitgründen nicht möglich.

d.h. für jedes $(t,x,y) \in \Delta$ *gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) = f(t,u(t,x,y)), \quad u(x,x,y) = y. \tag{224}$$

Beh.:

(i) u *ist stetig partiell differenzierbar nach* t*.*

(ii) u *ist stetig partiell differenzierbar nach* x*, d.h.* $\frac{\partial u}{\partial x}\colon \Delta \to V$ *ist stetig, und für jedes* $(x,y) \in D$ *ist* $\frac{\partial u}{\partial x}(\ldots,x,y)\colon I(x,y) \to V$ *differenzierbar und Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,u(t,x,y))\,z(t), \quad z(x) = -f(x,y). \tag{225}$$

(iii) u *ist stetig partiell differenzierbar nach* y*, d.h. per definitionem*

$\forall_{(t_0,x_0,y_0)\in\Delta}\, u(t_0,x_0,\ldots)$ *ist differenzierbar in* y_0*, d.h. es existiert*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}(t_0,x_0,y_0)} := \mathrm{d}_{y_0}(u(t_0,x_0,\ldots)) \in \mathrm{End}(V),$$

(beachte, daß $\{y \in V \mid (t_0,x_0,y) \in \Delta\}$ *mit* Δ *offen ist) und*

$$\frac{\partial u}{\partial y}\colon \Delta \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad (t_0,x_0,y_0) \longmapsto \frac{\partial u}{\partial y}(t_0,x_0,y_0),$$

ist stetig.

Darüber hinaus ist $\frac{\partial u}{\partial y}(\ldots,x,y)\colon I(x,y) \to \mathrm{End}(V)$ *für jedes* $(x,y) \in D$ *differenzierbar und Lösung der* $\mathrm{End}(V)$*-wertigen Anfangswertaufgabe*

$$Z'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,u(t,x,y)) \circ Z(t), \quad Z(x) = \mathrm{id}_V. \tag{226}$$

Zusatz. *Ist* $k \in \mathbb{N}_+$ *und sind* $f\colon D \to V$ *sowie* $\frac{\partial f}{\partial y}\colon D \to \mathrm{End}(V)$ k*-mal stetig differenzierbar, so ist* $u\colon \Delta \to V$ $(k+1)$*-mal stetig (partiell) differenzierbar.*

Wir bereiten den Beweis von 8.8 durch drei Lemmata vor.

Lemma 8.9. *Es seien* $a,b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* V *ein endlich-dimensionaler* $\mathbb{R}$*-Vektorraum. Ist dann* $h\colon [a,b] \to \mathrm{End}(V)$ *eine stetige Abbildung, so gilt*

$$\forall_{v\in V} \left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t \right)(v) = \int_a^b h(t)(v)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Wir wählen eine Norm $\|\ldots\|$ auf V.

Seien $\xi \in [a,b]$ und $(h_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{End}(V)$ mit $\lim_{\nu\to\infty} h_\nu = h(\xi)$, wobei wir $\mathrm{End}(V)$ mit der durch $\|\ldots\|$ induzierten Operatornorm betrachten. Dann folgt

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup\{\|(h_\nu - h(\xi))(v)\| \mid v \in V \wedge \|v\| = 1\} = 0,$$

also offenbar auch

$$\forall_{v\in V} \lim_{\nu\to\infty} (h_\nu(v)) = h(\xi)(v). \tag{227}$$

Sind daher $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ und Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$, so gilt für $v \in V$

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)(v) &\overset{(49)}{=} \left(\lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}(h,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)\right)(v) \overset{(227)}{=} \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}(h(\ldots)(v),\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)\\ &= \int_a^b h(t)(v)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Lemma 8.10. *Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset V$ offen und $g\colon [a,b] \times M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die stetig partiell differenzierbar nach y ist.*

Dann ist die Funktion

$$G\colon M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \int_a^b g(t,y)\,\mathrm{d}t$$

stetig differenzierbar, und es gilt für jedes $y_0 \in M$

$$\mathrm{d}_{y_0}G = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{End}(V). \tag{228}$$

Beweis. Nach Lemma 8.9 gilt für jedes $y_0 \in M$

$$\forall_{v\in V} \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)\,\mathrm{d}t\right)(v) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)(v)\,\mathrm{d}t. \tag{229}$$

(Beachte, daß $\frac{\partial g}{\partial y}(\ldots,y_0)$ nach Voraussetzung eine stetige Abbildung ist.)

Daher folgt nach Wahl einer Norm $\|\ldots\|$ auf V für $y_0 \in M$ und $h \in V \setminus \{0\}$ mit $y_0 + h \in M$

$$\begin{aligned}&\frac{G(y_0+h) - G(y_0) - \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)\,\mathrm{d}t\right)(h)}{\|h\|}\\ &\qquad\overset{(229)}{=} \int_a^b \frac{g(t,y_0+h) - g(t,y_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)(h)}{\|h\|}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

und die rechte Seite konvergiert nach Voraussetzung für $h \to 0$ gegen Null. Aus der Beliebigkeit von y_0 folgt die Differenzierbarkeit von G und die Gültigkeit von (228).

Daß G sogar stetig differenzierbar ist, folgt nun leicht aus der stetigen partiellen Differenzierbarkeit von g nach y. □

Lemma 8.11. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $M \subset \mathbb{R}$ offen, $g\colon [a,b] \times M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die stetig partiell differenzierbar nach y ist, und $h_1, h_2\colon M \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $h_i(M) \subset [a,b]$ für $i \in \{1,2\}$.*

Dann ist die Funktion

$$G\colon M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} g(t,y)\,\mathrm{d}t$$

stetig differenzierbar, und es gilt für jedes $y \in M$

$$G'(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)\,\mathrm{d}t + g(h_2(y),y)\,h_2{}'(y) - g(h_1(y),y)\,h_1{}'(y).$$

Beweis. Definiere die stetig differenzierbare Funktion $\widetilde{G}\colon [a,b]^2 \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{G}(x_1,x_2,y) := \int_{x_1}^{x_2} g(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

Dann gilt für jedes $(x_1,x_2,y) \in [a,b]^2 \times M$ nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x_1}(x_1,x_2,y) = -g(x_1,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x_2}(x_1,x_2,y) = g(x_2,y).$$

und nach Lemma 8.10

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial y}(x_1,x_2,y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial y}(t,y_0)\,\mathrm{d}t.$$

Hieraus und aus $G(y) = \widetilde{G}(h_1(y),h_2(y),y)$ folgt mit der Kettenregel die Behauptung. □

Beweis von Hauptsatz 8.8. (224) beinhaltet (i) und impliziert mittels 3.5, daß gilt

$$u(t,x,y) = y + \int_x^t f(\tau,u(\tau,x,y))\,\mathrm{d}\tau. \tag{230}$$

Zu (ii): Ist u partiell differenzierbar nach x, so folgt aus (230) und Lemma 8.11

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y) = -f(x,y) + \int_x^t \frac{\partial f}{\partial y}(\tau,u(\tau,x,y))\,\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,x,y)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ist u sogar stetig partiell differenzierbar nach x, so folgt hieraus und aus 3.5, daß $\frac{\partial u}{\partial x}(\ldots,x,y)$ differenzierbar ist und Gleichung (225) löst. Wir zeigen also nun, daß u stetig partiell differenzierbar nach x ist.

Seien $(t_0,x_0,y_0) \in \Delta$ und $\delta_1,\delta_2,\delta_3 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{(t,x,y)\in]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[\times U_{\delta_3}(y_0)}\,(t,x,y) \in \Delta$$

und

$$\forall_{x\in]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[}\, x \in]t_0-\delta_1, t_0+\delta_2[.$$

Des weiteren existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für jedes $h \in]-\delta,\delta[$ und jedes $\tau \in [0,1]$ gilt

$$\forall_{t\in]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[}\left(t, u(t,x_0,y_0) + \tau\left(u(t,x_0+h,y_0) - u(t,x_0,y_0)\right)\right) \in \Delta.$$

(Beachte, daß Δ offen ist.) Für alle $h \in]-\delta,\delta[$ sowie $x \in]x_0-\delta_3, x_0+\delta_3[$ und $y \in U_{\delta_3}(y_0)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Y}(\ldots,x,y,h)\colon]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\to \mathrm{End}(V)$ die nach 6.4 eindeutig bestimmte Lösung von

$$Z'(t) = \overbrace{\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\Big(t, u(t,x,y) + \tau\left(u(t,x+h,y) - u(t,x,y)\right)\Big)\,\mathrm{d}\tau\right)}^{=:A(t,x,y,h)} \circ Z(t),$$

$$Z(x) = \mathrm{id}_V.$$

Wir behaupten:

$$\mathfrak{Y}\colon]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[\times U_{\delta_3}(y_0)\times]-\delta,\delta[\longrightarrow \mathrm{End}(V) \text{ ist stetig.} \quad (231)$$

[Zu (231): Die stetige Abbildung

$$]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times \mathrm{End}(V) \times]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[\times U_{\delta_3}(y_0)\times]-\delta,\delta[\longrightarrow \mathrm{End}(V),$$

die (t,Z,x,y,h) auf $A(t,x,y,h)\circ Z$ abbildet genügt offenbar einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. Z. Dies sieht man analog zum Beweis von Satz 6.4 ein. (231) folgt nun aus Hauptsatz 8.7.]

Wir definieren $v\colon]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times]-\delta,\delta[\to V$ durch

$$v(t,h) := u(t,x_0+h,y_0) - u(t,x_0,y_0),$$

also gilt offenbar

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,h) = A(t,x_0,y_0,h)\circ v(t,h)$$

und

$$\begin{aligned} v(x_0,h) &= u(x_0,x_0+h,y_0) - u(x_0+h,x_0+h,y_0) + u(x_0+h,x_0+h,y_0) - y_0 \\ &= -\left(u(x_0+h,x_0+h,y_0) - u(x_0,x_0+h,y_0)\right) \\ &= -h\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x_0+s\,h,x_0+h,y_0)\,\mathrm{d}s \\ &= -hf(x_0,y_0) \\ &\quad +h\underbrace{\int_0^1 f(x_0,y_0) - f(x_0+s\,h,u(x_0+s\,h,x_0+h,y_0))\,\mathrm{d}s}_{=:R(x_0,y_0,h)}. \end{aligned}$$

Aus Eindeutigkeitsgründen folgt daher für jedes $(t,h) \in]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times]-\delta,\delta[$ mittels des Zusatzes a) zu 6.4

$$v(t,h) = \mathfrak{Y}(t,x_0,y_0,h)\left(-h\,f(x_0,y_0) + h\,R(x_0,y_0,h)\right),$$

also

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(t_0,h)}{h} = -\mathfrak{Y}(t_0,x_0,y_0,0)(f(x_0,y_0)),$$

und die Abbildung auf der rechten Seite ist nach (231) und Voraussetzung stetig in (t_0,x_0,y_0).

Zu (iii): Ist u partiell differenzierbar nach y, so folgt aus (230) und Lemma 8.10

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,y) = \mathrm{id}_V + \int_x^t \frac{\partial f}{\partial y}(\tau,u(\tau,x,y)) \circ \frac{\partial u}{\partial y}(\tau,x,y)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ist u sogar stetig partiell differenzierbar nach y, so folgt hieraus und aus 3.5, daß $\frac{\partial u}{\partial y}(\ldots,x,y)$ differenzierbar ist und Gleichung (226) löst. Wir zeigen also nun, daß u stetig partiell differenzierbar nach y ist.

Seien wieder $(t_0,x_0,y_0)\in\Delta$ und $\delta_1,\delta_2,\delta_3\in\mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{(t,x,y)\in]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[\times U_{\delta_3}(y_0)}\,(t,x,y)\in\Delta$$

und

$$\forall_{x\in]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[}\,x\in\,]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[.$$

Des weiteren existiert $\delta\in\mathbb{R}_+$ derart, daß für jedes $h\in U_\delta(0)$ und jedes $\tau\in[0,1]$ gilt

$$\forall_{t\in]t_0-\delta,t_0+\delta[}\left(t,u(t,x_0,y_0)+\tau\left(u(t,x_0,y_0+h)-u(t,x_0,y_0)\right)\right)\in\Delta.$$

(Beachte, daß Δ offen ist.) Für alle $h\in U_\delta(0)$ sowie $x\in\,]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[$ und $y\in U_{\delta_3}(y_0)$ bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathfrak{Y}}(\ldots,x,y,h)\colon\,]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\,\to\mathrm{End}(V)$ die nach 6.4 eindeutig bestimmte Lösung von

$$Z'(t) = \overbrace{\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\Big(t,u(t,x,y)+\tau\left(u(t,x,y+h)-u(t,x,y)\right)\Big)\,\mathrm{d}\tau\right)}^{=:V(t,x,y,h)}\circ Z(t),$$

$$Z(x) = \mathrm{id}_V.$$

Analog zum Nachweis von (231) zeigt man:

$$\widetilde{\mathfrak{Y}}\colon\,]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\times]x_0-\delta_3,x_0+\delta_3[\times U_{\delta_3}(y_0)\times U_\delta(0)\longrightarrow\mathrm{End}(V)\text{ ist stetig.}\quad(232)$$

Wir definieren $w\colon\,]t_0-\delta_1,t_0+\delta_2[\,\times U_\delta(0)\to V$ durch

$$w(t,h) := u(t,x_0,y_0+h)-u(t,x_0,y_0),$$

also gilt offenbar

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,h) = V(t,x_0,y_0,h)\circ w(t,h)$$

und

$$w(x_0,h) = y_0+h-y_0 = h.$$

Aus Eindeutigkeitsgründen folgt daher für jedes $(t,h) \in]t_0-\delta_1, t_0+\delta_2[\times U_\delta(0)$ mittels des Zusatzes a) zu 6.4

$$w(t,h) = \widetilde{\mathfrak{Y}}(t,x_0,y_0,h)(h),$$

also nach Wahl einer Norm $\|\dots\|$ auf V auch

$$\begin{aligned}\frac{\|w(t_0,h)-\widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,0)(h)\|}{\|h\|} &\leq \|\widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,h)-\widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,0)\| \left\|\frac{h}{\|h\|}\right\| \\ &= \|\widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,h)-\widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,0)\|\end{aligned}$$

und somit nach (232) $\lim_{h\to 0} \frac{\|w(t_0,h)-\widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,0)(h)\|}{\|h\|} = 0$. Damit ist gezeigt

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t_0,x_0,y_0) = \widetilde{\mathfrak{Y}}(t_0,x_0,y_0,0),$$

und die rechte Seite ist erneut nach (232) stetig in (t_0,x_0,y_0).

Zum Beweis des Zusatzes: Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Denn Fall $k=0$ haben wir soeben bewiesen.

Seien nun $k \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon D \to V$ sowie $\frac{\partial f}{\partial y}\colon D \to \operatorname{End}(V)$ k-mal stetig differenzierbar. Daß dann $\frac{\partial u}{\partial t}$ ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist, ist wegen (224) klar.

Des weiteren ist

$$\tilde{f}\colon D \times V \longrightarrow V \times V, \quad (x,y,\tilde{y}) \longmapsto \left(f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\tilde{y}\right)$$

insbesondere eine $(k-1)$-mal stetig differenzierbare Abbildung. Nach Induktionsvoraussetzung ist die allgemeine Lösung $\tilde{u} = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\colon \widetilde{\Delta} \to V \times V$ von

$$(y'(x),\tilde{y}'(x)) = \tilde{f}(x,y(x),\tilde{y}(x)) = \left(f(x,y(x)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\,\tilde{y}(x)\right)$$

eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt offenbar

$$\forall_{(t,x,y)\in\Delta}\ \forall_{\tilde{y}\in V}\ \tilde{u}_1(t,x,y,\tilde{y}) = u(t,x,y),$$

und wegen 3.13 (ii) und 3.17 ist $\tilde{u}_2(\dots,x,y,\tilde{y})$ für jedes $(x,y) \in D$ sowie $\tilde{y} \in V$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung der Anfangswertaufgabe

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,u(t,x,y))\,z(t), \quad z(x) = \tilde{y},$$

also gilt nach (ii) für alle $t \in I(x,y)$

$$\tilde{u}_2(t,x,y,-f(x,y)) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y),$$

und die linke Seite ist k-mal stetig differenzierbar.

Außerdem ist für $(x,y) \in D$

$$I(x,y) \longrightarrow \operatorname{End}(V), \quad t \longmapsto \tilde{u}_2(t,x,y,\dots)$$

ein differenzierbarer Weg in $\mathrm{End}(V)$, der die Anfangswertaufgabe

$$Z'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, u(t,x,y)) \circ Z(t), \quad Z(x) = \tilde{u}_2(x,x,y,\dots) = \mathrm{id}_V$$

löst, und diese Lösung ist erneut wegen 3.13 (ii) und 3.17 eindeutig bestimmt. Daher folgt aus (iii) für alle $t \in I(x,y)$

$$\tilde{u}_2(t,x,y,\dots) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,y),$$

und die linke Seite ist k-mal stetig differenzierbar.

Wir haben damit gezeigt, daß $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\colon \Delta \to V$ und $\frac{\partial u}{\partial y}\colon \Delta \to \mathrm{End}(V)$ k-mal stetig differenzierbar sind, also ist $u\colon \Delta \to V$ nach Analysis $(k+1)$-mal stetig (partiell) differenzierbar. □

Korollar 8.12 (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten und Parametern)**.**
Vor.: *Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subset \mathbb{R}\times V$ offen, $\Lambda \subset W$ offen und $f\colon D \times \Lambda \to V$, $(t,y,\lambda) \mapsto f(t,y,\lambda)$ eine stetige Abbildung, die stetig partiell differenzierbar nach y und λ ist. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $u_\lambda\colon \Delta_\lambda \to V$ die allgemeine Lösung von*

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda),$$

d.h. für jedes $(x_0, y_0, \lambda) \in D \times \Lambda$ ist

$$u_\lambda(\dots, x_0, y_0) = y_{(x_0,y_0,\lambda)}\colon I(x_0,y_0,\lambda) \longrightarrow V$$

die eindeutig bestimmte maximale Lösung, welche auf einem offenen Intervall $I(x_0,y_0,\lambda)$ von $\mathbb{R}$ definiert ist, der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda), \quad y(x_0) = y_0.$$

Beh.: *Die Abbildung*

$$\tilde{u}\colon \underbrace{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Delta_\lambda \times \{\lambda\}}_{=:\widetilde{\Delta}} \longrightarrow V, \quad (t,x,y,\lambda) \longmapsto u_\lambda(t,x,y)$$

ist stetig partiell differenzierbar. $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda}(\dots,x,y,\lambda)\colon I(x,y,\lambda) \to \mathcal{L}(W,V)$ ist des weiteren für jedes $(x,y,\lambda) \in D \times \Lambda$ differenzierbar sowie Lösung der $\mathcal{L}(W,V)$-wertigen Anfangswertaufgabe

$$Z'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \tilde{u}(t,x,y,\lambda), \lambda) \circ Z(t) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \tilde{u}(t,x,y,\lambda), \lambda), \quad Z(0) = 0. \tag{233}$$

Zusatz. *Sind $k \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon D \to V$, $\frac{\partial f}{\partial y}\colon D \to \mathrm{End}(V)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial \lambda}\colon D \to \mathcal{L}(W,V)$ k-mal stetig differenzierbar, so ist $\tilde{u}\colon \widetilde{\Delta} \to V$ $(k+1)$-mal stetig (partiell) differenzierbar.*

Beweis. Die stetige partielle Differenzierbarkeit von $\tilde{u}$ und der Zusatz folgen aus dem letzten Hauptsatz 8.8 inkl. Zusatz analog zum Beweis von Korollar 8.6. Daß $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda}(\ldots, x, y, \lambda)\colon I(x,y,\lambda) \to \mathcal{L}(W,V)$ für jedes $(x,y,\lambda) \in D \times \Lambda$ die Anfangswertaufgabe (233) löst, folgt dann weiter aus

$$\forall_{t \in I(x,y,\lambda)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,x,y,\lambda) = f(t, \tilde{u}(t,x,y,\lambda), \lambda),$$

Satz 3.5 und Lemma 8.10. □

9 Flüsse von Vektorfeldern

Sei im folgenden stets $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in diesem Kapitel autonome Differentialgleichungen vom Typ

$$\boxed{y'(x) = F(y(x)),} \tag{234}$$

hierbei ist $F\colon M \to V$ ein Lipschitz-stetiges $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes V auf einer offenen Teilmenge M von V, vgl. Teil (i) der folgenden Definition. Wie in 2.3 nennen wir allgemein eine Differentalgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ *autonom*, wenn die Abbildung f nur von der zweiten Variable abhängt.

Definition 9.1 (Vektorfeld, Integralkurve, Orbit)**.** Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M \subset V$ offen.

(i) Eine Abbildung $F\colon M \to V$ heißt *$\mathcal{C}^k$-Vektorfeld von V auf M* genau dann, wenn $F\colon M \to V$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist. Die Menge aller $\mathcal{C}^k$-Vektorfelder von V auf M bezeichnen wir mit $\boxed{\mathfrak{X}^k(M)}$.

Im Falle $k \geq 1$ ist jedes $F \in \mathfrak{X}^k(M)$ *lokal Lipschitz-stetig*, d.h. per definitionem, daß nach Wahl einer Norm $\|\dots\|$ auf V gilt

$$\forall_{p\in M}\, \exists_{U\in\mathcal{U}(p,M)}\, \exists_{L\in\mathbb{R}_+}\, \forall_{p_1,p_2\in U}\, \|F(p_1) - F(p_2)\| \leq L\,\|p_1 - p_2\|.$$

(ii) Ist $F \in \mathfrak{X}^k(M)$, so heißt eine $\left\{ \begin{array}{c} - \\ \text{maximale} \end{array} \right\}$ Lösung $c\colon I \to V$ der autonomen Differentialgleichung (234) auch eine $\left\{ \begin{array}{c} - \\ \textit{maximale} \end{array} \right\}$ *Integralkurve* oder *Stromlinie von F.*

Ist c maximale Lösung von (234), so heißt $c(I)$ *Bahn* oder *Orbit von F.*

(iii) Ist $F \in \mathfrak{X}^k(M)$ lokal Lipschitz-stetig, so ist M offenbar nach 3.17 die disjunkte Vereinigung seiner Bahnen. Den zu $p \in M$ eindeutig bestimmten Orbit, der p enthält, bezeichnen wir dann mit $\boxed{\mathcal{O}_p}$.

Satz 9.2. *Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset V$ offen, $F \in \mathfrak{X}^k(M)$ und $c\colon I \to V$ eine Stromlinie von F. Dann gilt:*

(i) $(\exists_{t_0\in I}\, F(c(t_0)) = 0) \Longrightarrow$ *c konstant,*

(ii) c nicht konstant $\Longrightarrow$ c glatt.

(iii) Ist c maximal, so folgt des weiteren

a) c nicht injektiv $\Longrightarrow$ $I = \mathbb{R}$ und c periodisch[20]*,*

b) $I \neq \mathbb{R} \Longrightarrow$ c injektiv und glatt.

[20] Ein auf $\mathbb{R}$ definierter Weg c heißt *periodisch* genau dann, wenn $T \in \mathbb{R}$ existiert derart, daß gilt $\forall_{t\in\mathbb{R}}\, c(t) = c(t+T)$.

Beweis. Zu (i): Sei $t_0 \in I$ derart, daß $c(t_0)$ eine Nullstelle von F ist. Der konstante Weg vom Wert $c(t_0)$ löst dann ebenfalls (234), also folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf 3.17, daß c konstant vom Wert $c(t_0)$ ist.

Zu (ii): Ist c nicht konstant, so folgt für jedes $t \in I$ aus (i) $c'(t) = F(c(t)) \neq 0$.

Zu (iii): Sei c nun maximale Stromlinie von F. Ist c nicht injektiv, so existieren $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \neq t_2$ sowie $c(t_1) = c(t_2)$, und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist auch

$$c_k \colon I + k\,(t_2 - t_1) \longrightarrow M, \quad t \longmapsto c(t - k\,(t_2 - t_1))$$

eine Stromlinie von F, also $c = c_k$ aus Eindeutigkeitsgründen. Wegen der Beliebigkeit von $k \in \mathbb{Z}$ gilt dann a).

Im Falle $I \neq \mathbb{R}$ ist c nach a) injektiv, insbesondere nicht konstant, also nach (ii) auch glatt. □

Definition 9.3 (Stationäre Punkte einer autonomen Differentialgleichung)**.** Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset V$ offen, $F \in \mathfrak{X}^k(M)$ und $p \in M$.

p heißt *stationärer Punkt* oder *Equilibrium von (234)*, falls p eine Nullstelle von F ist. Nach 9.2 (i) gilt dann $\mathcal{O}_p = \{p\}$.

Definition 9.4 (Fluß eines Vektorfeldes)**.** Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset V$ offen und $F \in \mathfrak{X}^k(M)$ lokal Lipschitz-stetig. $u \colon \Delta \to V$ bezeichne die allgemeine Lösung der autonomen Differentialgleichung (234). Wir haben in Kapitel 8 eingesehen, daß Δ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V$ und u eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist. Zu jedem $p \in M$ sei ferner $I(0,p)$ der Definitionsbereich von $u(\ldots, 0, p)$.

Wir nennen die $\mathcal{C}^k$-Abbildung

$$\Phi \colon \overbrace{\bigcup_{p \in M} I(0,p) \times \{p\}}^{=:E} \longrightarrow V, \quad (t,p) \longmapsto \Phi_t(p) := u(t,0,p) \in M$$

den *Fluß von F*.

[Beachte, daß E als Bild von Δ unter einer Submersion – nämlich der Projektion auf die erste und die dritte Komponente – eine offene Menge ist.]

Für alle $p \in M$ gilt also $\Phi(0,p) = p$ und für $t \in I(0,p)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,p) = F(\Phi(t,p)).$$

Ist $E = \mathbb{R} \times M$, so heißt F *vollständig* und Φ *global*.

Satz 9.5. *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset V$ offen und $F \in \mathfrak{X}^k(M)$ lokal Lipschitz-stetig. $\Phi \colon E \to M$ bezeichne den Fluß von F. Dann gilt:*

(i) $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$.

(ii) Sind $t, s \in \mathbb{R}$ derart, daß $\{t\} \times M, \{s\} \times M, \{t+s\} \times M \subset E$, so folgt

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

(iii) *Für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $\{t\} \times M, \{-t\} \times M \subset E$ ist $\Phi_t \colon M \to M$ ein Homöomorphismus und – im Falle $k \geq 1$ – ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.*

(iv) *Sei F zusätzlich lokal-Lipschitz stetig. Dann ist $\mathcal{O}_p = \Phi(I(0,p) \times \{p\})$ für jedes $p \in M$.*

Beweis. (i) und (iv) ergeben sich sofort aus der Definition von Φ. (iii) folgt aus (ii) mit $s = -t$ und (i).

Zu (ii): Seien $(t,p), (s,p) \in E$ derart, daß $(t+s,p) \in E$. $y \colon I(0,p) \to V$ bezeichne die eindeutig bestimmte maximale Lösung von (234) mit $y(0) = p$, also gilt $\Phi_{t+s}(p) = y(t+s)$ und $\Phi_s(p) = y(s)$. Des weiteren sei $\tilde{y} \colon I(0, \Phi_s(p)) \to V$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung von (234) mit $\tilde{y}(0) = \Phi_s(p) = y(s)$. Aus Eindeutigkeitsgründen gilt dann auch $\Phi_{t+s}(p) = y(t+s) = \tilde{y}(t) = \Phi_t(\Phi_s(p))$. □

Bemerkung. Ein *dynamisches System* besteht aus einer Menge M, dem sogenannten *Phasenraum*, einer Gruppe G, einer Teilmenge E von $G \times M$ und einer sogenannten *Flußabbildung* $\Phi \colon E \to M$, $(g,p) \mapsto \Phi_g(p)$ derart, daß gilt

(1) $\forall_{(e_G,p) \in E} \Phi(e_G, p) = p$, wobei e_G das neutrale Element von G bezeichne.

(2) $\forall_{(g_1,p),(g_2,p) \in E} \left((g_1 \cdot g_2, p) \in E \Longrightarrow \Phi_{g_1 \cdot g_2}(p) = (\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2})(p) \right)$.

Im Falle $E = G \times M$ heißt das dynamische System *global*.

Um Lösungen der autonomen Differentialgleichung (234) zu verstehen, ist es hilfreich, ihr sogenanntes *Phasenportrait*, d.i. die Menge aller Bahnen von F, zu skizzieren. Ist das Vektorfeld F lokal Lipschitz-stetig, so ist M – wie oben bereits bemerkt – sogar die disjunkte Vereinigung aller Bahnen, und der folgende Satz zeigt, daß die Gestalt des Phasenportraits in einer Umgebung eines nichtstationären Punktes zumindest im Falle $k \geq 1$ bis auf $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphie eine gewisse „Normalform“ hat.

Hauptsatz 9.6 (Begradigungssatz)**.**
Vor.: *Seien $k, n \in \mathbb{N}_+$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset V$ offen und $F \in \mathfrak{X}^k(M)$. $\Phi \colon E \to M$ bezeichne den Fluß von F.*
Beh.: *Zu jedem $p_0 \in M$ mit $F(p_0) \neq 0$ existieren Umgebungen $U \in \mathcal{U}^\circ(p_0, M)$ und $\widetilde{U}_0, \widetilde{U} \in \mathcal{U}^\circ(0, \mathbb{R}^n)$ mit $\widetilde{U}_0 \subset \widetilde{U}$ sowie ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $h \colon U \to \widetilde{U}$ und eine Zahl $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$ derart, daß $\Phi\left( ]-\delta_0, \delta_0[\times h^{-1}(\widetilde{U}_0) \right) \subset U$ und die Abbildung $\Psi \colon]-\delta_0, \delta_0[\times \widetilde{U}_0 \to \widetilde{U}$, definiert durch*

$$\Psi(t,y) := h(\Phi(t, h^{-1}(y))),$$

Beschränkung des Flusses von

$$y'(x) = (1, 0, \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$$

ist, d.h. $\Psi(t,y) = y + (t, 0, \ldots, 0)$ für alle $(t,y) \in]-\delta_0, \delta_0[\times \widetilde{U}_0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir zunächst $V = \mathbb{R}^n$ und sodann $p_0 = 0$ sowie $F(p_0) = e_1$ annehmen, wobei $\{e_1, \ldots e_n\}$ die kanonische

Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Wir betrachten das euklidische Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$. Für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ist dann

$$U_\varepsilon^H(0) := \{p \in U_\varepsilon(p_0) \,|\, \langle p, F(p_0)\rangle = 0\} \subset M$$

eine offene Vollkugel um 0 in der Hyperebene $H := \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ von $\mathbb{R}^n$ und

$$\forall_{p \in U_\varepsilon(0)} F(p) \neq 0. \tag{235}$$

Weiterhin existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß der Zylinder $Z_\delta :=]-\delta, \delta[\times U_\varepsilon^H(0)$ in der in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offenen Menge E enthalten ist. Wir zeigen nun, daß nach eventueller Verkleinerung von ε und δ gilt:

$$U_\delta := \Phi(Z_\delta) \in \mathcal{U}^\circ(p_0, M) \text{ und } \Phi|_{Z_\delta} \colon Z_\delta \longrightarrow U_\delta \text{ ist } \mathcal{C}^k\text{-Diffeomorphismus.} \tag{236}$$

[Zu (236): Zum einen ist Φ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung mit

$$\forall_{p \in U_\varepsilon^H(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,p) = F(p) \overset{(235)}{\neq} 0. \tag{237}$$

Zum anderen gilt für jedes $(0,0,p_2,\ldots,p_n) \in Z_\delta$ nach 9.5 (i)

$$\Phi(0,0,p_2,\ldots,p_n) = (0,p_2,\ldots,p_n),$$

also folgt aus (237)

$$\mathcal{J}_{(0,0)}(\Phi) = \begin{pmatrix} F_1(0) & 0 & \ldots & 0 \\ F_2(0) & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ F_n(0) & 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{F(0)=e_1}{=} \mathbf{1}_n,$$

wobei $\mathbf{1}_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix bezeichne, d.h. $\mathrm{d}_{(0,p_0)}(\Phi|_{Z_\delta})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus. Aus dem Umkehrsatz der Analysis folgt dann die Gültigkeit von (237) für hinreichend kleine $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_+$.]

Sei $\iota \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \times H = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ der kanonische $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, also gilt

$$\iota\left(]-\delta, \delta[\times U_\varepsilon^{\mathbb{R}^{n-1}}(0)\right) = Z_\delta.$$

Wir setzen

$$\widetilde{U}_\delta :=]-\delta, \delta[\times U_\varepsilon^{\mathbb{R}^{n-1}}(0) \in \mathcal{U}^\circ(0, \mathbb{R}^n),$$

und

$$h_\delta := (\Phi|_{Z_\delta} \circ \iota)^{-1} \colon U_\delta \longrightarrow \widetilde{U}_\delta.$$

Dies ist wegen (236) und der $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphie von ι ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

Die Behauptung des Satzes folgt nun mit $\delta_0 := \frac{\delta}{2}$, $U := U_\delta$, $\widetilde{U}_0 := \widetilde{U}_{\delta_0}$, $\widetilde{U} := \widetilde{U}_\delta$ und $h := h_\delta$:

Für jedes $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \widetilde{U}_{\delta_0}$ bildet $\Phi|_{Z_\delta} \circ \iota$ die Bahn

$$\mathcal{O}_y = \{(t + y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \widetilde{U}_\delta \,|\, t \in]-\delta_0, \delta_0[\}$$

von

$$y'(x) = (1, 0, \ldots, 0), \quad x \in]-\delta_0, \delta_0[$$

mit $y \in \mathcal{O}_y$ nach 9.5 (ii) und der Definition von ι auf die folgende Teilmenge der Bahn von (234), die $(\Phi \circ \iota)(y)$ enthält,

$$\{(\Phi \circ \iota)(t, (\Phi \circ \iota)(y_1, \ldots, y_n)) \in U_\delta \,|\, t \in]-\delta_0, \delta_0[\}$$

ab. Wir haben somit $h(t, h^{-1}(y)) = y + (t, 0, \ldots, 0)$ gezeigt. □

Beispiel 9.7 (Ebene autonome Systeme)**.**

(i) Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g, h\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist jede Lösung von

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -h(y_1(x), y_2(x)) \\ y_2'(x) &= g(y_1(x), y_2(x)) \end{aligned} \tag{238}$$

eine Lösung von

$$g(x, y)\,\mathrm{d}x + h(x, y)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{239}$$

Diese Differentialgleichung haben wir in Kapitel 4 studiert.

Umgekehrt existieren im Falle $g^2 + h^2 > 0$ zu jeder Lösung $c\colon I \to D$ von (239) ein Intervall J von $\mathbb{R}$ und ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\alpha\colon J \to I$, so daß $c \circ \alpha$ eine Lösung von (238) ist. Beweise dies!

(ii) Seien V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$. Wir wollen das Phasenportrait von $y'(x) = A\,y(x)$ bestimmen.

Seien $S := \mathrm{Spur}\,A$ und $D := \det A$, also sind $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(S \pm \sqrt{S^2 - 4D}\right) \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des charakteristischen Polynomes von A.

1. Fall: $S^2 > 4D$, also $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$ und $\lambda_+ > \lambda_-$. Dann ist A diagonalisierbar, d.h. es existiert eine geordnete Basis (v_1, v_2) von V bzgl. der A die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$ hat. Aus Satz 6.11 folgt, daß für alle $p = p_1 v_1 + p_2 v_2 \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(t, p) = \underbrace{p_1\,\mathrm{e}^{\lambda_- t}}_{=:v_1^*(t,p)}\, v_1 + \underbrace{p_2\,\mathrm{e}^{\lambda_+ t}}_{=:v_2^*(t,p)}\, v_2,$$

also gilt im Falle $p_1 \neq 0$ und $\lambda_- \neq 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{\lambda_-} \ln\left(\tfrac{v_1^*(t,p)}{p_1}\right), \\ v_2^*(t,p) &= p_2 \left(\tfrac{v_1^*(t,p)}{p_1}\right)^{\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)}. \end{aligned}$$

Im Falle $p_1 = 0$ gilt des weiteren

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\, v_1^*(t,p) = 0 \wedge v_2^*(t,p) = p_2\,\mathrm{e}^{\lambda_+ t}$$

und im Falle $\lambda_- = 0$

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\, v_1^*(t,p) = p_1 \wedge v_2^*(t,p) = p_2\,\mathrm{e}^{\lambda_+ t}.$$

Die Gestalt des Phasenportraits hängt nun wesentlich von den Vorzeichen der Eigenwerte ab.

a) $\lambda_- < \lambda_+ < 0$, also $D = \lambda_- \lambda_+ > 0$ und $S = \lambda_- + \lambda_+ < 0$. Dann gilt $0 < \frac{\lambda_+}{\lambda_-} < 1$, und wir erhalten das Phasenportrait a) auf Seite 113. Hier sind die Bahnen $\{(v_1^*(t,p), v_2^*(t,p)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ für gewisse $p \in V$ eingezeichnet. Der Pfeil zeigt die Richtung an, in der die Bahn durchlaufen wird. Der stationäre Punkt 0 dieses Phasenportraits heißt ein *stabiler Knotenpunkt*.

b) $\lambda_- < \lambda_+ = 0$, also $D = \lambda_- \lambda_+ = 0$ und $S = \lambda_- + \lambda_+ < 0$. Das zugehörige Phasenportrait ist Phasenportrait b) auf Seite 113. Die stationären Punkte auf der Ordinate nennen wir *stabile Strahlenendpunkte*.

c) $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, also $D = \lambda_- \lambda_+ < 0$. Dann gilt $\frac{\lambda_+}{\lambda_-} < 0$, und wir erhalten das Phasenportrait c) auf Seite 113. Der stationäre Punkt 0 dieses Phasenportraits heißt ein *Sattelpunkt*.

d) $0 = \lambda_- < \lambda_+$, also $D = \lambda_- \lambda_+ = 0$ und $S = \lambda_- + \lambda_+ > 0$. Das zugehörige Phasenportrait ist Phasenportrait d) auf Seite 113. Die stationären Punkte auf der Abzisse nennen wir *instabile Strahlenendpunkte*.

e) $0 < \lambda_- < \lambda_+$, also $D = \lambda_- \lambda_+ > 0$ und $S = \lambda_- + \lambda_+ > 0$. Dann gilt $\frac{\lambda_+}{\lambda_-} > 1$, und wir erhalten das Phasenportrait e) auf Seite 113. Der stationäre Punkt 0 dieses Phasenportraits heißt ein *instabiler Knotenpunkt*.

2. Fall: $S^2 = 4D$, also $\lambda_+ = \lambda_- =: \lambda \in \mathbb{R}$.

2.1. Fall: $\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) = 2$. Dann ist A diagonalisierbar, d.h. es existiert eine geordnete Basis (v_1, v_2) von V bzgl. der A die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ hat. Aus Satz 6.11 folgt, daß für alle $p = p_1 v_1 + p_2 v_2 \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(t,p) = \underbrace{p_1 \mathrm{e}^{\lambda t}}_{=: v_1^*(t,p)} v_1 + \underbrace{p_2 \mathrm{e}^{\lambda t}}_{=: v_2^*(t,p)} v_2,$$

also gilt im Falle $p_1 \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{\lambda} \ln\left(\tfrac{v_1^*(t,p)}{p_1}\right), \\ v_2^*(t,p) &= \tfrac{p_2}{p_1} v_1^*(t,p). \end{aligned}$$

Im Falle $p_1 = 0$ gilt des weiteren

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\, v_1^*(t,p) = 0 \wedge v_2^*(t,p) = p_2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

und im Falle $\lambda = 0$

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\, v_1^*(t,p) = p_1 \wedge v_2^*(t,p) = p_2.$$

f) $0 < \lambda$, also $D = \lambda^2 > 0$ und $S = 2\lambda < 0$. Das zugehörige Phasenportrait ist Phasenportrait f) auf Seite 113. Der stationäre Punkt 0 heißt *stabiler Fokuspunkt*.

g) $\lambda = 0$, also $A = 0$, $D = \lambda^2 = 0$ und $S = 2\lambda = 0$. In diesem Falle gilt $\mathcal{O}_p = \{p\}$ für alle $p \in V$.

h) $\lambda > 0$, also $D = \lambda^2 > 0$ und $S = 2\lambda > 0$. Das zugehörige Phasenportrait ist Phasenportrait h) auf Seite 114. Der stationäre Punkt 0 heißt *instabiler Fokuspunkt*.

2.2. Fall: $\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) = 1$. Dann ist A zumindest trigonalisierbar, d.h. es existiert eine geordnete Basis (v_1, v_2) von V bzgl. der A die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ hat. Aus 6.15 folgt, daß für alle $p = p_1 v_1 + p_2 v_2 \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(t,p) = \underbrace{p_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + p_2 t \mathrm{e}^{\lambda t}}_{=:v_1^*(t,p)} v_1 + \underbrace{p_2 \mathrm{e}^{\lambda t}}_{=:v_2^*(t,p)} v_2,$$

also gilt im Falle $p_2 \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{v_2^*(t,p)}{p_2}\right), \\ v_1^*(t,p) &= \frac{p_1}{p_2} v_2^*(t,p) + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{v_2^*(t,p)}{p_2}\right) v_2^*(t,p). \end{aligned}$$

Im Falle $p_2 = 0$ gilt des weiteren

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\, v_1^*(t,p) = p_1 \mathrm{e}^{\lambda t} \wedge v_2^*(t,p) = 0,$$

und im Falle $\lambda = 0$

$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\, v_1^*(t,p) = p_1 + t p_2 \wedge v_2^*(t,p) = p_2.$$

k) $\lambda < 0$, also $D = \lambda^2 > 0$ und $S = 2\lambda < 0$. Wir erhalten das Phasenportrait k) auf Seite 114. Der stationäre Punkt 0 heißt *entarteter stabiler Knotenpunkt*.

l) $\lambda = 0$, also $D = \lambda^2 = 0$ und $S = 2\lambda = 0$. Wir erhalten das Phasenportrait l) auf Seite 114.

m) $\lambda > 0$ also $D = \lambda^2 > 0$ und $S = 2\lambda > 0$. Wir erhalten das Phasenportrait m) auf Seite 114. Der stationäre Punkt 0 heißt *entarteter instabiler Knotenpunkt*.

3. Fall: $S^2 < 4D$, also $\lambda_+ = \overline{\lambda_-} = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Dann existiert eine geordnete Basis (v, w) von V bzgl. der A die Gestalt $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ hat, nämlich $v = \mathrm{Re}\, u$, $w = \mathrm{Im}\, u$, wobei $\{u\}$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathrm{Eig}(A_{\mathbb{C}}, \lambda_+)$ sei. Aus 6.14 folgt, daß für alle $p = p_1 v + p_2 w \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(t,p) = \underbrace{\mathrm{e}^{\alpha t}\left(p_1 \cos(\beta t) + p_2 \sin(\beta t)\right)}_{=:v^*(t,p)} v + \underbrace{\mathrm{e}^{\alpha t}\left(-p_1 \sin(\beta t) + p_2 \cos(\beta t)\right)}_{=:w^*(t,p)} w,$$

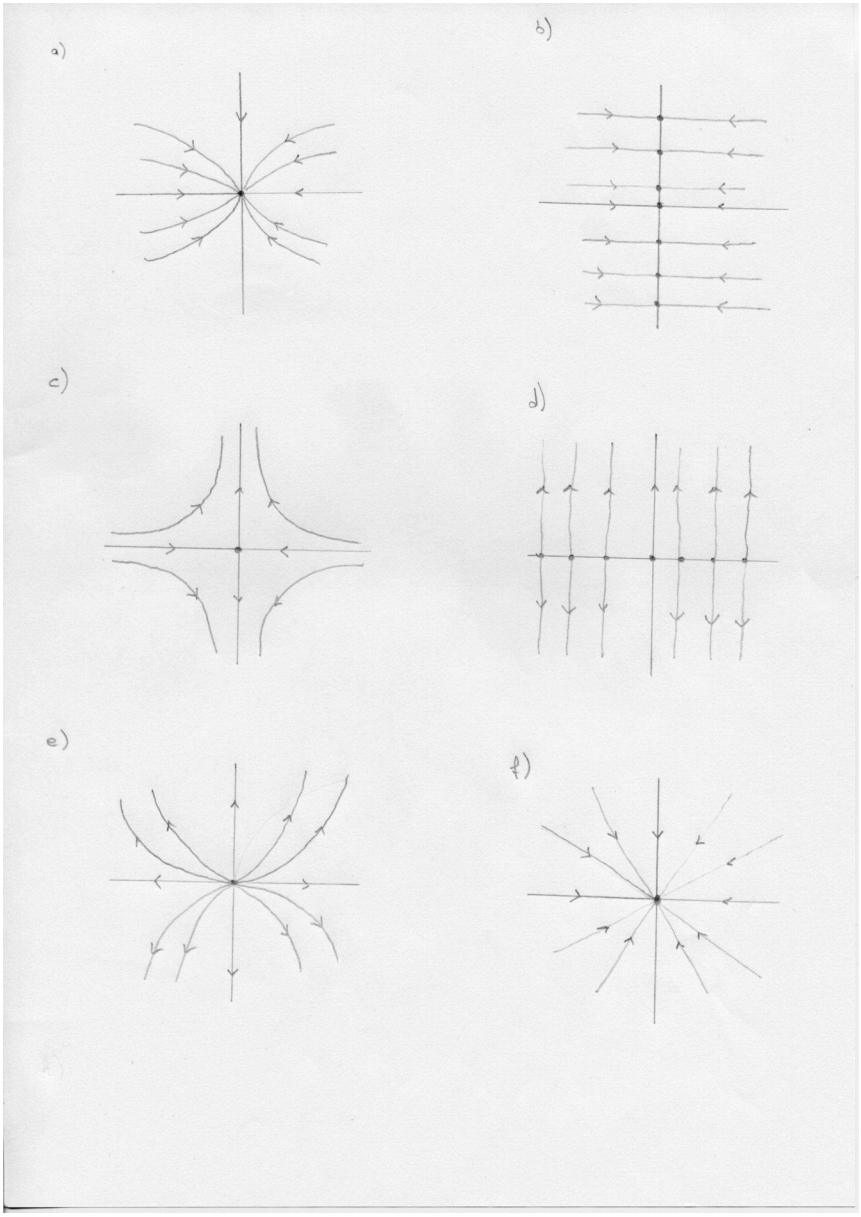
also gilt

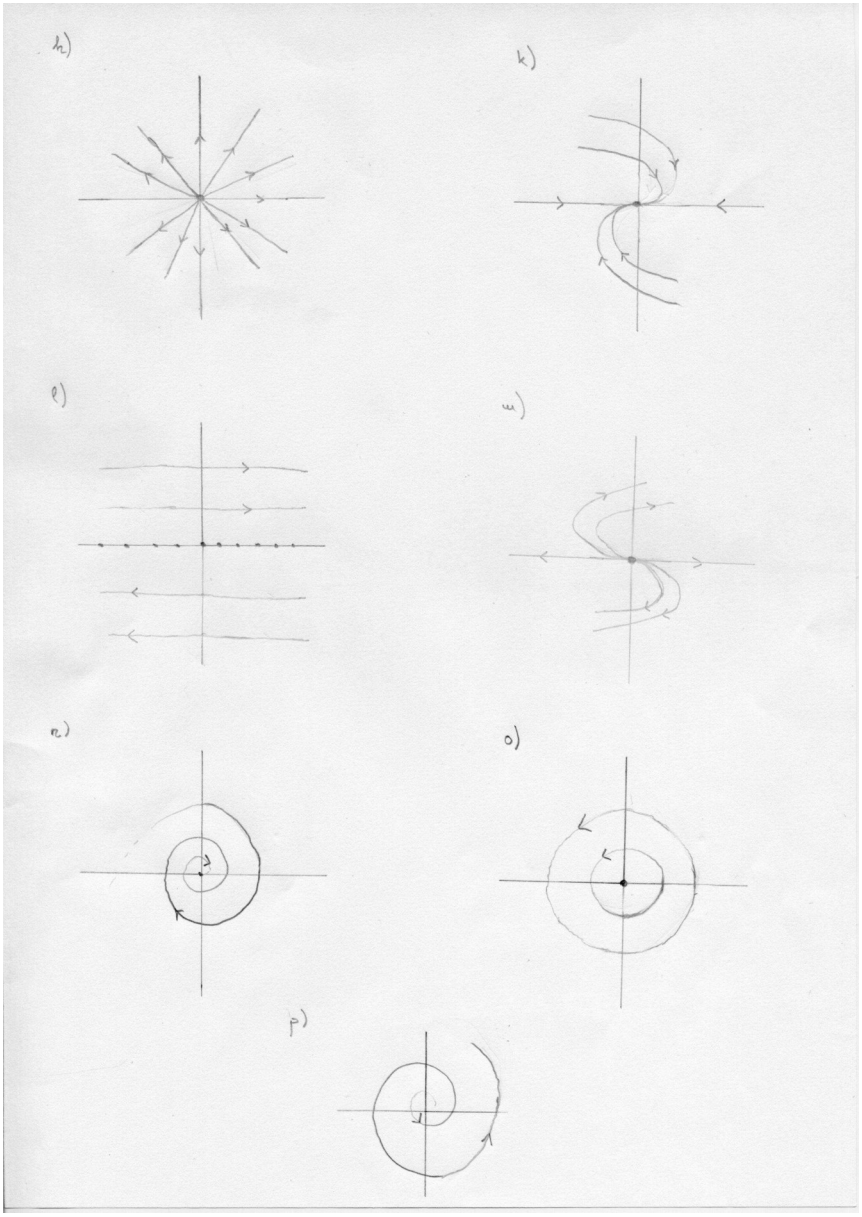
$$\begin{pmatrix} v^*(t,p) \\ w^*(t,p) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

n) $\alpha < 0$, also $D = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $S = 2\alpha < 0$. Wir erhalten das Phasenportrait n) auf Seite 114. Der stationäre Punkt 0 heißt *stabiles Strudelzentrum*.

o) $\alpha = 0$, also $D = \beta^2 > 0$ und $S = 2\alpha = 0$. Wir erhalten das Phasenportrait o) auf Seite 114. Der stationäre Punkt 0 heißt *Zentrum*.

p) $\alpha > 0$ also $D = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $S = 2\alpha > 0$. Wir erhalten das Phasenportrait p) auf Seite 114. Der stationäre Punkt 0 heißt *instabiles Strudelzentrum*.





Nachdem wir bei der Charakterisierung der obigen Phasenportraits[21] den Begriff der *Stabilität* bereits verwendet haben, wollen wir ihn im nächsten Kapitel expressis verbis definieren und studieren.

[21] Der Autor möchte an dieser Stelle anmerken, daß er für einen Hinweis darauf, wie die offensichtlich per manum erstellten Phasenportraits eleganter und dennoch einfach erstellt werden können, dankbar ist.

10 Stabilitätstheorie

Definition 10.1 ((Asymptotische) Stabilität)**.** Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $D \subset \mathbb{R}\times V$ und $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung. $\phi\colon [0,\infty[\to V$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)).} \tag{240}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und es gelte

$$S_\alpha := \{(t,v) \in [0,\infty[\times V \mid \|v - \phi(t)\| \le \alpha\} \subset D.$$

ϕ heißt $\left\{ \begin{array}{c} - \\ asymptotisch \end{array} \right\}$ *stabil*, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon \le \alpha$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta \le \alpha$ existiert derart, daß gilt:

Zu jedem $y_0 \in V$ mit $\|y_0 - \phi(0)\| < \delta$ gibt es eine Lösung $y\colon [0,\infty[\to V$ von (240) mit $y(0) = y_0$ und für jedes derartige y gilt

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall_{t\in[0,\infty[} \|y(t) - \phi(t)\| < \varepsilon \\ \forall_{t\in[0,\infty[} \|y(t) - \phi(t)\| < \varepsilon \wedge \lim_{t\to\infty} \|y(t) - \phi(t)\| = 0 \end{array} \right\}.$$

ϕ heißt *instabil*, wenn ϕ nicht stabil ist.

Bemerkung.

1.) Da je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum äquivalent sind, hängen die obigen Begriffe offenbar nicht von der speziellen Wahl der Norm von V ab.

2.) In der Stabilitätstheorie ist es üblich, Definitionen und Sätze für Lösungen $[0,\infty[\to V$ von (240) für $t \to \infty$ zu formulieren. Entsprechende Definitionen und Sätze für Lösungen $]-\infty, 0] \to V$ von (240) für $t \to -\infty$ lassen sich hierauf zurückführen, da offenbar gilt

$$\begin{aligned} &\phi(t)\colon J \longrightarrow V \text{ ist Lösung von (240)} \\ &\qquad \Longleftrightarrow \phi(-t)\colon -J \longrightarrow V \text{ ist Lösung von } z'(t) = -f(-t, z(t)). \end{aligned}$$

Analoge Bemerkungen sind für auf $[a,\infty[$ bzw. auf $]-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, definierte Lösungen von (240) zu machen.

3.) „Stabilität“ bedeutet also in etwa stetige Abhängigkeit der auf unendlich großen Intervallen definierter Lösungen von den Anfangswerten. Die auf kompakten Intervallen definierten Lösungen hängen nach 8.5 im Falle der Gültigkeit einer Lipschitzbedingung bzgl. y stets stetig von den Anfangswerten ab.

Beispiel 10.2. Wir betrachten hier den Fall $V = \mathbb{R}$.

a) Jede Lösung $[0,\infty[\to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = y(t)} \tag{241}$$

ist instabil.

b) Jede Lösung $[0,\infty[\to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = -y(t)} \tag{242}$$

ist asymptotisch stabil.

[Eine beliebige Lösung $\phi\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ von $\left\{ \begin{array}{c} (241) \\ (242) \end{array} \right\}$ ist von der Gestalt $\phi(t) = \phi(0)\,\mathrm{e}^{\{^+_-\}t}$. Für jede weitere Lösung $y\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ von $\left\{ \begin{array}{c} (241) \\ (242) \end{array} \right\}$, die zusätzlich $y_0 := y(0) \neq \phi(0)$ erfüllt, gilt $y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{\{^+_-\}t}$ und

$$\forall_{t\geq 0}\, |y(t) - \phi(t)| = |y_0 - \phi(0)|\,\mathrm{e}^{\{^+_-\}t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \infty \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Hieraus folgt im oberen Fall die Intabilität von ϕ und im unteren Fall die Stabilität ($\delta := \varepsilon$) und dann auch die asymptotische Stabilität von ϕ.]

Bemerkung. In b) wurde praktisch das asymptotische Verhalten von (241) in a) füt $t \to -\infty$ untersucht, vgl. Bemerkung 2.) in 10.1.

Unser erstes Ziel ist es nun, in 10.7 das asymptotische Verhalten der Lösungen eines linearen homogenen Differentialgleichungssystemes erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu studieren. Dies bereiten wir mittels der Resultate 10.3 bis 10.6 vor.

Satz 10.3.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $A \in \mathrm{End}(V)$ und $\delta \in \mathbb{R}$ mit*

$$\mathrm{Re}\,\lambda < \delta \text{ für alle Eigenwerte } \lambda \in \mathbb{C} \text{ von } A.$$

Beh.: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\exp(t\,A)}{\mathrm{e}^{\delta\,t}} = 0 \in \mathrm{End}(V)$.

Beweis. Wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß gilt

$$\mathrm{Re}\,\lambda < \alpha < \delta \text{ für alle Eigenwerte } \lambda \in \mathbb{C} \text{ von } A. \tag{243}$$

Wir wählen eine Norm $\|\ldots\|$ auf V, also sind auch $\mathrm{End}(V)$ und V^* mit den jeweiligen Operatornormen versehen. Es genügt zu zeigen, daß gilt

$$\exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{t\geq 0}\, \| \underbrace{e^{-\alpha\,t} \exp(t\,A)}_{=:B_t} \| \leq C. \tag{244}$$

[Denn aus (244) ergibt sich die Behauptung wegen $\alpha - \delta \overset{(243)}{<} 0$ folgendermaßen

$$\forall_{t\geq 0}\, \|e^{-\delta\,t} \exp(t\,A)\| = \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)\,t}\, \|e^{-\alpha\,t} \exp(t\,A)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ ]$$

Sei $n := \dim V$. Zum Beweis von (244) wiederum genügt der Nachweis der folgenden Aussage:

Es existiert eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,n\}} \exists_{C_j\in\mathbb{R}} \forall_{t\geq 0} \| \underbrace{e^{-\alpha t} \exp(t A)\, v_j}_{= B_t\, v_j} \| \leq C_j. \tag{245}$$

[Denn bezeichnet $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ die zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ duale Basis von V^*, so folgt aus (245) für jedes $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \forall_{w\in V} \|B_t\, w\| &= \left\| B_t \left(\sum_{j=1}^n v_j^*(w)\, v_j \right) \right\| \overset{B_j \text{ lin.}}{=} \left\| \sum_{j=1}^n v_j^*(w)\, B_t\, v_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|v_j^*(w)|}_{\leq \|v_j^*\|\,\|w\|} \|B_t\, v_j\| \overset{(245)}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n \|v_j^*\|\, C_j \right) \|w\|, \end{aligned}$$

also gilt (244) mit $C := \sum_{j=1}^n \|v_j^*\|\, C_j \in \mathbb{R}$ nach Definition der Operatornorm.]

(245) ist eine triviale Folge von

$$\forall_{v\in V} \left(\mathrm{e}^{-\alpha t} \exp(t A)\, v \right)|_{[0,\infty[} \colon [0, \infty[\longrightarrow V \text{ ist beschränkt.} \tag{246}$$

Nach 6.10 sind die Abbildungen

$$y \colon \mathbb{R} \longrightarrow V, \quad \forall_{t\in\mathbb{R}}\, y(t) = \exp(t A)\, v, \quad v \in V,$$

genau die maximalen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = A\, y(t). \tag{247}$$

Daher ist (246) äquivalent zu

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\, y(t)|_{[0,\infty[} \colon [0, \infty[\longrightarrow V \text{ ist beschränkt, falls } y \colon \mathbb{R} \longrightarrow V \text{ Lösung von (247).} \tag{248}$$

Nach 6.15 ist jede Lösung $y \colon \mathbb{R} \to V$ von (247) Linearkombination (mit reellen Koeffizienten) der Real- und Imaginärteile von Abbildungen der Gestalt

$$\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, \tilde{u}_j, \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \text{ und } \tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{n-1} \in V_{\mathbb{C}}.$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt $\tilde{u}_j = \tilde{v}_j + \mathrm{i}\, \tilde{w}_j$ mit $\tilde{v}_j, \tilde{w}_j \in V$ ($\tilde{v}_j = \tilde{w}_j = 0$ ist möglich), also

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, \tilde{u}_j &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, \tilde{v}_j - \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, \tilde{w}_j \\ &\quad + \mathrm{i} \left(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, \tilde{w}_j + \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, \tilde{v}_j \right). \end{aligned}$$

Somit ist jede Lösung $y\colon \mathbb{R} \to V$ von (247) auch Linearkombination von Abbildungen $z\colon \mathbb{R} \to V$ vom Typ

$$z(t) = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \end{array} \right\} \sum_{j=0}^{n-1} t^j w_j, \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A,\ w_0, \ldots, w_{n-1} \in V. \tag{249}$$

Daher folgt (248), wenn gezeigt ist, daß gilt

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\, z(t)|_{[0,\infty[}\colon [0,\infty[\longrightarrow V \text{ ist beschränkt für jedes } z\colon \mathbb{R} \longrightarrow V \text{ wie in (249).} \tag{250}$$

Zu (250): Für jedes $t \geq 0$ gilt

$$\left| \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t}) \end{array} \right\} \right| = \left| \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)\, t} \right| \left| \left\{ \begin{array}{c} \cos(\mathrm{Im}(\lambda)\, t) \\ \sin(\mathrm{Im}(\lambda)\, t) \end{array} \right\} \right| \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)\, t}$$

sowie

$$\left\| \sum_{j=0}^{n-1} t^j w_j \right\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|w_j\|\, t^j =: P(t),$$

und $P(t)$ ist eine ganz-rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, also ergibt sich

$$\left\| \mathrm{e}^{-\alpha t}\, z(t) \right\| \overset{(249)}{\leq} \frac{P(t)}{\mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{Re}\,\lambda)\, t}},$$

und die rechte Seite hiervon konvergiert wegen $\alpha - \mathrm{Re}\,\lambda \overset{(243)}{>} 0$ nach dem Satz von de l'Hospital für $t \to \infty$ gegen Null. Hieraus folgt offenbar (250). □

Lemma 10.4.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$ derart, daß ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit*

$$\mathrm{Re}\,\lambda \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \end{array} \right\} 0$$

existiert.
Beh.: *Es existiert eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to V$ der Differentialgleichung*

$$y'(t) = A\, y(t), \tag{251}$$

die für $t \to \infty$ $\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht beschränkt ist} \\ \text{nicht gegen 0 konvergiert} \end{array} \right\}$.

Zusatz. *Sind $\|\ldots\|$ eine beliebige Norm auf V und $\delta \in \mathbb{R}_+$ beliebig, so existiert eine Lösung y wie in der Behauptung mit*

$$\|y(0)\| < \delta.$$

Beweis. Sei $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wie in der Voraussetzung, also $\alpha \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \end{array} \right\} 0$. Dann ist λ auch ein Eigenwert von $A_{\mathbb{C}}$, also existiert $u \in V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $u = v_1 + \mathrm{i}\, v_2$, $v_1, v_2 \in V$, mit $A_{\mathbb{C}}\, u = \lambda\, u$. Nach 6.15 sind

$$\phi_1 := \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}),\ \phi_2 := \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t})\colon \mathbb{R} \to V$$

Lösungen von (251), und es gilt

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\,\phi_1(t)+\mathrm{i}\,\phi_2(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\,u=\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\,(v_1+\mathrm{i}\,v_2).$$

Es existiert eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ aus $\mathbb{R}_+$ mit

$$\lim_{k\to\infty} t_k=\infty\ \wedge\ \forall_{k\in\mathbb{N}_+}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t_k}=1,$$

nämlich z.B. $t_k:=k$ im Falle $\beta=0$ und $t_k:=\frac{2\pi}{|\beta|}k$ im Falle $\beta\neq 0$, also gilt insbesondere

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_+}\,\phi_1(t_k)+\mathrm{i}\,\phi_2(t_k)=\mathrm{e}^{\alpha t_k}\,v_1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\alpha t_k}\,v_2.$$

Wegen $0\neq u=v_1+\mathrm{i}\,v_2$ existiert $j\in\{1,2\}$ mit $v_j\neq 0$, d.h. $\forall_{k\in\mathbb{N}_+}\,\phi_j(t_k)=\mathrm{e}^{\alpha t_k}\,v_j$ sowie $\lim_{k\to\infty} t_k=\infty$, also $\lim_{k\to\infty}\mathrm{e}^{\alpha t_k}=\left\{\begin{array}{c}\infty\\1\end{array}\right\}$. Daher erfüllen ϕ_j und ebenso dann auch $s\,\phi_j$ für jedes („noch so kleine“) $s\in\mathbb{R}_+$ die Behauptung, womit Lemma und ebenfalls der Zusatz bewiesen ist. □

Satz 10.5.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A\in\mathrm{End}(V)$.*
Beh.: *Es gilt genau dann für jede Lösung $\phi\colon\mathbb{R}\to V$ der Differentialgleichung*

$$y'(t)=A\,y(t) \tag{252}$$

$\lim_{t\to\infty}\phi(t)=0$, *wenn alle Eigenwerte von A einen Realteil <0 haben.*

Beweis. „⇒“ Existierte ein Eigenwert $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$, so folgte aus 10.4 sofort ein Widerspruch.

„⇐“ Sei $\phi\colon\mathbb{R}\to V$ eine Lösung von (252), also gilt nach 6.10 mit $y_0:=\phi(0)$

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\,\phi(t)=\exp(t\,A)\,y_0. \tag{253}$$

Nach 10.3 (mit $\delta=0$) gilt

$$\lim_{t\to\infty}\exp(t\,A)=0,$$

und die *Einsetzungsabbildung*

$$\mathrm{End}(V)\longrightarrow V,\quad B\longmapsto B\,y_0$$

ist als lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen stetig. Somit gilt auch

$$\lim_{t\to\infty}\exp(t\,A)\,y_0=0\,y_0=0,$$

womit die linke Seite wegen (253) gezeigt ist. □

Lemma 10.6.
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A\in\mathrm{End}(V)$. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$y'(t)=A\,y(t). \tag{254}$$

Beh.: *Es sind alle Lösungen* $\phi\colon [0,\infty[\to V$ *von (254)* $\left\{ \begin{array}{c} \\ \bar{} \\ \textit{asymptotisch} \end{array} \right\}$ *stabil genau dann, wenn die Nullösung* $0\colon [0,\infty[\to V$ *von (254)* $\left\{ \begin{array}{c} \\ \bar{} \\ \textit{asymptotisch} \end{array} \right\}$ *stabil ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ ist trivial.

„$\Leftarrow$“ Sei $\phi\colon [0,\infty[\to V$ eine Lösung von (254). Weiterhin sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V. Nach Voraussetzung existiert dazu eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für jedes $\tilde{y}_0 \in V$ mit $\|\tilde{y}_0\| < \delta$ und die eindeutig bestimmte Lösung $\tilde{y}\colon [0,\infty[\to V$ von (254) mit $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ gilt

$$\forall_{t\geq 0}\, \|\tilde{y}(t)\| < \varepsilon \left\{ \begin{array}{c} \\ \text{und } \bar{\lim}_{t\to\infty} \|\tilde{y}(t)\| = 0 \end{array} \right\}.$$

Dann folgt auch (mit demselben δ) für jedes $y_0 \in V$ mit $\|y_0 - \phi(0)\| < \delta$, falls $\tilde{y}_0 := y_0 - \phi(0)$ und $\tilde{y}$ zu $\tilde{y}_0$ wie oben gewählt ist:

$y := \tilde{y} + \phi\colon [0,\infty[\to V$ ist die eindeutig bestimmte Lösung von (254) mit $y(0) = \tilde{y}_0 + \phi(0) = y_0$, und es gilt

$$\forall_{t\geq 0}\, \|y(t) - \phi(t)\| = \|\tilde{y}(t)\| < \varepsilon \left\{ \begin{array}{c} \\ \text{und } \bar{\lim}_{t\to\infty} \|\tilde{y}(t) - \phi(t)\| = 0 \end{array} \right\}.$$

Damit haben wir das Lemma bewiesen. □

Hauptsatz 10.7 ((In-)Stabilitätssatz für lineare homogene Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten)**.**
Vor.: *Seien* V *ein endlich-dimensionaler* $\mathbb{R}$*-Vektorraum und* $A \in \mathrm{End}(V)$*. Wir setzen*

$$\gamma := \max\{\mathrm{Re}\,\lambda \,|\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ } \textit{Eigenwert von } A\}.$$

Beh.: *Jede Lösung* $\phi\colon [0,\infty[\to V$ *der Differentialgleichung*

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t)} \tag{255}$$

ist

- *instabil, falls* $\gamma > 0$*,*
- *nicht asymptotisch stabil, falls* $\gamma = 0$*,*
- *asymptotisch stabil, insbesondere stabil, falls* $\gamma < 0$*.*

Bemerkung. Im Falle $\gamma = 0$ kann $\phi = 0$ sowohl stabil als auch instabil sein, wie die beiden folgenden Beispiele für den Fall $V = \mathbb{R}^2$ zeigen.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trivialerweise ist 0 der einzige Eigenwert von A. Jede Lösung $y\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ von (255) ist konstant, also ist $\phi = 0$ offenbar stabil (mit $\delta = \varepsilon$ in Definition 10.1).

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 0 ist wieder der einzige Eigenwert von A. Für jedes („noch so kleine“) $\delta \in \mathbb{R}_+$ ist $y\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$y(t) := \frac{\delta}{2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

Lösung von (255) mit $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$, die nicht beschränkt ist, also ist $\phi = 0$ offenbar nicht stabil.

Beweis. Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ für V. Sei $\phi\colon [0,\infty[\to V$ eine Lösung von (255). Wegen 10.6 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\phi = 0$ gilt.

1. Fall: $\gamma \left\{ \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \right\} 0$. Nach Definition von γ existiert dann ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A mit $\operatorname{Re}\lambda = \gamma \left\{ \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \right\} 0$. Wir werden zeigen: Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert kein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für $\phi = 0$ die Definition der $\left\{ \begin{matrix} \text{Stabilität} \\ \text{asymptotischen Stabilität} \end{matrix} \right\}$ erfüllt ist.

Beweis hiervon: Sei $\delta \in \mathbb{R}_+$ („beliebig klein“). Nach 10.4 einschließlich Zusatz existiert eine Lösung $y\colon [0,\infty[\to V$ von (255) mit $\|y(0) - \underbrace{\phi(0)}_{=0}\| < \delta$, die für $t \to \infty$ $\left\{ \begin{matrix} \text{nicht beschränkt ist} \\ \text{nicht gegen 0 konvergiert} \end{matrix} \right\}$ und damit nicht die Eigenschaft

$$\left\{ \begin{matrix} \forall_{t\geq 0}\, \|y(t) - \overbrace{\phi(t)}^{=0}\| < 1 = \varepsilon \\ \lim_{t\to\infty} \|y(t) - \underbrace{\phi(t)}_{=0}\| = 0 \end{matrix} \right\}$$

hat.

2. Fall: $\gamma < 0$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vorgegeben. Nach 10.3 (mit $\delta = 0$) gilt

$$\lim_{t\to\infty} \exp(t\,A) = 0 \in \operatorname{End}(V).$$

Daher existiert wegen der Stetigkeit von $[0,\infty[\to \operatorname{End}(V)$, $t \mapsto \exp(t\,A)$ eine Zahl $C \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t\geq 0}\, \|\exp(t\,A)\| \leq C.$$

Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{C} \in \mathbb{R}_+$. Für jedes $y_0 \in V$ mit $\|y_0 - \underbrace{\phi(t)}_{=0}\| < \delta$ ist die einzige Lösung $y\colon [0,\infty[\to V$ von (255) mit $y(0) = y_0$ nach 6.10 gegeben durch

$$\forall_{t\geq 0}\, y(t) = \exp(t\,A)\, y_0,$$

und es gilt

$$\forall_{t\geq 0}\, \|y(t) - \underbrace{\phi(t)}_{=0}\| = \|\exp(t\,A)\, y_0\| \leq \underbrace{\|\exp(t\,A)\|}_{\leq C}\ \underbrace{\|y_0\|}_{<\delta} < \varepsilon$$

sowie nach 10.5 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - \underbrace{\phi(t)}_{=0}\| = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $\phi = 0$ asymptotisch stabil ist. □

Wir wollen im folgenden wesentliche Teile von 10.7 verallgemeinern, indem wir Differentialgleichungen

$$y'(t) = \underbrace{Ay(t) + g(t, y(t))}_{=:f(t,y(t))}$$

mit einer *Inhomogenität* g betrachten. Der lineare Anteil Ay soll dabei der *Hauptteil von* f sein, d.h. im wesentlichen: Für kleines $\|y\|$ soll $\|g(t,y)\|$ „klein" sein verglichen mit $\|Ay\|$.

Hauptsatz 10.8 ((In-)Stabilitätssatz für Differentialgleichungen mit linearem Hauptteil)**.**
Vor.: *Es seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum sowie $A \in \mathrm{End}(V)$. Wir setzen*

$$\gamma := \max\{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A\}.$$

Sei $D \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge derart, daß $\alpha \in \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$S_\alpha := \{(t,v) \in \mathbb{R} \times V \mid t \in [0,\infty[\ \wedge\ \|v\| \le \alpha\} \subset D,$$

und sei $g\colon D \to V$, $(t,v) \mapsto g(t,v)$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{v\to 0\\ v\neq 0}} \frac{\|g(t,v)\|}{\|v\|} = 0 \text{ gleichmäßig für } t \in [0,\infty[,$$

letzteres heißt per definitionem

$$\forall_{\rho\in\mathbb{R}_+}\, \exists_{\mu\in\mathbb{R}_+,\mu\le\alpha}\, \forall_{v\in V\setminus\{0\},\|v\|\le\mu}\, \forall_{t\in[0,\infty[}\ \frac{\|g(t,v)\|}{\|v\|} \le \rho. \tag{256}$$

(Die Bedingung (256) ist offenbar unabhängig von der speziellen Wahl der Norm auf V.)

Aus (256) folgt insbesondere[22]

$$\forall_{t\in[0,\infty[}\, g(t,0) = 0,$$

also ist $\phi = 0\colon [0,\infty[\to V$ Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t)).} \tag{257}$$

[22] Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $V \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ und $\|v_n\| \le \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der Stetigkeit von g und (256)

$$\forall_{t\in[0,\infty[}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \underbrace{\|g(t,v_n)\|}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|g(t,0)\|} = \frac{\|g(t,v_n)\|}{\|v_n\|}\,\|v_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $g(t,0) = 0$ für alle $t \in [0,\infty[$.

Beh.:

(i) Im Falle $\gamma < 0$ ist die triviale Lösung $\phi = 0$ von (257) asymptotisch stabil, insbesondere stabil.

(ii) Im Falle $\gamma > 0$ ist die triviale Lösung $\phi = 0$ von (257) instabil.

Beweis. Zu (i): Sei also $\gamma < 0$. Wähle

$$\beta \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } \gamma < -\beta < 0. \tag{258}$$

Nach 10.3 folgt wegen $\operatorname{Re}\lambda \leq \gamma \overset{(258)}{<} -\beta$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\exp(tA)}{\mathrm{e}^{-\beta t}} = 0,$$

also existiert offenbar aus Stetigkeitsgründen

$$C \in \mathbb{R}_+, C \geq 1, \text{ mit } \forall_{t\geq 0} \|\exp(tA)\| \leq C\,\mathrm{e}^{-\beta t}. \tag{259}$$

Nach (256) existiert zu $\rho := \frac{\beta}{2C} \in \mathbb{R}_+$ ein

$$\mu \in \mathbb{R}_+, \mu \leq \alpha, \text{ mit } \forall_{v\in V, \|v\|\leq\mu} \forall_{t\in[0,\infty[} \|g(t,v)\| \leq \frac{\beta}{2C}\|v\|. \tag{260}$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon \leq \alpha$ beliebig vorgegeben vorgegeben, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß gilt

$$\varepsilon < \min\{\mu, \alpha\}. \tag{261}$$

Wir müssen (nach Definition 10.1) ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta \leq \alpha$ finden derart, daß gilt:

$$\begin{gathered}\text{Zu jedem } y_0 \in V \text{ mit } \|y\| < \delta \text{ gibt es eine Lösung } y\colon [0,\infty[\longrightarrow V \text{ von} \\ (257) \text{ mit } y(0) = y_0 \text{ und für jedes derartige } y \text{ gilt} \\ \forall_{t\in[0,\infty[} \|y(t)\| < \varepsilon \wedge \lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = 0.\end{gathered} \tag{262}$$

Wir setzen

$$\delta := \min\left\{\mu, \frac{\varepsilon}{C}\right\} \in \mathbb{R}_+, \text{ also } \delta \leq \frac{\varepsilon}{C} \overset{(259)}{\leq} \varepsilon \overset{(261)}{<} \alpha, \tag{263}$$

und werden zeigen, daß dann (262) gilt.

Sei also $y_0 \in V$ mit

$$\|y_0\| < \delta \ (\overset{(263)}{<} \mu). \tag{264}$$

Nach dem globalen Existenzsatz von Peano 3.10 (i) existiert eine maximale Lösung $\tilde{y}\colon]a,b[\to V$ von (257) mit $\tilde{y}(0) = y_0$, wobei $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, also $\tilde{y}|_{[0,b[}\colon [0,b[\to V$ nach rechts maximale Lösung. Sei nun $y : [0,b[\to V$ mit $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ eine beliebige derartige nach rechts maximale Lösung von (257) mit $y(0) = y_0$. Dann folgt:

$$\forall_{t_1\in]0,b[} \left(\forall_{t\in[0,t_1]} \|y(t)\| \leq \mu \Longrightarrow \forall_{t\in[0,t_1]} \|y(t)\| \leq \underbrace{\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}}_{\overset{(258)}{\leq}\ \varepsilon\ \overset{(261)}{<}\ \min\{\mu,\alpha\}}\right). \tag{265}$$

[Zu (265): Sei also $t \in]0,b[$ mit

$$\forall_{t\in[0,t_1]\subset[0,b[} \|y(t)\| \leq \mu \overset{(260)}{(<} \alpha). \tag{266}$$

Die stetige Abbildung $h\colon [0,t_1] \to V$ sei definiert durch

$$h(t) := g(t,y(t)).$$

Aus

$$\forall_{t\in[0,t_1]}\, y'(t) = A\,y(t) + h(t), \quad y(0) = y_0$$

folgt nach 6.10

$$\forall_{t\in[0,t_1]}\, y(t) = \exp(t\,A)\,y_0 + \underbrace{\exp(t\,A)\int_0^t \exp(-s\,A)\,h(s)\,\mathrm{d}s}_{= \int_0^t \underbrace{\exp(t\,A)\,\exp(-s\,A)}_{\overset{6.8(iii)c)}{=} \exp((t-s)\,A)} \underbrace{h(s)}_{= g(s,y(s))}\,\mathrm{d}s},$$

also wegen (51) und $\|y(s)\| \overset{(266)}{<} \mu$

$$\forall_{t\in[0,t_1]}\, \|y(t)\| \leq \underbrace{\|\exp(\overbrace{t}^{\geq 0}\,A)\|}_{\overset{(259)}{\leq} C\,\mathrm{e}^{-\beta t}} \underbrace{\|y_0\|}_{\overset{(264)}{<} \delta \overset{(263)}{\leq} \frac{\varepsilon}{C}} + \int_0^t \underbrace{\|\exp((t-s)\,A)\|}_{\overset{(259)}{\leq} C\,\mathrm{e}^{-\beta\,(t-s)}} \underbrace{\|g(s,y(s))\|}_{\overset{(260)}{\leq} \frac{\beta}{2C}\|y(s)\|}\,\mathrm{d}s,$$

also auch

$$\forall_{t\in[0,t_1]}\, \underbrace{\mathrm{e}^{\beta t}\,\|y(t)\|}_{=:\varphi(t)} \leq \varepsilon + \frac{\beta}{2}\int_0^t \underbrace{\mathrm{e}^{\beta s}\,\|y(s)\|}_{=\varphi(s)}\,\mathrm{d}s,$$

also ist $\varphi\colon [0,t_1] \to V$ stetig.

Nach dem Lemma von Gronwall 9.3 folgt hieraus

$$\forall_{t\in[0,t_1]}\, \underbrace{\mathrm{e}^{\beta t}\,\|y(t)\|}_{=\varphi(t)} \leq \varepsilon\,\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}t},$$

d.h.

$$\forall_{t\in[0,t_1]}\, \|y(t)\| \leq \varepsilon\,\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}t}.$$

Damit ist (265) bewiesen.]

Aus (265) folgt

$$\forall_{t\in[0,b[}\, \|y(t)\| < \mu. \tag{267}$$

[Zu (267): Es gilt $\|y(0)\| = \|y_0\| \overset{(264)}{<} \mu$. Angenommen (267) ist falsch. Dann existiert aus Stetigkeitsgründen ein $t_1 \in]0,b[$ mit $\|y(t)\| < \mu$ für alle $t \in [0,t_1[$ mit

$$\forall_{t\in[0,t_1[}\, \|y(t)\| < \mu \text{ und } \|y(t_1)\| = \mu.$$

Dann folgt weiter aus (265)

$$\|y(t_1)\| \le \varepsilon\, \mathrm{e}^{\frac{-\beta}{2}t_1} < \varepsilon \overset{(261)}{<} \mu,$$

also $\|y(t_1)\| < \mu$, im Widerspruch zu zu $\|y(t_1)\| = \mu$.]

Aus (267), (265) folgt

$$\forall_{t\in[0,b[}\, \|y(t)\| = \varepsilon\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \overset{(261)}{<} \alpha, \text{ insbes. } \underbrace{(t,y(t))}_{=(\mathrm{Graph}\, y)(t)} \in S_\alpha \subset D \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}\times V. \quad (268)$$

Nach 3.10 (iii) läuft $\mathrm{Graph}\, y$ füt $t \to b-$ aus jeder kompakten Teilmenge von D heraus, also folgt aus (268) offenbar zunächst[23]

$$b = \infty$$

und sodann (wegen $\|y(0)\| = \|y_0\| \overset{(264)}{<} \delta \overset{(263)}{\le} \varepsilon$, also $\|y(0)\| < \varepsilon$)

$$\forall_{t\in[0,\infty[}\, \|y(t)\| < \varepsilon \text{ und } \lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = 0.$$

Damit ist (262) bewiesen.

Zu (ii): Seien jetzt $\gamma > 0$ und $n := \dim_{\mathbb{R}} V$. Zunächst skizzieren wir die Vorgehensweise des Nachweises von (ii):

1.) Übergang zu der „komplexifizierten“ $V_{\mathbb{C}}$-wertigen Differentialgleichung

$$\tilde{y}'(t) = A_{\mathbb{C}}\, \tilde{y}(t) + \tilde{g}(t,\tilde{y}(t)). \quad (269)$$

2.) Wahl eines geeigneten $\mathbb{C}$-Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{C}^n \to V_{\mathbb{C}}$, welcher die Differentialgleichung in eine äquivalente „einfachere“ $\mathbb{C}^n$-wertigen Differentialgleichung

$$z'(x) = B\, z(t) + h(t,z(t)) \quad (270)$$

überführt. Hierbei gehen die Voraussetzung $\gamma > 0$ und der Satz der Linearen Algebra über die Jordansche Normalform ein.

3.) Beweis, daß die triviale Lösung $z = 0$ von (270) instabil ist.

4.) Folgerung, daß die Lösung $y = 0$ von (257) instabil ist.

Nun wollen wir die o.g. Schritte konkret darstellen. Dem Leser wird empfohlen, sich zum Verständnis einiger der folgenden Begründungen erneut 6.12 über die Komplexifizierung reeller Vektorräume und Abbildungen zu Gemüte zu führen.

[23] Denn im Falle $b \in \mathbb{R}_+$ wäre $\{(t,v) \in \mathbb{R}\times V \,|\, t \in [0,b] \wedge \|v\| \le \alpha\} \subset S_\alpha \subset D$ kompakt.

Zu 1.) Es gilt $\gamma > 0$. Wir notieren im folgenden mit

$$\widetilde{V} := V_{\mathbb{C}} \text{ den } n\text{-dimensionalen } \mathbb{C}\text{-Vektorraum } \widetilde{V} = V + \mathrm{i}V$$

und die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\widetilde{A} := A_{\mathbb{C}}, \text{ für die u.a. gilt } \forall_{v\in V}\, \widetilde{A}\, v = A\, v.$$

$\widetilde{A}$ hat dieselben Eigenwerte wie A, also gilt auch

$$\gamma = \max\{\operatorname{Re}\lambda \,|\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } \widetilde{A}\} > 0.$$

$\widetilde{V}$ ist als $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum normiert durch

$$\forall_{v,w\in V}\, \|v + \mathrm{i}\, w\| := \|v\| + \|w\|.$$

$\widetilde{D} := \{(t, v + \mathrm{i}\, w) \in \mathbb{R} \times \widetilde{V} \,|\, v, w \in V \wedge (t, v), (t, w) \in D\}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \widetilde{V}$, und es gilt

$$\widetilde{S}_\alpha := \{(t, v + \mathrm{i}\, w) \in \mathbb{R} \times \widetilde{V} \,|\, t \in [0, \infty[\wedge\, v, w \in V \wedge \|v + \mathrm{i}\, w\| \le \alpha\} \subset \widetilde{D}.$$

$\tilde{g}\colon \widetilde{D} \to \widetilde{V}$, definiert durch

$$\forall_{(t,v+\mathrm{i}w)\in\widetilde{D},\, v,w\in V}\, \tilde{g}(t, v + \mathrm{i}\, w) = g(t, v) + \mathrm{i}\, g(t, w),$$

ist stetig und hat die Eigenschaft

$$\forall_{\rho\in\mathbb{R}_+}\, \exists_{\mu\in\mathbb{R}_+,\mu\le\alpha}\, \forall_{v+\mathrm{i}\,w\in\widetilde{V}\setminus\{0\},\, v,w\in V,\, \|v+\mathrm{i}\,w\|\le\mu}\, \forall_{t\in[0,\infty[}\ \frac{\|\tilde{g}(t, v + \mathrm{i}\, w)\|}{\|v + i\, w\|} \le \rho. \tag{271}$$

[Zu (271): Sei $\rho \in \mathbb{R}_+$ und sei hierzu $\mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\mu \le \alpha$ gemäß (256) gewählt. Dann folgt für alle $v + \mathrm{i}\, w \in \widetilde{V} \setminus \{0\}$, $v, w \in V$, $\|v + \mathrm{i}\, w\| \le \mu$ und alle $t \in [0, \infty[$, daß gilt $\|v\| \le \mu$ und $\|w\| \le \mu$ und daher

$$\|\tilde{g}(t, v + \mathrm{i}\, w)\| = \|g(t, v)\| + \|g(t, w)\| \overset{(256)}{\le} \rho\,(\|v\| + \|w\|) = \rho\, \|v + \mathrm{i}\, w\|,$$

womit (271) gezeigt ist.]

Für jedes $t \ge 0$ gilt

$$\tilde{g}(t, \overbrace{0}^{0+\mathrm{i}\,0\in\widetilde{V}}) = g(t, 0) + \mathrm{i}\, g(t, 0) \overset{\text{siehe Vor.}}{=} 0,$$

also ist $\phi = 0\colon [0, \infty[\to \widetilde{V}$ Lösung der Differentialgleichung (269), d.h. Lösung von

$$\tilde{y}'(t) = \widetilde{A}\, \tilde{y}(t) + \tilde{g}(t, \tilde{y}(t)).$$

Sei $\tilde{y}\colon [0, b[\longrightarrow \widetilde{V}$ mit $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Für jedes $t \in [0, b[$ schreiben wir $\tilde{y}(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$, wobei $x, y\colon [0, b[\longrightarrow V$ seien. Dann folgt

(272)

$\tilde{y}(t)$ ist Lösung von (269)

$\quad \Longleftrightarrow x(t) = \operatorname{Re}\tilde{y}(t)$ und $y(t) = \operatorname{Im}\tilde{y}(t)$ sind Lösungen von (257).

[Zu (272): Die linke Seite besagt genau

$$\forall_{t\in[0,b[} \quad \underbrace{\tilde{y}'(t)}_{=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)} \;=\; \underbrace{\widetilde{A}\,\tilde{y}'(t)}_{=A\,x(t)+i\,A\,y(t)} \;+\; \underbrace{\tilde{g}(t,\tilde{y}(t))}_{=g(t,y(t))+\mathrm{i}\,g(t,y(t))}$$

also genau die rechte Seite.]

Zu 2.) Seien $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_n)$ die Eigenwerte von A – also von $\widetilde{A}$ –, welche *lexikographisch geordnet*[24] seien. Hierbei sei jeder Eigenwert so oft aufgeführt, wie es seiner algebraischen Vielfachheit entspricht derart, daß gilt

$$\begin{array}{ll} \forall_{j\in\{1,\ldots,p\}} & \mathrm{Re}\,\lambda_j > 0, \quad \text{es gilt übrigens } p \geq 1, \text{ da } \gamma > 0, \\ \forall_{j\in\{p+1,\ldots,n\}} & \mathrm{Re}\,\lambda_j \leq 0. \end{array} \tag{273}$$

Nach dem Satz von der Jordanschen Normalform existiert jetzt eine geordnete Basis $(\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_n)$ des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\widetilde{V}$ derart, daß die die Matrix $\widetilde{B} = \left(\tilde{b}_{rs}\right)_{r,s\in\{1,\ldots,n\}}$ von $\widetilde{A}$ bzgl. $(\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_n)$ vom Typus der anfangs in 6.15 beschriebenen Art ist. Es gilt also $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & & 0 \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, wobei auf der Diagonalen oberhalb der Hauptdiagonalen jeweils nur entweder Null oder Eins stehen kann.

Wir setzen für jedes $r \in \{1,\ldots,n\}$ die Zahl $\delta_r := 1$, falls die r-te Zeile von $\widetilde{B}$ nicht die letzte Zeile eines Jordan-Kastens J_j wie in 6.15 ist, andernfalls setzen wir $\delta_r := 0$. Ferner seien

$$I_1 := \{r \in \{1,\ldots,n\} \,|\, \delta_r = 1\} \quad \text{und} \quad I_2 := \{r \in \{1,\ldots,n\} \,|\, \delta_r = 0\}.$$

Dann gilt offenbar

$$\forall_{r,s\in\{1,\ldots,n\}}\, \tilde{b}_{rs} = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_r, & r = s, \\ \delta_r, & s = r+1 \leq n, \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}, \quad I_1 \cup I_2 = \{1,\ldots,n\}, \quad p,n \in I_2. \tag{274}$$

Nach (273) können wir

$$\eta \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } \forall_{j\in\{1,\ldots,p\}}\, \mathrm{Re}\,\lambda_j > 6\,\eta \tag{275}$$

wählen und setzen

$$\forall_{r\in\{1,\ldots,n\}}\, u_r := \eta^r\, \tilde{u}_r. \tag{276}$$

Dann ist auch $\{u_1,\ldots,u_n\}$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\widetilde{V}$. Sei $\{u_1^*,\ldots,u_n^*\}$ die zu $\{u_1,\ldots,u_n\}$ duale Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $V^* = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{C})$. Man hat dann einen

$\mathbb{C}$-Vektorraum-Isomorphismus

$$u^*\colon \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad u \longmapsto u^*(u) := (u_1^*(u),\ldots,u_n^*(u)), \tag{277}$$

dessen Umkehrabbildung $(u^*)^{-1}\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \widetilde{V}$ gegeben ist durch

$$\forall_{a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n}\, (u^*)^{-1}(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_r\, u_r.$$

[24] das bedeutet per definitionem, daß die Eigenwerte mit absteigendem Realteil und bei demselben solchen mit abnehmendem Imaginärteil angeordnet sind

Der stetigen Abbildung $\tilde{g}\colon \widetilde{D} \to \widetilde{V}$, die auf der in $\mathbb{R} \times \widetilde{V}$ offenen Teilmenge $\widetilde{D}$ definiert ist, korrespondiert unter der Isomorphie (277) die stetige Abbildung

$$h = (h_1, \ldots, h_n)\colon \widetilde{\widetilde{D}} \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad h(t,a) := u^* \left(\tilde{g}(t, (u^*)^{-1}(a)) \right),$$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{V} & \xrightarrow{\quad u^* \quad} & \mathbb{C}^n \\ \Big\uparrow \tilde{g} & & \Big\uparrow h \\ \underbrace{\widetilde{D}}_{\subset \mathbb{R} \times \widetilde{V}} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times u^*} & \underbrace{\widetilde{\widetilde{D}}}_{\subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n} \end{array}$$

wobei $\widetilde{\widetilde{D}}$ als Bild von $\widetilde{D}$ unter dem $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times u^*\colon \mathbb{R} \times \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$$

offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ist.

Wir betrachten $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der euklidischen Norm, d.h.

$$\forall_{a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n} \|a\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2} = \sqrt{a_1\,\overline{a_1} + \cdots + a_n\,\overline{a_n}}.$$

Dann folgt offenbar aus den entsprechenden Aussagen über $\widetilde{D}$ und $\tilde{g}$ vor (271) sowie (271) zum einen die Existenz einer Zahl $\beta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\{(t,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \,|\, t \in [0,\infty[\,\wedge\, \|a\| \leq \beta\} \subset \widetilde{\widetilde{D}},$$

und zum anderen zu $\eta \in \mathbb{R}_+$ wie in (275) die Existenz einer Zahl $\xi \in \mathbb{R}_+$ derart, daß gilt

$$\xi \in \,]0,b] \text{ und } \forall_{a\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\, \|a\|\leq\xi} \forall_{t\in[0,\infty[} \frac{\|h(t,a)\|}{\|a\|} \leq \eta. \tag{278}$$

Seien $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\tilde{y}\colon [0,b[\longrightarrow \widetilde{V}$ und $z\colon : [0,b[\longrightarrow \mathbb{C}^n$ definiert durch

$$\underbrace{z(t)}_{=(z_1(t),\ldots,z_n(t))} := u^*(\tilde{y}(t)). \tag{279}$$

Dann folgt

$$\tilde{y}(t) \text{ ist Lösung von } (269) \Longleftrightarrow z(t) \text{ ist Lösung von } (270),$$

wobei (270) sich jetzt folgendermaßen schreibt

$$\forall_{r\in\{1,\ldots,n\}} z_r'(t) = \lambda_r\, z_r(t) + \eta\, \delta_r\, z_{r+1}(t) + h_r(t, z(t)), \tag{280}$$

d.h. $z'(r) = B\, z(t) + h(t, z(t))$, wobei $B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ diejenige Matrix ist, die man aus $\widetilde{B}$ erhält, wenn man in der Diagonalen oberhalb der Hauptdiagonalen jede Eins durch η ersetzt.

[Zu (279): Es gilt

$$\tilde{y}(t) = (u^*)^{-1}(z(t)) \overset{(277)}{=} \sum_{r=1}^{n} z_r(t)\, u_r \text{ und somit } \tilde{y}'(t) = \sum_{r=1}^{n} z_r'(t)\, u_r,$$

also ist $\tilde{y}$ Lösung von (269) genau dann, wenn folgendes gilt:

$$\sum_{r=1}^{n} z_r'(t)\, u_r = \widetilde{A}\left(\sum_{s=1}^{n} z_s(t)\, u_s\right) + \sum_{r=1}^{n} \underbrace{u_r^*\big(\tilde{g}(t, \overbrace{\tilde{y}(t)}^{=(u^*)^{-1}(z(t))})\big)}_{\overset{\text{Def. von } h}{=} h_r(t, z(t))}\, u_r.$$

Außerdem wissen wir

$$\widetilde{A}\left(\sum_{s=1}^{n} z_s(t)\, u_s\right) \overset{(276)}{=} \sum_{s=1}^{n} z_s(t)\, \eta^s \overbrace{\widetilde{A}\,\tilde{u}_s}^{=\sum_{r=1}^{n} \tilde{b}_{rs}\,\tilde{u}_r} \overset{(276)}{=} \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} \eta^{n-r}\, \tilde{b}_{rs}\, z_s(t)\right) u_r,$$

und nach (274) ist $\sum_{s=1}^{n} \eta^{n-r}\, \tilde{b}_{rs}\, z_s(t)$ gleich $\lambda_r\, z_r(t) + \eta\, \delta_r\, z_{r+1}(t)$. Damit ist die behauptete Äquivalenz gezeigt.]

Zu 3.) Wir wollen zeigen, daß die konstante Lösung 0 von (270) instabil ist. Angenommen dies ist falsch. Dann existiert zu

$$\varepsilon := \xi \in \mathbb{R}_+ \text{ wie in (278)}$$

eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß die Definition der Stabilität in 10.1 erfüllt ist. Zu

$$z_0 := \left(\frac{\delta}{2}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{C}^n$$

existiert daher wegen $\|z_0\| < \delta$ eine Lösung $z = (z_1, \ldots, z_n)\colon [0, \infty[\to \mathbb{C}^n$ von (270)[25] mit

$$z(0) = \left(\frac{\delta}{2}, 0, \ldots, 0\right) \tag{281}$$

und

$$\forall_{t \in [0,\infty[}\ \|z(t)\| < \xi. \tag{282}$$

Wir definieren differenzierbare Funktionen

$$\phi, \psi\colon [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\phi(t) := \sum_{j=1}^{\overbrace{p}^{\geq 1}} |z_j(t)|^2 = \sum_{j=1}^{p} z_j(t)\, \overline{z_j}(t), \quad \psi(t) := \sum_{k=p+1}^{n} |z_k(t)|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} z_k(t)\, \overline{z_k}(t),$$

[25] Beachte, daß die rechte Intervallgrenze ∞ ist.

also

$$\phi + \psi = \|z\|^2.$$

Nach (281) gilt

$$\phi(0) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = \psi(0), \quad \text{also } (\phi - \psi)(0) > 0.$$

Wir behaupten:

Ist $t_1 \in \mathbb{R}_+$ und gilt $\forall_{t\in[0,t_1[}\,(\phi-\psi)(t) > 0$, so folgt

$$\forall_{t\in[0,t_1[}\,(\phi-\psi)(t) \geq \underbrace{\underbrace{(\phi-\psi)(0)}_{>0}\,\mathrm{e}^{2\eta t}}_{\text{streng monoton wachsend}} \quad . \tag{283}$$

[Zu (283): Wir bezeichnen im folgenden mit $\langle \ldots, \ldots \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^p$ und nutzen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (C.S.) aus.

Für jedes $t \in [0, \infty[$ gilt (beachte bei der ersten Gleichheit, daß das Produkt $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\phi'(t) &= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2}\Big(z_j'(t)\,\overline{z_j}(t) + \overbrace{z_j(t)\,\overline{z_j}'(t)}^{=\overline{z_j'(t)\,\overline{z_j(t)}}}\Big) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Re}\,\big(z_j'(t)\,\overline{z_j}(t)\big) \\
&\overset{(280)}{=} \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Re}\Big(\big(\lambda_j\, z_j(t) + \eta\,\delta_j\, z_{j+1}(t) + h_j(t, z(t))\big)\,\overline{z_j}(t)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Re}\big(\lambda_j\, z_j(t)\,\overline{z_j}(t)\big) + \eta \sum_{j=1}^{p} \delta_j\, \mathrm{Re}\big(z_{j+1}(t)\,\overline{z_j}(t)\big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Re}\big(h_j(t, z(t))\,\overline{z_j}(t)\big).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen

$$\mathrm{Re}\big(\lambda_j \overbrace{z_j(t)\,\overline{z_j}(t)}^{\in\mathbb{R}}\big) = \mathrm{Re}(\lambda_j)\,|z_j(t)|^2 \overset{(275)}{\geq} 6\,\eta\,|z_j(t)|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Re}\big(\lambda_j\, z_j(t)\,\overline{z_j}(t)\big) \geq 6\,\eta\,\phi(t),$$

$$\left|\sum_{j=1}^{p} \delta_j\, \mathrm{Re}\big(z_{j+1}(t)\,\overline{z_j}(t)\big)\right| \leq \sum_{j=1}^{p} \big(\delta_j\,|z_{j+1}(t)|\big)\,|z_j(t)|$$

$$\overset{\delta_p \overset{(274)}{=} 0}{=} \big\langle (\delta_1\,|z_2(t)|, \ldots, \delta_{p-1}\,|z_p(t)|, 0)\,,\, (|z_1(t)|, \ldots, |z_p(t)|) \big\rangle$$

$$\overset{\text{(C.S.)}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{p-1} \delta_j^2 \, |z_{j+1}(t)|^2}}_{\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{p-1} |z_{j+1}(t)|^2} \leq \sqrt{\phi(t)}} \sqrt{\phi(t)} \leq \phi(t)$$

und

$$|\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Re}\big(h_j(t,z(t))\,\overline{z_j}(t)\big)| \leq \sum_{j=1}^{p} |h_j(t,z(t))|\,|z_j(t)| \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|h(t,z(t))\|\,\|z(t)\|$$
$$\overset{(282),(278)}{\leq} \eta\,\|z(t)\|^2 = \eta\,(\phi(t)+\psi(t)) \overset{\text{Vor. in } (283)}{\leq} 2\,\eta\,\phi(t),$$

daß gilt $\frac{1}{2}\,\phi'(t) \geq 6\,\eta\,\phi(t) - \eta\,\phi(t) - 2\,\eta\,\phi(t) = 3\,\eta\,\phi(t)$, also

$$\phi' \geq 6\,\eta\,\phi. \tag{284}$$

Wie oben zeigt man (diesmal für ψ anstelle von ϕ)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\psi'(t) \;=\; & \sum_{k=p+1}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_k)\,|z_k(t)|^2 + \eta \sum_{k=p+1}^{n} \delta_k\,\mathrm{Re}\big(z_{k+1}(t)\,\overline{z_k}(t)\big) \\ & + \sum_{k=p+1}^{n} \mathrm{Re}\big(h_k(t,z(t))\,\overline{z_k}(t)\big),\end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen

$$\sum_{k=p+1}^{n} \overbrace{\mathrm{Re}(\lambda_k)}^{\overset{(273)}{\leq} 0}\,|z_k(t)|^2 \leq 0,$$

$$\sum_{k=p+1}^{n} \delta_k\,\mathrm{Re}\big(z_{k+1}(t)\,\overline{z_k}(t)\big) \overset{\substack{\text{analog zu oben, } \delta_n \overset{(274)}{=} 0 \text{ ausnutzen}}}{\leq} \psi(t),$$

$$\sum_{k=p+1}^{n} \mathrm{Re}\big(h_k(t,z(t))\,\overline{z_k}(t)\big) \overset{\text{wie oben}}{\leq} 2\,\eta\,\phi(t),$$

daß gilt

$$\psi' \leq 2\,\eta\,\psi + 4\,\eta\,\phi. \tag{285}$$

Nun erhalten wir

$$(\phi-\psi)' = \phi' - \psi' \overset{(284),(284)}{\geq} 6\,\eta\,\phi - 2\,\eta\,\psi - 4\,\eta\,\psi = 2\,\eta\,\overbrace{(\phi-\psi)}^{>0},$$

also auch $\big(\ln(\phi-\psi)\big)' = \frac{(\phi-\psi)'}{\phi-\psi} \geq 2\,\eta$. Für jedes $t \in [0, t_1[$ folgt daher

$$\frac{\ln(\phi-\psi)(t)}{\ln(\phi-\psi)(0)} = \ln(\phi-\psi)(t) - \ln(\phi-\psi)(0) = \int_0^t \underbrace{\big(\ln(\phi-\psi)\big)'(s)}_{\geq 2\,\eta}\,\mathrm{d}s \geq 2\eta\,t,$$

womit (283) gezeigt ist.]

Aus (283) folgt offenbar zunächst

$$\forall_{t\in[0,\infty[}\,(\phi-\psi)(t)>0$$

und sodann auch

$$\forall_{t\in[0,\infty[}\,\phi(t)\geq\phi(t)-\underbrace{\psi(t)}_{\geq 0}\overset{\psi(0)=0}{\geq}\underbrace{\phi(0)}_{>0}\,\mathrm{e}^{2\eta t}\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty,$$

im Widerspruch zu (282).

Damit ist gezeigt, daß die konstante Lösung vom Wert 0 von (270) instabil ist.

Zu 4.) Aus 3.) folgt sofort, daß auch die Lösung $\tilde{y}=0$ von (269) instabil ist. Dann muß auch die Lösung $y=0$ von (257) instabil sein.

Denn angenommen dies ist nicht der Fall, so sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ beliebig vorgegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{2}\in\mathbb{R}_+$ existiert dann ein $\delta\in\mathbb{R}_+$ derart, daß die Definition der Stabilität für die Lösung $y=0$ von (257) erfüllt ist (mit $\frac{\varepsilon}{2}$ anstelle von ε). Dann ist offenbar wegen (272) für dasselbe δ die Definition der Stabilität für die Lösung $\tilde{y}=0$ von (269), im Widerspruch zu oben.

Damit haben wir auch (ii) vollständig bewiesen. □

11 Randwertaufgaben

11.1. Wir betrachten in diesem Kapitel lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\boxed{u''(x) + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x) = h(x),} \tag{286}$$

wobei $a_0, a_1, h\colon J := [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sind. Wir wissen bereits nach 6.16 (ii), daß der Raum aller maximalen Lösungen ein zweidimensionaler affiner Unterraum von $\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ ist. Gesucht werden nun Lösungen $u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ von (286), die einer *Randbedingung*

$$u(a) = \eta_1 \in \mathbb{R}, \quad u(b) = \eta_2 \in \mathbb{R}$$

oder

$$u'(a) = \eta_1 \in \mathbb{R}, \quad u'(b) = \eta_2 \in \mathbb{R}$$

bzw. allgemeiner einer sogenannten *Sturmschen Randbedingung*

$$\boxed{\lambda_1\,u(a) + \lambda_2\,u'(a) = \eta_1, \quad \mu_1\,u(b) + \mu_2\,u'(b) = \eta_2,} \tag{287}$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ seien, genügen.

Bemerkung. Eine Randwertaufgabe (286), (287) ist im Gegensatz zu der Anfangswertaufgabe

$$(286), \quad u(x_0) = \eta_1 \in \mathbb{R}, \quad u'(x_0) = \eta_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{wobei } x_0 \in J,$$

i.a. nicht eindeutig lösbar.

Der Leser zeige als einfache Übung, daß die Randwertaufgabe

$$\boxed{u''(x) + \pi^2\,u(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0}$$

unendlich viele $\mathcal{C}^2$-Lösungen $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ besitzt; und andererseits existiert keine $\mathcal{C}^2$-Lösung $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ der Randwertaufgabe

$$\boxed{u''(x) + \pi^2\,u(x) = -\pi^2, \quad u(0) = u(1) = 0.}$$

[Tip: Die erste Differentialgleichung wird durch $u_k(x) := k\,\sin(\pi\,x)$, $k \in \mathbb{Z}$, gelöst. Für die zweite Aussage verwende man zunächst 6.19 und führe dann einen Widerspruch zur Randbedingung her.].

11.2.

1.) Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, die Randwertaufgabe wie folgt umzuschreiben:

Generalvoraussetzung. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $J := [a,b]$, $p \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ mit $p > 0$ und $q \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ sowie

$$\forall_{u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})} \boxed{Lu := (p\,u')' + q\,u = p\,u'' + p'\,u' + q\,u.}$$

Weiter seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ mit ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 > 0$, ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 > 0$ und

$$\forall_{u \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})} \boxed{R_1 u := \alpha_1\, u(a) + \alpha_2\, p(a)\, u'(a), \quad R_2 u := \beta_1\, u(b) + \beta_2\, p(b)\, u'(b)}$$

Offenbar sind dann $L\colon \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ sowie $R_1, R_2\colon \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen.

Des weiteren seien $g \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ und $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

Gesucht sind Lösungen $u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ der *Sturmschen Randwertaufgabe*

$$\boxed{Lu = g, \quad R_1 u = \eta_1,\, R_2 u = \eta_2.} \tag{288}$$

Die zugehörige *homogene Sturmsche Randwertaufgabe* lautet

$$\boxed{Lu = 0, \quad R_1 u = R_2 u = 0.} \tag{289}$$

2.) Wir überlegen, daß sich jede Randwertaufgabe (288) in der Form (286), (287) schreiben läßt und umgekehrt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} Lu = g \quad &\iff \quad (p\,u')' + q\,u = g \iff p\,u'' + p'\,u' + q\,u = g \\ &\iff \quad u'' + \underbrace{\frac{p'}{p}}_{=:\,a_1}\, u' + \underbrace{\frac{q}{p}}_{=:\,a_0}\, u = \underbrace{\frac{g}{p}}_{=:\,h} \end{aligned}$$

und

$$u'' + a_1\, u' + a_0\, u = h \overset{p(x) := \mathrm{e}^{\int a_1(x)\,\mathrm{d}x}}{\iff} \underbrace{p\,u'' + \underbrace{p\,a_1}_{=\,p'}\, u'}_{=\,(p\,u')'} + \underbrace{p\,a_0}_{=:\,q}\, u = \underbrace{p\,h}_{=:\,g}\,.$$

Damit ist klar, daß die Menge $\mathcal{L} := \{u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R}) \,|\, Lu = 0\}$ ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ ist. Des weiteren ist die Menge $\mathcal{L}_g := \{u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R}) \,|\, Lu = g\}$ ein zwei-dimensionaler affiner Unterraum von $\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ mit Richtungsraum $\mathcal{L}$. Letzteres bedeutet per definitionem

$$\forall_{v \in \mathcal{L}_g}\, \mathcal{L}_g = \{v\} + \mathcal{L}.$$

3.) Die Menge aller Lösungen von (289) ist ein evtl. null-dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{L}$. Die Differenz zweier Lösungen von (288) ist Lösung von (289). Die Summe einer Lösung von (288) und einer Lösung von (289) ist wieder eine Lösung von (288).

[Dies folgt alles aus der Linearität von L, R_1 und R_2.]

Man erhält alle Lösungen von (288), indem man zu einer speziellen Lösung von (288) alle Lösungen von (289) hinzuaddiert.

Lemma 11.3. *Für alle $u, v \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ gilt:*

(i) (Lagrange-Identität)

$$v\,Lu - u\,Lv = \big(p(u'\,v - v'\,u)\big)'.$$

(ii) $\big(\forall_{j\in\{1,2\}}\, R_j(u) = R_j(v) = 0\big) \Longrightarrow \int_a^b (v\,Lu - u\,Lv)\,(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Zusatz. *(i) und (ii) bleiben richtig, wenn man anstelle von*

$$p \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}) \;\; \textit{und} \;\; u, v \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$$

nur voraussetzt, daß

$$p \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R}),\; u, v \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}),\; p\,u', p\,v' \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$$

und L in der allgemeineren Situation durch dieselbe Formel definiert wird.

Beweis. Wir führen den Beweis unter der schwächeren Voraussetzung des Zusatzes.

(i) gilt wegen

$$\begin{aligned} v\,Lu - u\,Lv &= v\big((p\,u')' + q\,u\big) - u\big((p\,v')' + q\,v\big) \\ &= \big((p\,u')\,v\big)' - (p\,u')\,v' - \big((p\,v')\,u\big)' + (p\,v')\,u' \\ &= \big(p(u'\,v - v'\,u)\big)'. \end{aligned}$$

Zu (ii): Es gilt

$$u'(a)\,v(a) - v'(a)\,u(a) = 0. \tag{290}$$

[Zu (290): 1. Fall: $\alpha_2 = 0$. Dann folgt zunächst aus ${\alpha_1}^2{\alpha_2}^2 > 0$, daß $\alpha_1 \neq 0$ gilt. Sodann ergibt $R_1(u) = R_1(v) = 0$, daß $u(a) = v(a) = 0$ und die Gültigkeit von (290).

2. Fall: $\alpha_2 \neq 0$. Dann folgt aus $R_1(u) = R_1(v) = 0$

$$u'(a) = \underbrace{\frac{-\alpha_1}{\alpha_2\,p(a)}}_{=:\lambda}\,u(a), \quad v'(a) = \lambda\,v(a),$$

also

$$u'(a)\,v(a) - v'(a)\,u(a) = \lambda\,u(a)\,v(a) - \lambda\,v(a)\,u(a) = 0,$$

d.h. es gilt auch in diesem Falle (290).]

Analog zu (290) zeigt man

$$u'(b)\,v(b) - v'(b)\,u(b) = 0. \tag{291}$$

Nun ergibt sich aus (i), (291) und (290)

$$\begin{aligned} &\int_a^b (v\,Lu - u\,Lv)\,(x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = p(b)\big(u'(b)\,v(b) - v'(b)\,u(b)\big) - p(a)\big(u'(a)\,v(a) - v'(a)\,u(a)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Durch

$$\forall_{\varphi,\psi\in\mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})}\,\langle\varphi,\psi\rangle = \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ definiert. (ii) besagt dann gerade, daß für alle $u,v\in\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ mit $\forall_{j\in\{1,2\}} R_j(u) = R_j(v) = 0$ gilt

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle.$$

Satz 11.4. *Seien $u,u_1,u_2\in\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ derart, daß $\{u_1,u_2\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $Lu = 0$ ist. Dann sind die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:*

(1) Die inhomogene Sturmsche Randwertaufgabe (288) ist eindeutig lösbar.

(2) Die homogene Sturmsche Randwertaufgabe (289) besitzt $u = 0$ als einzige Lösung.

(3) $\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} \neq 0.$

Beweis. Nach 11.2 2.) wissen wir bereits, daß eine Lösung $v_0\in\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ von $Lu = g$ existiert.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“ Angenommen (2) ist falsch, d.h. es existiert eine Lösung $u\neq 0$ von (289). Zu zeigen ist, daß dann auch (1) falsch ist, also daß (288) keine oder mindestens zwei verschiedene Lösungen besitzt.

Beweis hiervon: Falls (288) keine Lösung besitzt, so ist nichts zu zeigen. Falls (288) eine Lösung v besitzt, so ist $v+u\neq v$ eine weitere Lösung von (288), da

$$\begin{aligned} L(v+u) &= Lv + Lu = g + 0 = g,\\ R_j(v+u) &= R_jv + R_ju = \eta_j + 0 = \eta_j \end{aligned}$$

für $j\in\{1,2\}$ gilt.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“ Angenommen (3) gilt nicht, d.h. $\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = 0$. Dann existiert $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ mit

$$\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{292}$$

also folgt für $u := \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda_1 \overbrace{Lu_1}^{=0} + \overbrace{Lu_2}^{=0} = 0,\\ R_ju &= \lambda_1 R_ju_1 + \lambda_2 R_ju_2 \overset{(292)}{=} 0 \end{aligned}$$

für $j\in\{1,2\}$, im Widerspruch zu (2).

„(3) ⇒ (1)“ Nach 11.2 3.) durchläuft

$$v = v_0 + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$$

alle Lösungen von $Lv = g$, wenn $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ ganz $\mathbb{R}^2$ durchläuft.

v ist genau dann Lösung von (288), wenn zusätzlich für $j \in \{1, 2\}$

$$\eta_j = R_j v = R_j v_0 + \mu_1 R_j u_1 + \mu_2 R_j u_2$$

gilt, d.h.

$$\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 - R_1 v_0 \\ \eta_2 - R_2 v_0 \end{pmatrix}.$$

(3) besagt $\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0$, also ist $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt, womit (1) gezeigt ist. □

Beispiel 11.5.

1.) Sei $J := [0, \pi]$, also $a = 0$ und $b = \pi$. Wir untersuchen

$$\boxed{Lu := u'' + u = g, \quad R_1 u := u(0) + u'(0) = \eta_1, \, R_2 u := u(\pi) = \eta_2.}$$

Nach 11.4 „(3) ⇒ (1)“ ist die Randwertaufgabe für beliebige $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, da für das Fundamentalsystem $\{u_1 := \cos, u_2 := \sin\}$ von $Lu = 0$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

2.) Wir betrachten nun speziell

$$\boxed{u'' + u = 1, \quad R_1 u = R_2 u = 0.}$$

Da die konstante Funktion vom Wert 1 spezielle Lösung von $Lu = 1$ ist, so gilt für die gesuchte Lösung v hier betrachteten der Sturmschen Randwertaufgabe

$$v = 1 + \mu_1 \cos + \mu_2 \sin .$$

Aus

$$0 = R_1 v = R_1(1) + \mu_1 R_1(\cos) + \mu_2 R_1(\sin) = 1 + \mu_1 + \mu_2,$$
$$0 = R_2 v = R_2(1) + \mu_1 R_2(\cos) + \mu_2 R_2(\sin) = 1 - \mu_1$$

folgt

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -2,$$

also $v = 1 + \cos - 2 \sin$.

3.) Ändert man jedoch in 1.) die Gleichungen derart ab, daß man die Sturmsche Randwertaufgabe

$$\boxed{u'' + u = 0, \quad R_1 u := u(0) = 0,\ R_2 u := u(\pi) = 0}$$

erhält, so gilt $\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$, und die Randwertaufgabe besitzt unendlich viele Lösungen, nämlich die Funktionen $u = C \sin$, wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

11.6 (Grundlösung)**.**

1.) Seien $Q := J^2 = [a,b]^2$, $\widetilde{Q} := \{(x,\xi) \in Q \mid x \geq \xi\}$ und $\widetilde{\widetilde{Q}} := \{(x,\xi) \in Q \mid x \leq \xi\}$.

Definiton. Eine Abbildung $\gamma\colon Q \to \mathbb{R}$, $(x,\xi) \mapsto \gamma(x,\xi)$ heißt *Grundlösung von* $Lu = 0$ genau dann, wenn sie die folgenden vier Eigenschaften hat:

(a) $\gamma\colon Q \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) $\boxed{\tilde{\gamma}} := \gamma|_{\widetilde{Q}}$ und $\boxed{\tilde{\tilde{\gamma}}} := \gamma|_{\widetilde{\widetilde{Q}}}$ sind zwei-mal stetig partiell differenzierbar nach x, d.h.

$$\forall_{\xi \in [a,b]} \ \underbrace{\tilde{\gamma}(\ldots,\xi)}_{=\gamma(\ldots,\xi)|_{[\xi,b]}}, \ \underbrace{\tilde{\tilde{\gamma}}(\ldots,\xi)}_{=\gamma(\ldots,\xi)|_{[a,\xi]}} \text{ sind } \mathcal{C}^2\text{-Funktionen.}$$

(c) $\forall_{\xi \in [a,b]}\ \tilde{\gamma}(\ldots,\xi)\colon [\xi,b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}(\ldots,\xi)\colon [a,\xi] \to \mathbb{R}$ sind Lösungen von $Lu = 0$.[26]

(d) $\forall_{\xi \in]a,b[}\ \dfrac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x}(\xi,\xi) - \dfrac{\partial \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x}(\xi,\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)}$.[27]

2.) Eine Grundlösung von $Lu = 0$ existiert stets. Hierzu zeigen wir den folgenden Satz:

Satz. *Für jedes* $\xi \in [a,b]$ *sei* $u(\ldots,\xi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *die Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$Lv = 0, \quad v(\xi) = 0,\ v'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Dann wird durch

$$\forall_{(x,\xi) \in Q}\ \gamma(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\gamma}(x,\xi) := u(x,\xi), & x \geq \xi, \\ \tilde{\tilde{\gamma}}(x,\xi) := 0, & x \leq \xi, \end{array} \right\}$$

eine Grundlösung $\gamma\colon Q \to \mathbb{R}$ *von* $Lu = 0$ *definiert.*

[26] Hier sei Lu für $u \in \mathcal{C}^2([\xi,b],\mathbb{R})$ und $u \in \mathcal{C}^2([a,\xi],\mathbb{R})$ durch dieselbe Formel wie oben definiert.

[27] Das bedeutet, daß die erste partielle Ableitung auf der Diagonalen $x = \xi$ einen Sprung der Größe $\frac{1}{p}$ macht.

Beweis. γ ist wohldefiniert, da $u(\xi,\xi) = 0$ für alle $\xi \in [a,b]$ gilt.

Zu (a): Sei $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $Lu = 0$. Für jedes $\xi \in [a,b]$ existieren eindeutig bestimmte $c_1(\xi), c_2(\xi) \in \mathbb{R}$ mit

$$u(\ldots,\xi) = c_1(\xi)\,u_1 + c_2(\xi)\,u_2.$$

Dann folgt für alle $\xi \in [a,b]$

$$\begin{aligned} c_1(\xi)\,u_1(\xi) + c_2(\xi)\,u_2(\xi) &= u(\ldots,\xi)(\xi) = 0,\\ c_1(\xi)\,u_1{}'(\xi) + c_2(\xi)\,u_2{}'(\xi) &= u(\ldots,\xi)'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1{}' & u_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix}.$$

Nach 6.16 (iv) hat $\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1{}' & u_2{}' \end{pmatrix}$ keine Nullstelle. Z.B. aus der Cramerschen Regel folgt hieraus die Stetigkeit – sogar die $\mathcal{C}^1$-Differenzierbarkeit – von c_1 und c_2. Wegen

$$\forall_{(x,\xi)\in Q}\, u(x,\xi) = c_1(\xi)\,u_1(x) + c_2(\xi)\,u_2(x)$$

ist daher $u\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Damit sind $\tilde{\gamma} = \gamma|_{\widetilde{Q}} = u|_{\widetilde{Q}}$ und $\tilde{\tilde{\gamma}} = \gamma|_{\widetilde{\widetilde{Q}}} = 0$ stetig und $Q = \widetilde{Q} \cup \widetilde{\widetilde{Q}}$ ist disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen von Q, also ist auch $\gamma\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig.

(b) und (c) sind trivial.

Zu (d): Für jedes $\xi \in \,]a,b[$ gilt

$$\tilde{\gamma}(\ldots,\xi)'(\xi) - \tilde{\tilde{\gamma}}(\ldots,\xi)'(\xi) = u(\ldots,\xi)'(\xi) - 0 = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Damit haben wir alle Eigenschaften einer Grundlösung bewiesen. □

3.) Außer der in 2.) angegebenen gibt es viele weitere Grundlösungen, denn es gilt:

Satz. *Sind $\gamma(x,\xi)$ eine Grundlösung von $Lu = 0$, $v \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ beliebig mit $Lv = 0$ und $h \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ beliebig, so ist auch*

$$Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,\xi) \longmapsto \gamma(x,\xi) + h(\xi)\,v(x),$$

eine Grundlösung von $Lu = 0$.

Beweis als Übung. □

Der folgende Satz zeigt, wie man mittels einer Grundlösung von $Lu = 0$ eine Lösung von $Lu = g$ durch Integration bestimmen kann.

Satz 11.7. *Sei γ eine Grundlösung von $Lu = 0$. Dann ist die nach Eigenschaft (a) von γ wohldefinierte Funktion*

$$v\colon J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_a^b \gamma(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

eine Lösung von $Lv = g$, insbesondere $v \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$.

Beweis. Zunächst gilt für jedes $x \in J$

$$v(x) = \int_a^x \tilde{\gamma}(x,\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_x^b \tilde{\tilde{\gamma}}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

wobei die Integranden auf der rechten Seite nach Eigenschaft (b) stetig und stetig partiell differenzierbar nach x sind. Aus Lemma 8.11 folgt dann für jedes $x \in J$

$$\begin{aligned} v'(x) &= \int_a^x \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \overbrace{\tilde{\gamma}(x,x)}^{=\gamma(x,x)}\, g(x) \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \underbrace{\tilde{\tilde{\gamma}}(x,x)}_{=\gamma(x,x)}\, g(x) \\ &= \int_a^x \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_x^b \frac{\partial \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Die Integranden auf der rechten Seite sind erneut nach Eigenschaft (b) stetig und stetig partiell differenzierbar nach x, also folgt analog weiter für alle $x \in J$

$$\begin{aligned} v''(x) &= \int_a^x \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial x^2}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x}(x,x)\, g(x) \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x^2}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \frac{\partial \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x}(x,x)\, g(x) \\ &\overset{(d)}{=} \int_a^x \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial x^2}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_x^b \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x^2}(x,\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \frac{g(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Aus obigen Formeln erhält man mittels $Lv = p\,v'' + p'\,v' + q\,v$ für jedes $x \in J$

$$\begin{aligned} (Lv)(x) &= g(x) + \int_a^x \Bigg(\overbrace{p(x)\frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial x^2}(x,\xi) + p'(x)\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x}(x,\xi) + q(x)\,\tilde{\gamma}(x,\xi)}^{=L\tilde{\gamma}(\ldots,\xi)\overset{(c)}{=}0} \Bigg) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &\quad + \int_x^b \Bigg(\underbrace{p(x)\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x^2}(x,\xi) + p'(x)\frac{\partial \tilde{\tilde{\gamma}}}{\partial x}(x,\xi) + q(x)\,\tilde{\tilde{\gamma}}(x,\xi)}_{=L\tilde{\tilde{\gamma}}(\ldots,\xi)\overset{(c)}{=}0} \Bigg) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

$$= \quad g(x),$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Beispiel 11.8.

1.) Wir betrachten $Lu := u'' + u$ auf $J = [a,b]$, also $p = 1$, und $u(x) := \sin(x-\xi)$ ist die Lösung von

$$Lu = 0, \quad u(\xi) = 0,\ u'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Nach 11.6 2.) wird daher durch

$$\forall_{x\in Q}\, \gamma(x,\xi) := \left\{ \begin{array}{cc} \sin(x-\xi), & x \geq \xi, \\ 0, & x \leq \xi, \end{array} \right\}$$

eine Grundlösung $\gamma\colon Q \to \mathbb{R}$ von $Lu = 0$ definiert.

Nach 11.7 ist dann

$$\forall_{x\in[a,b]}\, v(x) = \int_a^x \sin(x-\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

eine Lösung von

$$\boxed{v'' + v = g.}$$

2.) Setzt man in 1.) speziell

$$a = 0 \quad \text{und} \quad g(x) := \cos(x),$$

so folgt

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^x \underbrace{\sin(x-\xi)\,\cos(\xi)}_{=\frac{1}{2}(\sin(x-2\xi)+\sin(x))}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{4}\cos(x-2\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x} + \frac{1}{2}\, x\, \sin(x) = \frac{1}{2}\, x\, \sin(x). \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $v(x) = \frac{1}{2}\, x\, \sin(x)$ sogar auf ganz $\mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\boxed{v''(x) + v(x) = \frac{1}{2}\,\cos(x)}$$

ist.

Definition 11.9 (Greensche Funktion)**.** Eine *Greensche Funktion der homogenen Sturmschen Randwertaufgabe (289)* ist per definitionem eine Grundlösung[28]

$$\Gamma\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,\xi) \longmapsto \Gamma(x,\xi)$$

von $Lu = 0$ mit der zusätzlichen Eigenschaft

[28] d.h. es gelten 11.6 (a) - (d)

(e) $\forall_{\xi\in]a,b[}\ \boxed{R_1\Gamma(\ldots,\xi)} := R_1\widetilde{\widetilde{\Gamma}}(\ldots,\xi) = R_2\widetilde{\Gamma}(\ldots,\xi) =: \boxed{R_2\Gamma(\ldots,\xi)} = 0$, d.h.

$$\alpha_1\,\widetilde{\widetilde{\Gamma}}(a,\xi) + \alpha_2\,p(a)\,\widetilde{\widetilde{\Gamma}}(\ldots,\xi)'(a) = \beta_1\,\widetilde{\Gamma}(b,\xi) + \beta_2\,p(b)\,\widetilde{\Gamma}(\ldots,\xi)'(b) = 0.$$

Hauptsatz 11.10 (über die Greensche Funktion)**.** *Wir setzen zusätzlich voraus, daß die äquivalenten Aussagen von 11.4 gelten. Dann gilt:*

(i) Es existiert genau eine Greensche Funktion $\Gamma(x,\xi)$ von (289), welche wie folgt berechnet werden kann:

Seien $u_1 \neq 0$ und $u_2 \neq 0$ Lösungen von $Lu = 0$ mit $R_iu_i = 0$ für $i \in \{1,2\}$. (Derartige u_1, u_2 existieren stets.)

Dann sind u_1, u_2 $\mathbb{R}$-linear unabhängig, der nach 11.3 (i) konstante Wert c von $p\,(u_1\,u_2' - u_1'\,u_2)$ ist ungleich null und es gilt

$$\forall_{(x,\xi)\in Q}\,\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{c}\,u_1(\xi)\,u_2(x), & x \geq \xi, \\ \frac{1}{c}\,u_1(x)\,u_2(\xi), & x \leq \xi. \end{cases}$$

(ii) Γ ist symmetrisch, d.h. $\forall_{(x,\xi)\in Q}\,\Gamma(x,\xi) = \Gamma(\xi,x)$.

(iii) Die nach 11.4 (1) eindeutig bestimmte Lösung v der „halbhomogenen" Randwertaufgabe

$$Lu = g, \quad R_1u = R_2u = 0$$

ist gegeben durch

$$\forall_{x\in J}\,v(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Beweis. 1.) Wir zeigen zunächst die Existenz von u_1, u_2 wie in (i). Wähle $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\alpha_1\,\lambda_1 + \alpha_2\,\lambda_2 = 0$ und sei $u_1 \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$Lu_1 = 0, \quad u_1(a) = \lambda_1,\ p(a)\,u_1'(a) = \lambda_2.$$

Dann folgt $u_1 \neq 0$ und $R_1u_1 = \alpha\,u_1(a) + \alpha_2\,p(a)\,u_1'(a) = 0$.

Damit ist die Existenz von $u_1 \neq 0$ mit $Lu_1 = 0$, $R_1u_1 = 0$ gezeigt, und völlig analog folgt die Existenz von $u_2 \neq 0$ mit $Lu_2 = 0$, $R_2u_2 = 0$. Derartige u_1, u_2 sind stets linear unabhängig:

Denn wäre z.B. $u_1 = \lambda\,u_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgte

$$R_2u_1 = \lambda\,R_2u_2 = 0,$$

also wäre u_1 eine Lösung von (289) mit $u_1 \neq 0$, im Widerspruch zu 11.4 (2).

2.) Wir zeigen, daß Γ wie in (i) eine Greensche Funktion ist: Wegen der linearen Unabhängigkeit von u_1, u_2 ist nach 6.16 (iv) die Wronski-Determinante

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} = u_1\,u_2' - u_1'\,u_2$$

stets ungleich null, also gilt $c \neq 0$ für den konstanten Wert c von $p\,(u_1\,u_2{}' - u_1{}'\,u_2)$, beachte $p > 0$.

Offenbar ist Γ wohldefiniert als Abbildung $Q \to \mathbb{R}$. (Denn für $x = \xi$ erhält man im oberen und unteren Fall denselben Wert.) Wir zeigen nun, daß Γ eine Grundlösung von $Lu = 0$ ist, d.h. die Eigenschaften (a) - (d) in 11.6 hat.

Zu (a): Mit u_1 und u_2 sind trivialerweise $\Gamma|_{\widetilde{Q}}$ und $\Gamma|_{\widetilde{\widetilde{Q}}}$ stetig, also ist auch Γ stetig.

(b) und (c) sind wegen

$$\begin{aligned} \forall_{\xi\in J}\,\widetilde{\Gamma}(\ldots,\xi) &= \Gamma(\ldots,\xi)|_{[\xi,b]} = \frac{u_1(\xi)}{c}\,u_2|_{[\xi,b]} \\ \forall_{\xi\in J}\,\widetilde{\widetilde{\Gamma}}(\ldots,\xi) &= \Gamma(\ldots,\xi)|_{[a,\xi]} = \frac{u_2(\xi)}{c}\,u_1|_{[a,\xi]} \end{aligned} \tag{293}$$

klar.

Zu (d): Für jedes $\xi \in]a,b[$ gilt

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Gamma}(\ldots,\xi)'(\xi) - \widetilde{\widetilde{\Gamma}}(\ldots,\xi)'(\xi) \\ &\overset{(293)}{=} \frac{1}{c}\left(u_1(\xi)\,u_2{}'(\xi) - u_1{}'(\xi)\,u_2(\xi)\right) \overset{\text{Def. } c}{=} \frac{1}{c}\,\frac{c}{p(\xi)} = \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned}$$

Schließlich ist Γ sogar eine Greensche Funktion, d.h. Γ erfüllt die Eigenschaft (e) in 11.9. Es gilt nämlich für jedes $\xi \in]a,b[$

$$\begin{aligned} R_1\widetilde{\widetilde{\Gamma}} &\overset{\text{s.o.}}{=} R_1\left(\frac{u_2(\xi)}{c}\,u_1\right) = \frac{u_2(\xi)}{c}\,\overbrace{R_1 u_1}^{=0} = 0, \\ R_2\widetilde{\Gamma} &\overset{\text{s.o.}}{=} R_2\left(\frac{u_1(\xi)}{c}\,u_2\right) = \frac{u_1(\xi)}{c}\,\underbrace{R_2 u_2}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Mit 1.) und 2.) ist (i) bis auf den Nachweis der Eindeutigkeit der Greenschen Funktion gezeigt.

3.) Sei Γ eine beliebige Greensche Funktion von (289). Wir definieren dann $v\colon J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{x\in J}\,v(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \left(= \int_a^x \widetilde{\Gamma}(x,\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_x^b \widetilde{\widetilde{\Gamma}}(x,\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right).$$

Nach 11.7 gilt dann $v \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ sowie $Lv = g$, und nach dem Beweis von 11.7 gilt zusätzlich

$$\forall_{x\in J}\,v'(x) = \int_a^x \frac{\partial\widetilde{\Gamma}}{\partial x}(x,\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_x^b \frac{\partial\widetilde{\widetilde{\Gamma}}}{\partial x}(x,\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} R_2 v &= \beta_1\,v(b) + \beta_2\,p(b)\,v'(b) \\ &= \int_a^b \Big(\underbrace{\beta_1\,\widetilde{\Gamma}(b,\xi) + \beta_2\,p(b)\,v'(b)}_{= R_2\widetilde{\Gamma}(\ldots,\xi) \overset{(e)}{=} 0} \Big)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \end{aligned}$$

und analog

$$R_1 v = 0,$$

also ist v die eindeutige Lösung der Randwertaufgabe $Lu = g$, $R_1 u = R_2 u = 0$.

4.) Seien Γ_1, Γ_2 zwei beliebige Greensche Funktionen von (289) und seien $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ beliebig. Wir definieren dann v_1, v_2 definiert durch

$$\begin{aligned} \forall_{x \in J}\, v_1(x) &:= \int_a^b \Gamma_1(x,\xi)\, g_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \\ \forall_{x \in J}\, v_2(x) &:= \int_a^b \Gamma_2(x,\xi)\, g_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Dann gilt nach 3.)

$$\begin{aligned} Lv_1 &= g_1, \qquad R_1 v_1 = R_2 v_1 = 0, \\ Lv_2 &= g_1, \qquad R_1 v_2 = R_2 v_2 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach 11.3 (ii)

$$\int_a^b \left(v_1\, Lv_2 - v_2\, Lv_1\right)(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

d.h.

$$0 = \int_a^b \left(\int_a^b \Gamma_1(x,\xi)\, g_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) g_2(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b \left(\int_a^b \Gamma_2(x,\xi)\, g_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) g_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

Hieraus folgt wegen

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^b \Gamma_2(x,\xi)\, g_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) g_1(x)\, \mathrm{d}x &= \int_a^b \int_a^b \Gamma_2(x,\xi)\, g_2(\xi)\, g_1(x)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \int_a^b \Gamma_2(x,\xi)\, g_2(\xi)\, g_1(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_a^b \int_a^b \Gamma_2(\xi,x)\, g_2(x)\, g_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

daß gilt

$$\int_Q \left(\Gamma_1(x,\xi) - \Gamma_2(\xi,x)\right)\, g_1(\xi)\, g_2(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi = 0.$$

Da die letzte Gleichung für beliebige $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ gezeigt ist, muß nach Analysis offenbar gelten

$$\forall_{(x,\xi) \in Q}\, \Gamma_1(x,\xi) = \Gamma_2(\xi,x),$$

welches wiederum für beliebige Greensche Funktionen Γ_1 und Γ_2 von (289) gezeigt ist. Hieraus folgt zunächst (ii) und sodann $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$.

Mit 3.) und 4.) sind die Eindeutigkeitsaussage in (i) und außerdem (ii) und (iii) bewiesen. □

Beispiel 11.11 (zur Berechnung der Greenschen Funktion)**.** Wir betrachten $Lu := u''$ auf $[0,1]$ mit

$$\boxed{u'' = 0, \quad R_1 u := u(0) = 0,\ R_2 u := u(1) = 0.}$$

Seien weiter $\tilde{u}_1 := 1$, $\tilde{u}_2(x) := x$. Dann ist $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $Lu = 0$ mit

$$\det \begin{pmatrix} R_1\tilde{u}_1 & R_1\tilde{u}_2 \\ R_2\tilde{u}_1 & R_2\tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

also gelten die äquivalenten Aussagen von 11.4.

Wir finden die Greensche Funktion Γ von (289) nach 11.10 (i):

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= x \quad \text{erfüllt } Lu_1 = 0,\ R_1u_1 = 0, \\ u_2(x) &:= x - 1 \quad \text{erfüllt } Lu_2 = 0,\ R_2u_2 = 0. \end{aligned}$$

u_1, u_2 sind linear unabhängig und

$$\underbrace{p(x)}_{=1} \left(u_1(x)\, u_2'(x) - u_1'(x)\, u_2(x)\right) = x - (x-1) = 1,$$

also $c = 1$. Nach 11.10 (i) gilt dann

$$\forall_{(x,\xi)\in[0,1]}\, \Gamma(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \xi\,(x-1), & x \geq \xi \\ x\,(\xi-1), & x \leq \xi \end{array} \right\} \leq 0.$$

Hauptsatz 11.12 (Lösung der Sturmschen Randwertaufgabe mittels Greenscher Funktion)**.**
Vor.: *Es mögen die äquivalenten Aussagen von Satz 11.4 gelten.* Γ *sei die Greensche Funktion von (289), vgl. 11.10 (i). Des weiteren sei* $\phi \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ *mit*[29]

$$R_1\phi = \eta_1 \quad \textit{und} \quad R_2\phi = \eta_2$$

und sei $v \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ *die z.B. nach 11.10 (iii) zu berechnende eindeutig bestimmte Lösung der „halbhomogenen" Randwertaufgabe*

$$Lv = g - \phi, \quad R_1v = R_2v = 0.$$

Beh.: $u := \phi + v$ *ist die eindeutig bestimmte Lösung der von (288).*

---

[29] Derartige Funktionen ϕ sind leicht zu finden. Bestimme zunächst $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2\, p(a))}_{\neq 0}, (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)\rangle = \alpha_1\,\tilde{\alpha}_1 + \alpha_2\, p(a)\,\tilde{\alpha}_2 = \eta_1$$

sowie

$$\langle \underbrace{(\beta_1, \beta_2\, p(b))}_{\neq 0}, (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)\rangle = \beta_1\,\tilde{\beta}_1 + \beta_2\, p(b)\,\tilde{\beta}_2 = \eta_2$$

und sodann $\phi \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ mit

$$\phi(a) = \tilde{\alpha}_1,\ \phi'(a) = \tilde{\alpha}_2 \quad \text{und} \quad \phi(b) = \tilde{\beta}_1,\ \phi'(b) = \tilde{\beta}_2.$$

Beweis. Es gilt

$$Lu = L\phi + Lv = L\phi + g - L\phi = g$$

und

$$R_j u = R_j\phi + R_j v = \eta_j + 0 = \eta_j$$

für $j \in \{1,2\}$. □

Satz 11.13.
Vor.: *Es mögen die äquivalenten Aussagen von Satz 11.4 gelten. Γ sei die Greensche Funktion von (289), vgl. 11.10 (i). Ferner seien $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*
Beh.: *u ist genau dann Lösung der Randwertaufgabe*

$$\underbrace{Lu = f(x,u)}_{d.h.\ \forall_{x\in J}\,(x,u(x))\in D \wedge (Lu)(x)=f(x,u(x))} \quad , \quad R_1 u = R_2 u = 0,$$

(insbesondere $u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$), wenn $u \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ Lösung der Integralgleichung

$$\forall_{x\in J}\, u(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)\, f(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

ist.

Beweis. Ist $u \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ und $\tilde{g} \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$, definiert durch

$$\forall_{x\in J}\, \tilde{g}(x) = f(x,u(x)),$$

so gilt die Behauptung nach 11.10 (iii) mit $\tilde{g}$ anstelle von g. □

Hauptsatz 11.14 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.**
Vor.: *Seien $D := [0,1] \times \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer Lipschitzbedingung bzgl. der zweiten Variablen*

$$\forall_{(x,y),(x,z)\in D}\, |f(x,y) - f(x,z)| \le L\,|y-z|$$

mit einer Lipschitz-Konstanten $L < \pi^2$ genügt.
Beh.: *Die Randwertaufgabe*

$$\boxed{u''(x) = f(x,u(x)), \quad u(0) = u(1) = 0} \tag{294}$$

besitzt genau eine Lösung.

Bemerkung. Die Bemerkung auf Seite 133 zeigt, daß im Falle $L = \pi^2$ unendlich viele oder gar keine Lösungen existieren können.

Beweis. 1.) Zunächst zeige man als Übungsaufgabe, daß $(V_*, \|\dots\|_*)$, wobei

$$V_* := \left\{u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \,|\, \|u\|_* < \infty\right\},$$

$$\forall_{u\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})}\, \|u\|_* := \sup\left\{\frac{u(x)}{\sin(\pi x)} \;\middle|\; x \in\,]0,1[\right\}$$

ein Banachraum ist.

[Tip: V_* ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ und $\|\dots\|_*$ eine Norm für V_*.

Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V_* bzgl. $\|\dots\|_*$. Dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ bzgl. $\|\dots\|_\infty$. Bekanntlich existiert daher ein Element $u\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_\infty=0$. Schließlich gilt $u\in V_*$ und $\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_*=0$.]

2.) Sei $\Gamma\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ die Greensche Funktion von

$$Lu := u'' = 0,\quad R_1u := u(0)=0,\ R_2u := u(1)=0,$$

also nach 11.11

$$\forall_{(x,\xi)\in[0,1]}\,\Gamma(x,\xi)=\left\{\begin{array}{ll}\xi\,(x-1), & x\geq\xi\\ x\,(\xi-1), & x\leq\xi\end{array}\right\}\leq 0. \tag{295}$$

Wir definieren für $u\in V_*\subset\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ eine Funktion $Tu\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ durch

$$\begin{aligned}\forall_{x\in[0,1]}\,(Tu)(x) &:= \int_0^1\Gamma(x,\xi)\,f(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi\\ &\overset{(295)}{=} \int_0^x\xi\,(x-1)\,f(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi+\int_x^1 x\,(\xi-1)\,f(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi\\ &= (x-1)\int_0^x\xi\,f(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi+x\int_x^1(\xi-1)\,f(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{296}$$

Aus (296) folgt sofort

$$Tu\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\quad\text{und}\quad (Tu)(0)=(Tu)(1)=0.$$

Hieraus und aus der Regel von de L'Hospital folgt wegen $\lim_{x\to0+}\sin(\pi x)=0$, $\lim_{x\to0+}\sin(\pi x)'=\pi\neq0$, $\lim_{x\to1-}\sin(\pi x)=0$, $\lim_{x\to1-}\sin(\pi x)'=-\pi\neq0$ die Existenz von

$$\lim_{x\to0+}\frac{(Tu)(x)}{\sin(\pi x)}\in\mathbb{R}\quad\text{und}\quad\lim_{x\to1-}\frac{(Tu)(x)}{\sin(\pi x)}\in\mathbb{R},$$

und hieraus wiederum folgt offenbar $Tu\in V_*$.

Damit haben wir einen Operator

$$T\colon V_*\longrightarrow V_*$$

definiert.

3.) Wir wollen zeigen, daß T kontrahierend ist, genauer

$$\forall_{u,v\in V_*}\,\|Tu-Tv\|_*\leq\underbrace{\frac{L}{\pi^2}}_{\in[0,1[}\,\|u-v\|_*.$$

Beweis hiervon: Für jedes $\xi\in[0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}|f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))| &\overset{\text{Vor.}}{\leq} L\,|u(\xi)-v(\xi)| = L\,|\overbrace{(u-v)}^{\in V_*}(\xi)|\\ &\leq L\,\|u-v\|_*\,\sin(\pi\xi),\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Abschätzung aus der Definition von $\|\dots\|_*$ ergibt.

Es folgt weiter für jedes $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |(Tu-Tv)(x)| &\overset{(296)}{\leq} \int_0^1 \overbrace{|\Gamma(x,\xi)|}^{\overset{(295)}{=}-\Gamma(x,\xi)} \, |f(\xi,u(\xi)) - f(\xi,v(\xi))| \, \mathrm{d}\xi \\ &\leq L \, \|u-v\|_* \left(- \int_0^1 \Gamma(x,\xi) \, \sin(\pi\,\xi) \, \mathrm{d}\xi \right). \end{aligned}$$

Nach 11.10 (iii) ist $\int_0^1 \Gamma(x,\xi) \, \sin(\pi\,\xi) \, \mathrm{d}\xi$ die eindeutig bestimmte Lösung der „halbhomogenen“ Randwertaufgabe

$$L\tilde{u} = \tilde{u}'' = \sin(\pi\,x), \quad R_1\tilde{u} = \tilde{u}(0) = R_2\tilde{u} = \tilde{u}(1) = 0,$$

also gilt

$$\int_0^1 \Gamma(x,\xi) \, \sin(\pi\,\xi) \, \mathrm{d}\xi = -\frac{1}{\pi^2} \, \sin(\pi\,x),$$

und es folgt

$$\forall_{x \in]0,1[} \, \frac{|(Tu-Tv)(x)|}{\sin(\pi\,x)} \leq \frac{L}{\pi^2} \, \|u-v\|_*,$$

damit ist $\|Tu-Tv\|_* \leq \frac{L}{\pi^2} \, \|u-v\|_*$ gezeigt.

4.) Aus 1.) bis 3.) und dem Banachschen Fixpunktsatz 3.11 folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten Elementes $u \in V_*$ mit $u = Tu$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} u = Tu &\overset{(296)}{\iff} \forall_{x \in [0,1]} \, u(x) = \int_0^1 \Gamma(x,\xi) \, f(\xi,u(\xi))) \, \mathrm{d}\xi \\ &\overset{11.13}{\iff} u'' = f(x,u), \quad u(0) = u(1) = 0 \\ &\iff u \text{ ist Lösung von (294).} \end{aligned}$$

5.) Wegen 4.) bleibt nur noch zu zeigen, daß jede Lösung u von (294) ein Element von V_* ist.

Beweis hiervon: Es gilt $u \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ (und sogar $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$) und $u(0) = u(1) = 0$, und hieraus folgt mit der Regel von de L'Hospital wie in 2.), daß gilt $u \in V_*$. □

11.15 (Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem)**.** Wir erweitern jetzt die Generalvoraussetzung aus 11.2 1.) wie folgt:

Generalvoraussetzung. Zusätzlich zu oben sei $r \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ mit $r > 0$.

Die von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Randwertaufgabe

$$\boxed{Lu + \lambda\, r\, u = 0, \quad R_1 u = R_2 u = 0} \tag{297}$$

heißt *Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem*, kurz *(SLE)*.

Für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ ist (297) eine homogene Sturmsche Randwertaufgabe vom Typ (289) (mit $q + \lambda\, r$ anstelle von q).

Definiton. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert von (SLE)*, wenn die homogene Sturmsche Randwertaufgabe (297) eine nicht-triviale Lösung $u \neq 0$ besitzt, d.h. wenn (297) nicht die in 11.4 genannten Eigenschaften hat, also genau dann, wenn gilt $\dim E_\lambda > 0$, wobei E_λ der $\mathbb{R}$-Untervektorraum des zwei-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\{u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R}) \,|\, Lu + \lambda r\, u = 0\}$, welcher durch

$$\boxed{E_\lambda} := \{u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R}) \,|\, Lu + \lambda r\, u = 0,\ R_1 u = R_2 u = 0\}$$

gegeben ist.

$u \in E_\lambda \setminus \{0\}$ heißt *Eigenfunktion zum Eigenwert* λ.

$\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *k-facher Eigenwert von (SLE)*, falls $\dim E_\lambda = k \in \{1,2\}$.

Beispiel 11.16. Seien $J = [0,\pi]$, $Lu = u''$, $r = 1$ sowie $R_1 u := u(0)$, $R_2 u := u(\pi)$. Wir betrachten somit

$$\boxed{u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0.} \tag{298}$$

1.) (Eigenwerte und Eigenfunktionen)

$$\begin{aligned}&\text{Alle Eigenwerte sind } \lambda_n := (n+1)^2, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}. \text{ Diese sind}\\ &\text{sämtlich einfach und } u_n := \sin\big((n+1)\,x\big) \text{ ist Eigenfunktion}\\ &\text{zum Wert } \lambda_n.\\ &u_n \text{ hat in }]0,\pi[\text{ genau } n \text{ Nullstellen } \frac{j\,\pi}{n+1},\ j \in \{1,\dots,n\}.\\ &\text{Zwischen je zwei Nullstellen von } u_{n+1} \text{ in }]0,\pi[\text{ liegt genau eine}\\ &\text{Nullstelle von } u_n.\end{aligned} \tag{299}$$

[Zu (299): Fall a): $\lambda = 0$. $u'' = 0$ besitzt $\{u_1 := 1, u_2 := x\}$ als Fundamentalsystem von Lösungen. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} = \pi > 0$$

gilt 11.4 (3), also ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert.

Fall b): $\lambda = -\mu^2$ mit $\mu \in \mathbb{R}_+$. $u'' - \mu^2 u = 0$ besitzt das Fundamentalsystem von Lösungen $\{u_1 := \sinh(\mu x), u_2 := \cosh(\mu x)\}$. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(\mu\pi) & \cosh(\mu\pi) \end{pmatrix} = -\sinh(\underbrace{\mu\pi}_{>0}) < 0$$

ist $\lambda = -\mu^2$ kein Eigenwert.

Fall c): $\lambda = \mu^2$ mit $\mu \in \mathbb{R}_+$. $u'' + \mu^2 u = 0$ besitzt das Fundamentalsystem von Lösungen $\{u_1 := \sin(\mu x), u_2 := \cos(\mu x)\}$. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\mu\pi) & \cos(\mu\pi) \end{pmatrix} = -\sin(\mu\pi) = 0$$

$$\iff \mu \in \mathbb{N}_+$$

ist $\lambda = \mu^2$ genau dann, wenn gilt $\mu \in \mathbb{N}_+$.

Damit ist die 1. Aussage von (299) gezeigt.

Für $n \in \mathbb{N}_+$ ist jede Lösung von $u'' + n^2 u = 0$ von der Gestalt

$$u(x) = A \sin(n x) + B \cos(n x), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} R_1 u = R_2 u = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A \\ &\qquad \text{und } 0 = A \cos(n\pi) + B \sin(n\pi) = (-1)^n A \\ &\Longleftrightarrow \quad A = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x) = B \sin(n x). \end{aligned}$$

Hieraus folgen leicht die restlichen Aussagen von (299).]

2.) (Entwicklung nach Eigenfunktionen)

$$\begin{aligned} &\text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ setzen wir } v_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left((n+1)x\right). \text{ Es gilt} \\ &\forall_{n,m \in \mathbb{N}} \int_0^\pi v_n(x)\, v_m(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \qquad (300) \\ &\text{Ferner gilt für jedes } \phi \in \mathcal{C}^1([0,\pi], \mathbb{R}) \text{ mit } \phi(0) = \phi(\pi) = 0 \\ &\phi(x) = \textstyle\sum_{n=0}^\infty b_n v_n \text{ mit } b_n = \int_0^\pi \phi(x)\, v_n(x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

[Zu (300): Die erste Aussage folgt durch einfache Rechnung unter Benutzung von

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right).$$

Die zweite Aussage folgt daraus, daß zu

$$\phi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}) \text{ mit } \phi(0) = \phi(\pi)$$

offenbar genau eine 2π-periodische ungerade[30] Funktion

$$\tilde{\phi}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \tilde{\phi}|_{[0,\pi]} = \phi$$

existiert. Und diese Funktion $\tilde{\phi}$ ist stückweise stetig differenzierbar, läßt sich also nach der Theorie der Fourier-Reihen der Analysis in eine reine Sinus-Reihe entwickeln. Damit ist die Behauptung klar.]

Die in dem sehr speziellen Fall (298) hergeleiteten Aussagen (299) und (300) lassen sich überraschenderweise auf den allgemeineren Fall (297) verallgemeinern. Es gelten nämlich die folgenden Hauptsätze:

[30] Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heiß genau dann *ungerade*,wenn $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ f(-x) = -f(x)$ gilt.

Hauptsatz 11.17 (Existenzsatz von Eigenwerten und -funktionen von (SLE))**.** *Wir betrachten (SLE), vgl. 11.15. Dann existiert genau eine Folge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen mit*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,\lambda_n < \lambda_{n+1} \;\wedge\; \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,$$

die die Menge aller Eigenwerte von (SLE) durchläuft.

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ *ist* λ_n *einfacher Eigenwert und „die" Eigenfunktion* u_n *zum Eigenwert* λ_n *hat im offenen Intervall* $]a,b[$ *genau* n *Nullstellen. Zwischen je zwei Nullstellen „der" Eigenfunktion* u_n *zum Eigenwert* λ_n *in* $]a,b[$ *liegt eine Nullstelle von* u_{n+1}*.*

Hauptsatz 11.18 (Entwicklungssatz nach Eigenfunktionen von (SLE))**.** *Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in 11.17. Durch*

$$\forall_{\phi,\psi\in\mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})}\,\langle\phi,\psi\rangle := \int_a^b r(x)\,\phi(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ *definiert.*

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ *sei* v_n *„die" Eigenfunktion zum Eigenwert* λ_n *mit*

$$\langle v_n, v_n\rangle = 1,$$

also ist v_n *bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Dann folgt:*

(i) $\{v_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ *ist ein Orthonormalsystem bzgl.* $\langle\ldots,\ldots\rangle$*, d.h.*

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}}\,\langle v_n, v_m\rangle = \delta_{nm} = \begin{cases}1, & n = m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

(ii) Für jedes $\phi\in\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ *mit* $R_1\phi = R_2\phi = 0$ *konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle\phi, v_n\rangle\, v_n \tag{301}$$

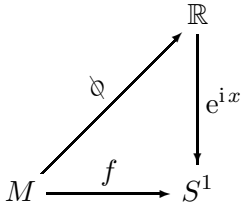
auf J *gleichmäßig und absolut gegen* ϕ*.*

(301) heißt Fourier-Reihe von ϕ bzgl. $\{v_n \mid n\in\mathbb{N}\}$*.*

Wir bereiten im folgenden den Beweis von 11.17 vor. Tatsächlich zeigen wir in 11.27 eine schärfere Version. Zunächst beweisen wir einen Spezialfall des *Monodromiesatzes der Überlagerungstheorie.*

Satz 11.19. *Seien* V *ein endlich-dimensionaler* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* M *eine kompakte sternförmige Teilmenge von* V *und* $f\colon M\to S^1$ *eine stetige Abbildung.*

(i) Es existiert eine stetige Funktion $\phi\colon M\to\mathbb{R}$ *mit* $\forall_{p\in M} f(p) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi(p)}$*.*



Sind $\phi, \tilde{\phi}$ zwei derartige Funktionen, so ist $\tilde{\phi} - \phi$ konstant von einem Wert aus $2\pi\mathbb{Z}$.

(ii) Sind speziell $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, M ein kompakter Quader und ist zusätzlich $f\colon M \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung.

Beweisskizze. Zu (i): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \in V$ Sternpunkt von M. Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf V. Dann existiert zunächst $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $|f(p) - f(q)| < 2$, d.h. $\frac{f(q)}{f(p)} \in S^1 \setminus \{-1\}$, für alle $p, q \in M$ mit $\|q - p\| < \delta$ und sodann $N \in \mathbb{N}_+$ mit $\|\frac{1}{N} p\| < \delta$ für alle $p \in M$. Wähle $\phi_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0}$. $\psi\colon S^1 \setminus \{-1\} \to]-\pi, \pi[$ bezeichne die stetige Umkehrabbildung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|_{]-\pi,\pi[}$. Wir definieren dann $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{p \in M}\, \phi(p) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{N} \psi\left(\frac{f(\frac{k}{N} p)}{f(\frac{k-1}{N} p)}\right).$$

Zu (ii): ψ ist Beschränkung der $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$\arg\colon \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \mathbb{R}) \longrightarrow]-\pi, \pi[.$$

□

11.20 (Die Prüfer-Transformation)**.**

1.) Sei $u \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ eine nicht-triviale Lösung von

$$Lu = (p\,u')' + q\,u = 0. \tag{302}$$

Wir definieren $\xi, \eta \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ durch

$$\xi := p\,u' \quad \text{und} \quad \eta := u. \tag{303}$$

Wegen $u \neq 0$ existiert kein $x_0 \in J$ mit $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, d.h. genau mit $\xi(x_0) = \eta(x_0) = 0$. Daher ist

$$(\xi, \eta)\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Dann ist auch

$$\rho := |(\xi, \eta)| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > 0$$

eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, und ebenso

$$\frac{1}{\rho}\,(\xi, \eta)\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

wobei letztere Werte in S^1 hat. Nach 11.19 existiert dann offenbar genau eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{\rho}\,(\xi, \eta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \quad \text{und} \quad -\pi < \phi(a) \leq \pi,$$

welche natürlich von u abhängig ist und die *Argumentfunktion von u* heißt. Es gilt somit

$$\rho, \phi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}),\ \rho > 0,\ -\pi < \phi(a) \leq \pi,\ \xi = \rho\cos(\phi),\ \eta = \rho\sin(\phi). \quad (304)$$

Aus (304) folgt zunächst

$$\xi' = \rho'\cos(\phi) - \rho\,\phi'\sin(\phi),$$
$$\eta' = \rho'\sin(\phi) + \rho\,\phi'\cos(\phi)$$

und sodann

$$-\xi'\sin(\phi) + \eta'\cos(\phi) = \rho\,\phi', \quad (305)$$
$$\xi'\cos(\phi) + \eta'\sin(\phi) = \rho'. \quad (306)$$

Andererseits folgt aus (302) bis (304)

$$\xi' \overset{(303)}{=} (p\,u')' \overset{(302)}{=} -q\,u \overset{(303)}{=} -q\,\eta \overset{(304)}{=} -q\,\rho\sin(\phi), \quad (307)$$
$$\eta' \overset{(303)}{=} u' \overset{(303)}{=} \frac{1}{p}\,\xi \overset{(304)}{=} \frac{1}{p}\,\rho\cos(\phi). \quad (308)$$

Schließlich ergibt sich

$$\phi' \overset{(305)}{=} -\frac{1}{\rho}\,\xi'\sin(\phi) + \frac{1}{\rho}\,\eta'\cos(\phi),$$

also mittels (307), (308)

$$\phi' = \frac{1}{p}\cos^2(\phi) + q\sin^2(\phi) = \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p}\right)\sin^2(\phi), \quad (309)$$

welches eine Differentialgleichung erster Ordnung für ϕ ist, und

$$\rho' \overset{(306)}{=} \xi'\cos(\phi) + \eta'\sin(\phi),$$

also wegen (307), (308)

$$\rho' = \left(\frac{1}{p} - q\right)\cos(\phi)\sin(\phi)\,\rho, \quad (310)$$

welches eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für ρ ist, die durch einfache Integration zu lösen ist, falls ϕ mittels (309) bestimmt wurde. Hierin liegt die Bedeutung der auf H. Prüfer zurückgehenden Transformation.

2.) Die Argumentfunktion ϕ von u hat offenbar die folgende Eigenschaft:

$$\forall_{x\in J}\left(u(x) = 0 \overset{(303),(304)}{\Longleftrightarrow} \phi(x) \in \mathbb{Z}\,\pi\right) \wedge \left(u'(x) = 0 \Longleftrightarrow \phi(x) \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\,\pi\right).$$

Beispiel 11.21. Seien $\omega \in \mathbb{R}_+$ und $u(x) := \sin(\omega x)$ die Lösung von

$$\boxed{Lu := u'' + \omega^2 u = 0,}$$

also $p = 1$, $q = \omega^2$. Ferner sei $J = [0, b]$. Dann gilt

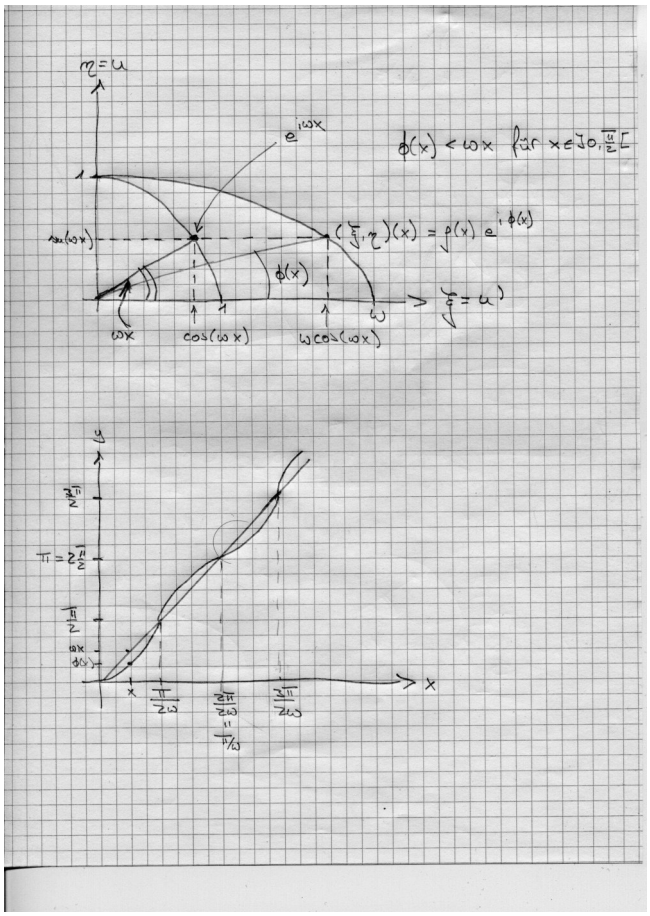
$$\forall_{x\in J} \underbrace{\rho(x)}_{>0} (\cos(\phi(x)), \sin(\phi(x))) = (u'(x), u(x)) = (\omega \cos(\omega x), \sin(\omega x)),$$

wobei die rechte Seite eine Ellipse mit Halbachsen $\omega, 1$ linksherum durchläuft. Des weiteren ist die rechte Seite für $x = 0$ vom Wert $(\omega, 0)$, also gilt $\phi(0) = 0$.

Es folgt: Die Funktionen $\phi, \omega x \colon J \to \mathbb{R}$ sind beide streng monoton wachsend und haben dieselben Werte für alle $x \in J$ mit $\omega x \in \mathbb{N}\frac{\pi}{2}$, d.h. für alle $x \in \mathbb{N}\frac{\pi}{2\omega}$. Daher gilt offenbar insbesondere

$$\forall_{x\in J} |\phi(x) - \omega x| < \frac{\pi}{2}.$$

Skizze für $\omega > 1$:



Im Falle $\omega = 1$ gilt $\phi' = 1$, also $\phi = x$.

Wir benötigen im folgenden eine Verschärfung von 7.1 der (in Anwendungen häufigig erfüllten) zusätzlichen Voraussetzung der Existenz einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Satz 11.22.
Vor.: *Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$, eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y genügt. Wir betrachten wieder die Differentialgleichung*

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)).}$$

Für eine differenzierbare Funktion $z\colon J \to \mathbb{R}$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall sei, die $\mathrm{Graph}(z) \subset D$ *erfüllt, sei wieder*

$$Pz\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\forall_{x \in J}\, (Pz)(x) := z'(x) - f(x, z(x)).$$

Beh.: *Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und I_0 ein nicht-entartetes Intervall mit linkem (bzw. rechtem) offenen Ende bei x_0*[31] *und $z_1, z_2\colon I_0 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit*

$$Pz_1 \le Pz_2 \ (bzw.\ Pz_1 \ge Pz_2) \ auf\ I_0 \tag{311}$$

und

$$\exists_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}\, z_1 \le z_2 \ auf\ I_0. \tag{312}$$

Dann folgt:

(i) $z_1 \le z_2$ *(auf ganz I_0)*

(ii) Entweder gilt $z_1 < z_2$ *(auf ganz I_0) oder*

$$\exists_{c \in I_0} \forall_{x \in I_0} \begin{cases} z_1(x) = z_2(x), & falls\ x \le c\ (bzw.\ x \ge c), \\ z_1(x) < z_2(x), & falls\ x > c\ (bzw.\ x < c). \end{cases}$$

Bemerkung. (ii) verschärft (i).

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall des „≤“-Zeichens in (311). Der andere Fall wird analog bewiesen.

Zu (i): Angenommen (i) ist falsch, d.h. für die in $I_0 \subset \mathbb{R}$ offene Menge gilt $M := \overline{z_1 - z_2}^{1}(\mathbb{R}_+) \neq \emptyset$.

Sei I eine Zusammenhangskomponente von M. Dann ist $I \subset I_0$ ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$, das in in I_0 offen ist und den Punkt x_0 nicht enthält (wegen (312)). Hieraus folgt witer:

I_0 ist ein links offenes Intervall vom Typ $]\alpha, \dots|$ mit $\alpha \ge x_0$, also $\alpha \in I_0$ und aus Stetigkeitsgründen gilt

$$z_1(\alpha) = z_2(\alpha) \tag{313}$$

[31] Es gilt also $I_0 =]x_0, \dots|$ (bzw. $I_0 = |\dots, x_0[$)

Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von $(\alpha, \underbrace{z_1(\alpha)}_{=z_2(\alpha)})$ in D, auf der f einer Lipschitzbedingung bzgl. y mit einer Lipschitzkonstanten L_* genügt. Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{Graph} z_1$ und $\operatorname{Graph} z_2$ in α können wir $\beta \in I$, $\beta > \alpha$, so nahe bei α wählen, daß

$$\operatorname{Graph} z_1([\alpha,\beta]) \subset U \ \wedge \ \operatorname{Graph} z_2([\alpha,\beta]) \subset U.$$

Dann gilt also $]\alpha,\beta] \subset I \subset M$, also

$$\forall_{s\in]\alpha,\beta]}\, z_1(x) > z_2(x). \tag{314}$$

Wir setzen die differenzierbare Funktion $v := (z_1 - z_2)|_{[\alpha,\beta]}$, die für jedes $x \in [\alpha,\beta]$ erfüllt

$$\begin{aligned} v'(x) &= z_1'(x) - z_2'(x) \\ &= \underbrace{(Pz_1)(x) - (Pz_2)(x)}_{\overset{(303)}{\leq} 0} + f(x, z_1(x)) - f(z, z_2(x)) \\ &\leq |f(x, z_1(x)) - f(z, z_2(x))| \leq L_*\, |z_1(x) - z_2(x)| \\ &\overset{(313),(314)}{=} L_*\, v(x), \end{aligned}$$

also auch

$$\left(v(x)\, \mathrm{e}^{-L_* x}\right)' = \underbrace{\left((v' x) - L_*\, v(x)\right)}_{\leq 0} \mathrm{e}^{-L_* x} \leq 0.$$

Wegen (313) gilt $v(\alpha)\, \mathrm{e}^{-L_*\alpha} = 0$, also folgt daher

$$\forall_{x\in[\alpha,\beta]}\, v(x)\, \mathrm{e}^{-L_* x} \leq 0 \ \text{ d.h. } v(x) \leq 0,$$

im Widerspruch zu (314).

Zu (ii): Da nach (i) $z_1 \leq z_2$ gilt, genügt es offenbar zum Nachweis von (ii) zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{\alpha\in I_0}\ (z_1(\alpha) < z_2(\alpha) \Longrightarrow \forall_{x\in I_0, x>\alpha}\, z_1(x) < z_2(x))\,. \tag{315}$$

Angenommen (315) ist falsch. Dann folgt offenbar die Existenz eines Teilintervalles $I = [\alpha,\beta] \subset I_0$, $\alpha < \beta$, mit

$$\left(\forall_{x\in[\alpha,\beta[}\, z_1(x) < z_2(x)\right) \ \wedge \ (z_1(\beta) = z_2(\beta))\,. \tag{316}$$

Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von $(\alpha, \underbrace{z_1(\alpha)}_{=z_2(\alpha)})$ in D, auf der f einer Lipschitzbedingung bzgl. y mit einer Lipschitzkonstanten L_* genügt. Wir können dann $\tilde\alpha \in [\alpha,\beta[$ so nahe bei β wählen derart, daß wieder gilt

$$\operatorname{Graph} z_1([\tilde\alpha,\beta]) \subset U \ \wedge \ \operatorname{Graph} z_2([\tilde\alpha,\beta]) \subset U.$$

Nun folgt für $w := (z_2 - z_1)|_{[\tilde\alpha,\beta]}$ und jedes $x \in [\tilde\alpha,\beta] \subset [\alpha,\beta]$

$$w'(x) = z_2'(x) - z_1'(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{(Pz_2)(x) - (Pz_1)(x)}_{\overset{(311)}{\geq} 0} + f(x, z_2(x)) - f(z, z_1(x)) \\
&\geq f(x, z_2(x)) - f(z, z_1(x)) \geq -\underbrace{|f(x, z_2(x)) - f(z, z_1(x))|}_{\leq L_* \, |z_2(x) - z_1(x)|} \\
&\overset{(316)}{\geq} -L_* (z_2(x) - z_1(x)) = -L_* \, w(x),
\end{aligned}
$$

also auch

$$
\big(w(x)\, \mathrm{e}^{L_* \, x}\big)' = \underbrace{\big((w' \, x) + L_* \, w(x)\big)}_{\geq 0} \mathrm{e}^{L_* \, x} \geq 0.
$$

Wegen (316) gilt $w(\beta)\, \mathrm{e}^{L_* \, \beta} = 0$, also folgt daher

$$
\forall_{x \in [\tilde{\alpha}, \beta]} \, w(x)\, \mathrm{e}^{L_* \, x} \leq 0 \quad \text{d.h. } w(x) \leq 0,
$$

im Widerspruch zu (316). □

Lemma 11.23. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $a_0, a_1 \colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $y \neq 0$ eine nicht-triviale Lösung von*

$$
y'' + a_1 \, y' + a_0 \, y = 0.
$$

Dann hat y nur höchstens abzählbar viele Nullstellen, und die Nullstellen sind isoliert. *Letzteres heißt per definitionem, daß die Menge der Nullstellen keinen Häufungspunkt besitzt.*

Beweis als Übung. □

Satz 11.24.
Vor.: *Seien $j \in \{1, 2\}$ und p_j, q_j, L_j wie in der Generalvoraussetzung 11.2 1.) – dort ohne den Index j. Seien $u_j \neq 0$ eine nicht-triviale Lösung von $L_j u_j = 0$ und ϕ_j die Argumentfunktion von u_j, vgl. 11.20. Ferner gelte*

$$
p_1 \geq p_2, \tag{317}
$$

$$
q_1 \leq q_2, \tag{318}
$$

$$
\phi_1(a) \leq \phi_2(a). \tag{319}
$$

Beh.: *Es gelten*

(i) $\phi_1 \leq \phi_2$.

(ii) Entweder gilt $\phi_1 < \phi_2$ *oder*

$$
\exists!_{c \in [a,b]} \, \phi_1|_{[a,c]} = \phi_2|_{[a,c]} \, \wedge \, \phi_1|_{]c,b]} < \phi_2|_{]c,b]}.
$$

Im Falle $\phi_1(a) < \phi_2(b)$ gilt also stets $\phi_1 < \phi_2$.

(iii) $q_1 < q_2 \Longrightarrow \phi_1|_{]a,b]} < \phi_2|_{]a,b]}$.

(iv) $\phi_1 = \phi_2 \Longrightarrow \exists_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \, u_2 = \lambda \, u_1$.

Bemerkung. (ii) verschärft (i).

Beweis. Nach (309) gilt mit der stetigen Funktion

$$f\colon \overbrace{[a,b]\times\mathbb{R}}^{=:D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{1}{p_2(x)}\cos^2(y) + q_2(x)\sin^2(y),$$

die einer lokale Lipschitzbedingung bzgl. y genügt (da sie stetig partiell differenzierbar nach y ist,)

$$\phi_2' = f(x,\phi_2(x)).$$

Wir setzen wieder für eine differenzierbare Funktion z mit $\operatorname{Graph} z \subset D$

$$(Pz)(x) := z'(x) - f(x,z(x)).$$

Dann gilt also $P\phi_2 = 0$.

Analog gilt

$$\phi_1'(x) = \underbrace{\frac{1}{p_1(x)}}_{\substack{(317)\\ \le \frac{1}{p_2(x)}}} \cos^2(\phi_1(x)) + \underbrace{q_1(x)}_{\substack{(318)\\ \le q_2(x)}} \sin^2(\phi_1(x)),$$

also wissen wir, daß

$$P\phi_1 \le P\phi_2 = 0. \tag{320}$$

Aus (320), (319) und 11.22 folgen die Behauptungen (i) und (ii).

Zu (iii), (iv): Wir nehmen an, daß $\phi_1 < \phi_2$ nicht gilt und daß für c wie in (ii) gilt

$$c \in]a,b].$$

Dann ist also $[a,c]$ ein nicht-entartetes Intervall.

Zum Nachweis von (iii) ist zu zeigen, daß dies im Falle $q_1 < q_2$ nicht möglich ist, und zum Nachweis von (iv) ist zu zeigen, daß im Falle $c = b$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}_+$ mit $u_2 = \lambda u_1$ existiert.

Aus $\phi_1|_{[a,c]} \overset{(ii)}{=} \phi_2|_{[a,c]}$ folgt für jedes $x \in [a,c]$

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_2'(x) - \phi_1'(x)\\
&\overset{(309)}{=} \frac{1}{p_2(x)}\cos^2(\phi_2(x)) + q_2(x)\sin^2(\phi_2(x))\\
&\quad -\frac{1}{p_1(x)}\cos^2(\underbrace{\phi_1(x)}_{=\phi_2(x)}) - q_1(x)\sin^2(\underbrace{\phi_1(x)}_{=\phi_1(x)})\\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{p_2(x)} - \frac{1}{p_1(x)}\right)}_{\substack{(317)\\ \ge 0}} \underbrace{\cos^2(\phi_2(x))}_{\ge 0} + \underbrace{(q_2(x) - q_1(x))}_{\substack{(318)\\ \ge 0}} \underbrace{\sin^2(\phi_1(x))}_{\ge 0},
\end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\cos^2(\phi_2)|_{[a,c]}, \tag{321}$$

$$(q_2 - q_1)\,\sin^2(\phi_2)|_{[a,c]}. \tag{322}$$

Es gilt

$$\forall_{x\in[a,c]}\left(\sin^2(\phi_2(x)) = 0 \iff \phi_2(x) \in \mathbb{Z}\,\pi \overset{11.20 1.)}{\iff} u_2(x) = 0\right),$$

und $u_2|_{[a,c]}$ hat nach Lemma 11.23 nur isolierte Nullstellen. Deshalb folgt aus (322) offenbar

$$q_1|_{[a,c[} = q_2|_{[a,c[}, \tag{323}$$

womit (s.o.) die Behauptung von (iii) gezeigt ist. Im folgenden nehmen wir daher an, daß $c = b$ gilt, also nach (323)

$$q_1 = q_2 \tag{324}$$

und aufgrund von (321)

$$\frac{1}{p_1}\cos(\phi_2) = \frac{1}{p_2}\cos(\phi_2). \tag{325}$$

[Beachte, daß (325) an der Stelle x im Falle $\cos(\phi_2(x)) = 0$ trivialerweise und im Falle $\cos(\phi_2(x)) \neq 0$ nach (321) gilt.]

Für $j \in \{1,2\}$ sei $\rho_j\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ die zu u_j gehörige „Radiusfunktion“ gemäß 11.20, also gilt nach (310)

$$\begin{aligned}
\rho_j' &= \left(\frac{1}{p_j} - q_j\right)\cos(\phi_j)\,\sin(\phi_j)\,\rho_j \\
&\overset{(324)}{=} \left(\frac{1}{p_j} - q_2\right)\cos(\phi_2)\,\sin(\phi_2)\,\rho_j \\
&\overset{(325)}{=} \left(\frac{1}{p_2} - q_2\right)\cos(\phi_2)\,\sin(\phi_2)\,\rho_j.
\end{aligned}$$

Wegen $\rho_1(a), \rho_2(a) \in \mathbb{R}_+$ existiert $\lambda \in \mathbb{R}_+$ mit $\rho_2(a) = \lambda\,\rho_1(a)$. Dann sind ρ_2 und $\lambda\,\rho_1$ Lösungen derselben linearen Anfangswertaufgabe

$$y' = \left(\frac{1}{p_2} - q_2\right)\cos(\phi_2)\,\sin(\phi_2)\,y, \quad y(a) = \rho_2(a),$$

folglich gilt

$$\rho_2 = \lambda\,\rho_1. \tag{326}$$

Mit den Bezeichnungen wie in 11.20 folgt aus (324), (326)

$$u_2 = \eta_2 = \rho_2\,\sin(\phi_2) \overset{(324),(326)}{=} \lambda\,\rho_1\,\sin(\phi_1) = \lambda\,u_1,$$

womit (s.o.) auch (iv) gezeigt ist. □

11.25. Sei $\alpha \in [0,\pi[$ fest vorgegeben. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u_\lambda \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$Lv + \lambda\,r\,v = 0, \quad v(a) = \sin(\alpha), v'(a) = \frac{\cos(\alpha)}{p(a)}. \tag{327}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung ist klar, daß $u'_\lambda \neq 0$ gilt.

Mittels Korollar 8.12 läßt sich leicht zeigen, daß sowohl

$$u\colon [a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,\lambda)\longmapsto u_\lambda(x)$$

als auch

$$u' := \frac{\partial u}{\partial x}\colon [a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

stetige Funktionen sind.

[Zunächst ist nämlich (327) äquivalent zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung auf $[a,b]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, welches sich stetig auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ fortsetzen läßt. Auf diese wende man dann Korollar 8.12 an und folgere die Behauptung.]

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ seien $\xi_\lambda,\eta_\lambda,\rho_\lambda,\phi_\lambda\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ wie in 11.20 erklärt. Wir definieren

$$\xi,\eta,\rho,\phi\colon [a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

durch

$$\xi(x,\lambda) := \xi_\lambda(x),\ \eta(x,\lambda) := \eta_\lambda(x),\ \rho(x,\lambda) := \rho_\lambda(x),\ \phi(x,\lambda) := \phi_\lambda(x).$$

Es ist klar, daß dann auch

$$(\xi,\eta)\colon [a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$$

stetig ist, und mittels 11.19 (i) folgt leicht, daß auch ρ und ϕ stetig sind.

Für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt nach (327) und 11.20

$$\begin{aligned}\rho_\lambda(a)\cos(\phi_\lambda(a)) &= \xi_\lambda(a) = p(a)\,u'_\lambda(a) = \cos(\alpha)),\\ \rho_\lambda(a)\sin(\phi_\lambda(a)) &= \eta_\lambda(a) = u_\lambda(a) = \sin(\alpha)),\end{aligned}$$

d.h.

$$\rho_\lambda(a) = \rho(a,\lambda) = 1 \quad\text{und}\quad]-\pi,\pi] \overset{(304)}{\ni} \phi_\lambda(a) = \phi(a,\lambda) = \alpha\in[0,\pi[. \tag{328}$$

Ferner gilt nach (309) stets

$$\phi'_\lambda(x) = \underbrace{\frac{1}{p(x)}\cos^2(\phi_\lambda(x)) + (q(x)+\lambda r(x))\sin^2(\phi_\lambda(x))}_{=f_\lambda(x,\phi_\lambda(x))\text{ mit }f_\lambda\colon [a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\,(x,y)\longmapsto\frac{1}{p(x)}\cos^2(y)+(q(x)+\lambda r(x))\sin^2(y)}. \tag{329}$$

Wir behaupten, daß ϕ die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Für jedes $x\in\,]a,b]$ ist $\phi(x,\ldots)\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $\phi(a,\ldots)\overset{(328)}{=}\alpha$.

(b) $\lim_{\lambda\to-\infty}\phi(b,\lambda) = 0$,

(c) $\exists_{C,D,\lambda_*\in\mathbb{R}_+}\,\forall_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\geq\lambda_*}\ C\sqrt{\lambda}\leq\phi(b,\lambda)\leq D\sqrt{\lambda}$,

(d) $\forall_{(x_0,\lambda_0)\in[a,b]\times\mathbb{R}} \big((k\in\mathbb{Z} \wedge \phi_{\lambda_0}(x_0) = k\pi) \longrightarrow \phi'_{\lambda_0}(x_0) > 0\big)$.

M.a.W.: Graph ϕ_{λ_0} schneidet jede Gerade $y = k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ nur höchstens einmal, und zwar „von unten nach oben." Da dies auch für $k = 0$ gilt und $\phi_{\lambda_0}(a) \overset{(328)}{=} \alpha \geq 0$, folgt aus der Stetigkeit von ϕ_{λ_0}, daß

$$\phi|_{]a,b]\times\mathbb{R}} > 0.$$

Beweis. Zu (d): Aus $\phi_{\lambda_0}(x_0) = k\pi$ folgt $\sin^2(\phi_{\lambda_0}(x_0)) = 0$, $\cos^2(\phi_{\lambda_0}(x_0)) = 1$, also nach (329) $\phi'_{\lambda_0}(x_0) = \frac{1}{p(x_0)} > 0$.

Zu (a): Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$. Zu zeigen ist

$$\forall_{x\in]a,b}\, \phi(x,\lambda_1) < \phi(x,\lambda_2),$$

d.h. genau

$$\phi_{\lambda_1}|_{]a,b]} < \phi_{\lambda_2}|_{]a,b]}. \tag{330}$$

(330) folgt aus 11.24 (iii), angewandt auf folgendes Lexikon:

$$p_1 = p_2 = p,$$
$$q_1 = q + \lambda_1 r,\ q_2 = q + \lambda_2 r, \quad \text{also } q_1 < q_2,$$
$$\phi_1 = \phi_{\lambda_1},\ \phi_2 = \phi_{\lambda_2}, \quad \text{also } \phi_1(a) = \phi_2(a) \overset{(328)}{=} \alpha.$$

Zu (b): Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ beliebig vorgegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$\varepsilon < \pi - \alpha \quad \text{und} \quad \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}. \tag{331}$$

Da wir (d) bereits gezeigt haben, gilt $\phi(b,\lambda) > 0$, und es ist zu zeigen

$$\exists_{\lambda_0\in\mathbb{R}} \forall_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\leq\lambda_0}\, \phi(b,\lambda) < \varepsilon. \tag{332}$$

[Zum Beweis von (332) wenden wir Satz 7.2 (ii) über Oberfunktionen an. Sei

$$z\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ die lineare Funktion mit } z(a) = \pi - \varepsilon,\ z(b) = \varepsilon \overset{(331)}{\leq} \pi - \varepsilon,$$
$$\text{also } z' = -\frac{\pi - 2\varepsilon}{b-a} \tag{333}$$
$$\text{und } \forall_{x\in[a,b]} \sin(z(x)) \geq \sin(\varepsilon) > 0.$$

Nach Satz vom Maximum bzw. Minimum existieren $p_0, q_0, r_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{x\in[a,b]}\, p(x) \geq p_0 > 0,\ q(x) < q_0,\ r(x) \geq r_0 > 0.$$

Dann folgt für jedes $\lambda\in\mathbb{R}_-$ mit $q_0 + \lambda r_0 \leq 0$, d.h. $\lambda \leq -\frac{q_0}{r_0}$, und jedes $x\in[a,b]$

$$f_\lambda(x,z(x)) \overset{(329)}{=} \underbrace{\frac{1}{p(x)}}_{\leq\frac{1}{p_0}} \underbrace{\cos^2(z(x))}_{\leq 1} + \underbrace{\big(q(x) + \underbrace{\lambda r(x)}_{\leq\lambda r_0}\big)}_{\leq q_0+\lambda r_0} \underbrace{\sin^2(z(x))}_{\overset{(333)}{\geq}\sin^2(\varepsilon)}$$
$$\leq \frac{1}{p_0} + (q_0 + \lambda r_0)\sin^2(\varepsilon) \overset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Daher existiert $\lambda_0\in\mathbb{R}_-$ mit

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}_-,\lambda\le\lambda_0}\ \underbrace{\forall_{x\in[a,b]}\ f_\lambda(x,z(x)) < -\frac{\pi-2\varepsilon}{b-a} \overset{(333)}{=} z'(x)}_{\text{d.h. } (P_\lambda z)(x):=z'(x)-f_\lambda(x,z(x))>0}. \tag{334}$$

Ferner gilt

$$z(a) \overset{(333)}{=} \pi-\varepsilon \overset{(331)}{>} \alpha. \tag{335}$$

Sei im folgenden $\lambda\le\lambda_0$ beliebig. z ist wegen (334), (335) eine Oberfunktion der Anfangswertaufgabe

$$y' = f_\lambda(x,y),\quad y(a)=\alpha, \tag{336}$$

und $\phi_\lambda(x)$ ist wegen (329), (328) Lösung von (336). Aus Satz 7.2 folgt daher

$$z|_{]a,b]} > \phi_\lambda|_{]a,b]},$$

insbesondere $\varepsilon \overset{(333)}{=} z(b) > \phi_\lambda(b) = \phi(b,\lambda)$, womit (332) gezeigt ist.]

Zu (c): Nach Satz vom Maximum bzw. Minimum existieren $p_j, q_j, r_j \in \mathbb{R}$ für $j\in\{1,2\}$ mit

$$\forall_{x\in[a,b]}\ p_1(x)\ge p(x)\ge p_2>0,\ q_1\le q(x)<q_2,\ 0<r_1\le r(x)\le r_2. \tag{337}$$

Sei im folgenden $\lambda\in\mathbb{R}_+$ so groß, daß

$$\forall_{j\in\{1,2\}}\ q_j+\lambda r_j>0;$$

beachte $r_j \overset{(337)}{>} 0$. Wir setzen dann für jedes derartige λ und $j\in\{1,2\}$

$$\omega_{j,\lambda} := \sqrt{\frac{q_j+\lambda r_j}{p_j}} > 0. \tag{338}$$

Dann wird offenbar durch

$$u_{j,\lambda}(x) := \sin(\omega_{j,\lambda}(x-a)) \tag{339}$$

eine nicht-triviale Lösung $u_{j,\lambda}\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{gathered} L_j v+\lambda r_j v = 0,\quad v(a)=0,\ v'(a)=\omega_{j,\lambda}>0,\ \text{wobei}\\ L_j v := (p_j v)' + q_j v = p_j v'' + q_j v, \end{gathered} \tag{340}$$

definiert.

Sei $\phi_{j,\lambda}$ zu $u_{j,\lambda}$ wie in 11.20 erklärt. Dann gilt nach (329) (angewandt auf (340) anstelle von (302)

$$\begin{aligned} \phi'_{1,\lambda}(x) &= \underbrace{\frac{1}{p_1(x)}}_{\le\frac{1}{p(x)}}\cos^2(\phi_{1,\lambda}(x)) + \underbrace{(q_1(x)+\lambda r_1(x))}_{\overset{(337),\lambda>0}{\le} q(x)+\lambda r(x)}\sin^2(\phi_{1,\lambda}(x))\\ &\le f_\lambda(x,\phi_{1,\lambda}(x)) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\overbrace{\phi'_{2,\lambda}(x)}^{=(\phi_{2,\lambda}+\pi)'(x)} &= \underbrace{\frac{1}{p_2(x)}}_{\geq \frac{1}{p(x)}} \cos^2(\phi_{2,\lambda}(x)) + \underbrace{(q_2(x)+\lambda r_2(x))}_{\overset{(337),\lambda>0}{\geq} q(x)+\lambda r(x)} \sin^2(\phi_{2,\lambda}(x)) \\ &\geq f_\lambda(x,\phi_{2,\lambda}(x)) = f_\lambda(x,\phi_{2,\lambda}(x)+\pi),\end{aligned}$$

also mit P_λ wie in (334)

$$P_\lambda\phi_{1,\lambda} \leq \underbrace{P_\lambda\phi_\lambda}_{\overset{(329)}{=}0} \leq P_\lambda(\phi_{2,\lambda}+\pi). \tag{341}$$

Wegen $(p_j\, u'_{j,\lambda}(a), u_{j,\lambda}(a)) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ gilt nach 11.20 wegen $\alpha \in [0,\pi[$

$$0 = \phi_{1,\lambda}(a) \leq \underbrace{\phi_\lambda(a)}_{\overset{(328)}{=}\alpha} \leq \phi_{2,\lambda}+\pi = \pi, \tag{342}$$

und aus (341), (342) sowie 11.22 (i) folgt

$$\phi_{1,\lambda} \leq \phi_\lambda \leq \phi_{2,\lambda}+\pi. \tag{343}$$

Wir definieren Funktionen $c_{j,\lambda}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$c_{j,\lambda}(x) := \phi_{j,\lambda}(x) - \underbrace{\omega_{j,\lambda}}_{\in\mathbb{R}_+}(x-a). \tag{344}$$

Dann gilt

$$|c_{j,\lambda}(b)| < \frac{\pi}{2}. \tag{345}$$

[Zu (345): Mit den Bezeichnungen wie in 11.20 argumentieren wir analog zu 11.21 für jedes $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\underbrace{(\xi_{j,\lambda},\eta_{j,\lambda})(x)}_{=(\underbrace{\rho_{j,\lambda}}_{>0}(\cos(\phi_{j,\lambda}),\sin(\phi_{j,\lambda})))(x)} &= (p_j\, u'_{j,\lambda}(x), u_{j,\lambda}(x)) \\ &\overset{(339)}{=} (\underbrace{p_j\,\omega_{j,\lambda}}_{\in\mathbb{R}_+}\cos(\omega_{j,\lambda}(x-a)), \sin(\omega_{j,\lambda}(x-a))),\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite eine Ellipse mit Halbachsen $p_j\,\omega_{j,\lambda}, 1$ durchläuft,

$$\phi_{j,\lambda}(a) \overset{(342)}{=} 0 = (\omega_{j,\lambda}(x-a))(a).$$

Dann folgt wie in 11.21, daß

$$|c_{j,\lambda}(x)| \overset{(344)}{=} |\phi_{j,\lambda}(x) - \omega_{j,\lambda}(x-a)| < \frac{\pi}{2}$$

und daß folglich insbesondere (345) gilt.]

Nunmehr folgt

$$0 \overset{(345)}{=} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{c_{j,\lambda}(b)}{\sqrt{\lambda}} \overset{(344)}{=} \lim_{\lambda\to\infty} \left(\frac{\phi_{j,\lambda}(b)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\omega_{j,\lambda}(b)}{\sqrt{\lambda}} (b-a) \right),$$

also wegen

$$\frac{\omega_{j,\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \overset{(338)}{=} \sqrt{\frac{q_j}{\lambda p_j} + \frac{r_j}{p_j}} \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{r_j}{p_j}}$$

auch

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\phi_{j,\lambda}(b)}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{r_j}{p_j}} (b-a) =: \gamma_j > 0. \tag{346}$$

Aus (343) und (346) folgt

$$\underbrace{\frac{\phi_{1,\lambda}(b)}{\sqrt{\lambda}}}_{\overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}\gamma_1} \le \frac{\phi_\lambda(b)}{\sqrt{\lambda}} \le \underbrace{\frac{\phi_{2,\lambda}(b)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}}_{\overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}\gamma_2},$$

und hieraus folgt offenbar die Existenz einer Zahl $\lambda_* \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\ge\lambda_*}\, C := \frac{\gamma_1}{2} < \frac{\phi_\lambda(b)}{\sqrt{\lambda}} < 2\gamma_2 =: D,$$

d.h. $\forall_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\ge\lambda_*}\, C\sqrt{\lambda} < \phi(b,\lambda) < D\sqrt{\lambda}$, womit auch (c) gezeigt ist. □

Satz 11.26 (von Sturm-Picone)**.**
Vor.: *Seien p_j, q_j, L_j für $j \in \{1,2\}$ wie in der Generalvoraussetzung 11.2 (dort ohne Index j) und gelte*

$$p_1 \ge p_2, \tag{347}$$

$$q_1 \le q_2. \tag{348}$$

Ferner sei u_j für $j \in \{1,2\}$ eine nicht-triviale Lösung von $L_j u_j = 0$ derart, daß u_1, u_2 linear unabhängig sind.
Beh.: *Zwischen je zwei Nullstellen von u_1 liegt eine Nullstelle von u_2, d.h.*

$$\forall_{\alpha,\beta\in[a,b],\alpha<\beta} \left(u_1(\alpha) = u_1(\beta) = 0 \Longrightarrow \exists_{\gamma\in]a,b[}\, u_2(\gamma) = 0 \right).$$

Beweis. Da die Nullstellen von u_1 nach Lemma 11.23 isoliert liegen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\alpha = a, \quad \beta = b \quad \text{und} \quad \forall_{x\in]a,b[}\, u_1(x) \ne 0.$$

Dann gilt $u_1|_{]a,b[} > 0$ oder $u_1|_{]a,b[} < 0$, und wir dürfen nach eventuellem Übergang von u_1 zu $-u_1$ ohne Einschränkung annehmen, daß

$$u_1|_{]a,b[} > 0. \tag{349}$$

Wegen $u_1 \ne 0, u_1(a) = 0$ gilt $u_1'(a) \ne 0$, also wegen (349) offenbar

$$u_1'(a) > 0. \tag{350}$$

Sei ϕ_j für $j \in \{1,2\}$ die Argumentfunktion der Lösung $u_j \neq 0$ von $L_j u_j = 0$. Nach 11.20 1.) gilt wegen $u_1(a) = u_1(b) = 0$

$$\phi_1(a), \phi_2(b) \in \mathbb{Z}\pi;$$

und zwar genauer

$$\phi_1(a) = 0 \quad \text{sowie} \quad \phi_1(b) = \pi. \tag{351}$$

[Zu (5): Wegen $(p_1(a)\, u_1'(a), u_1(a)) \overset{\text{u.a.}}{\in} \overset{(350)}{\in} \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ gilt $]-\pi, \pi] \ni \phi_1(a) = 0$. Hieraus folgt offenbar $\phi_1(b) = \pi$, da nach (309) und 11.20 1.)

$$\phi_1'(a) = \frac{1}{p_1(a)} > 0, \ \forall_{x \in]a,b[}\, \phi_1(x) \notin \pi\mathbb{Z}, \ \phi_1(b) \in \pi\mathbb{Z}, \ \phi'(b) = \frac{1}{p_1(b)} > 0$$

gilt.]

1. Fall: $u_2(a) \neq 0$. Nach eventuellem Übergang von u_2 zu $-u_2$ können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $u_2(a) > 0$. Aus $(p_2(a)\, u_2'(a), u_2(a)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ folgt $]-\pi, \pi] \ni \phi_2(a) \in]0, \pi[$, also

$$0 \overset{(351)}{=} \phi_1(a) < \phi_2(b) < \pi. \tag{352}$$

Aus (347), (348), (352) und 11.24 (ii) folgt $\phi_1 < \phi_2$, insbesondere

$$\pi \overset{(351)}{=} \phi_1(b) < \phi_2(b). \tag{353}$$

Da nach (352), (353) gilt $\phi_2(a) < \pi < \phi_2(b)$, so folgt aus der Stetigkeit von ϕ_2 sowie dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Zahl $\gamma \in]a, b[$ mit $\phi_2(\gamma) = \pi$, also nach 11.20 1.) mit $u_2(\gamma) = 0$.

2. Fall: $u_2(a) = 0$. Wegen $u_2 \neq 0$ gilt $u_2'(a) \neq 0$, also ohne Einschränkung $u_2'(a) > 0$. Wegen $(p_2(a)\, u_2'(a), u_2(a)) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ gilt

$$\phi_1(a) \overset{(351)}{=} 0 = \phi_2(a). \tag{354}$$

Aus (347), (348), (354) und 11.24 (ii) folgt die Existenz einer Zahl $c \in [a, b]$ mit

$$\phi_1|_{[a,c]} = \phi_2|_{[a,c]} \quad \text{und} \quad \phi_1|_{]c,b]} < \phi_2|_{]c,b]}. \tag{355}$$

Es gilt $c \neq b$, denn andernfalls folgte mittels (355), daß $\phi_1 = \phi_2$, also wären u_1, u_2 nach 11.24 (iv) linear abhängig, im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher folgt nach (355)

$$\pi \overset{(351)}{=} \phi_1(b) < \phi_2(b). \tag{356}$$

Da nach (354), (356) gilt $\phi_2(a) = 0 < \pi < \phi_2(b)$, so folgt wie im 1. Fall die Existenz einer Zahl $\gamma \in]a, b[$ mit $\phi_2(\gamma) = \pi$, also mit $u_2(\gamma) = 0$. □

Wir beweisen jetzt Hauptsatz 11.17 in der folgenden verschärften Version:

Hauptsatz 11.27. *Wir betrachten das Eigenwertproblem (SLE), vgl. 11.15.*

(i) Es existiert genau eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,\lambda_n < \lambda_{n+1} \quad\wedge\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,$$

die die Menge aller Eigenwerte von (SLE) durchläuft. Des weiteren gilt

$$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\,\exists_{A,B\in\mathbb{R}_+}\forall_{n\in\mathbb{N},n\geq n_0}\,A\,n^2 \leq \lambda_n \leq B\,n^2, \tag{357}$$

d.h. „$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genauso schnell gegen ∞ wie $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$."

(ii) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist λ_n einfacher Eigenwert von (SLE) und „die" Eigenfunktion u_n zum Eigenwert λ_n hat im offenen Intervall $]a,b[$ genau n Nullstellen, die wir mit $x_{n,1},x_{n,2},\ldots,x_{n,n}$ bezeichnen. Es gilt weiterhin $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$.

(iii) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ liegt zwischen je zwei Nullstellen von u_n in $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle von u_{n+1}. Außerdem liegt zwischen a und $x_{n,1}$ mindestens eine Nullstelle von u_{n+1}.

Zumindest im Falle $\beta_2 = 0$, d.h. $R_2u = \beta_1\,u(b)$, liegt auch zwischen $x_{n,n}$ und b mindestens eine Nullstelle von u_{n+1}; in diesem Falle liegt also wegen (ii) zwischen je zwei benachbarten Nullstellen von u_n in $]a,b[$ genau eine Nullstelle von u_{n+1}.

Beweis. Seien also $[a,b],p,q,r,R_1,R_2,L$ wie in 11.2 und 11.15.

Zu (i): Es gilt $R_1u = \alpha_1\,u(a) + \alpha_2\,p(a)\,u'(a) = 0$ sowie ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 > 0$, also existiert genau ein

$$\alpha\in[0,\pi[\text{ mit } \alpha_1\sin(\alpha) + \alpha_2\cos(\alpha) = 0;$$

beachte

$$\alpha_1\sin(\alpha) + \alpha_2\cos(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow (\cos(\alpha),\sin(\alpha)) \in (\mathbb{R}\,(\alpha_2,\alpha_1))^\perp,$$

und die rechte Seite gilt für genau zwei $\alpha\in[0,2\,\pi[$, wovon eines in $[0,\pi[$ liegt. Ebenso folgt aus $R_2u = \beta_1\,u(b) + \beta_2\,p(b)\,u'(b) = 0$ sowie ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 > 0$ die Existenz genau eines

$$\beta\in]0,\pi] \text{ mit } \beta_1\sin(\beta) + \beta_2\cos(\beta) = 0,$$

da

$$\beta_1\sin(\beta) + \beta_2\cos(\beta) = 0 \Longleftrightarrow (\cos(\beta),\sin(\beta)) \in (\mathbb{R}\,(\beta_2,\beta_1))^\perp,$$

und die rechte Seite gilt für genau zwei $\beta\in]0,2\,\pi]$, wovon eines in $]0,\pi]$ liegt.

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen von 11.25. Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ seien also $u_\lambda\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$Lv + \lambda\,r\,v = 0,\quad (p(a)\,v'(a), v(a)) = (\cos(\alpha),\sin(\alpha)) \tag{358}$$

und ϕ_λ die Argumentfunktion von u_λ. Dann gilt nach 11.25

$$\phi_\lambda(a) = \alpha, \tag{359}$$

und $\phi(x,\lambda) := \phi_\lambda(x)$ hat die Eigenschaften (a) - (d) in 11.25. Ferner folgt aus (358), (359) sowie der Wahl von α

$$R_1(u_\lambda) = \alpha_1\, u_\lambda(a) + \alpha_2\, p(a)\, u'_\lambda(a) = \alpha_1 \sin(\alpha) + \alpha_2 \cos(\alpha) = 0,$$

also

$$\{u \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}) \,|\, Lu + \lambda r\, u = 0 \wedge R_1 u = 0\} = \mathbb{R}\, u_\lambda,$$

denn die linke Seite ist ein eindimensionaler Untervektorraum des zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes

$$V_\lambda := \{u \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}) \,|\, Lu + \lambda r\, u = 0\},$$

da $R_1|_{V_\lambda} \in V_\lambda^* \setminus \{0\}$.[32] Daher folgt

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}}\, \lambda \text{ Eigenwert von (SLE)} \iff \phi(b,\lambda) = \phi_\lambda(b) \in \beta + \mathbb{Z}\pi, \tag{360}$$

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}}\, \lambda \text{ Eigenwert von (SLE)} \implies E_\lambda = \mathbb{R}\, u_\lambda, \tag{361}$$

wobei $\overset{\text{Def.}}{=} \{u \in \mathcal{C}^2(J,\mathbb{R}) \,|\, Lu + \lambda r\, u = 0,\ R_1 u = R_2 u = 0\}$.

[Zu (360): Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\text{l.S.} &\overset{\text{Def.}}{\iff} E_\lambda \neq \{0\} \\
&\iff R_2 u_\lambda = 0 \\
&\iff \beta_1\, u_\lambda(b) + \beta_2\, p(b)\, u'_\lambda(b) = 0 \\
&\iff \beta_1\, \eta_\lambda(b) + \beta_2\, \xi_\lambda(b) = 0 \\
&\iff \beta_1\, \underbrace{\rho_\lambda(b)}_{>0} \sin(\phi_\lambda(b)) + \beta_2\, \underbrace{\rho_\lambda(b)}_{>0} \cos(\phi_\lambda(b)) = 0 \\
&\iff \beta_1 \sin(\phi_\lambda(b)) + \beta_2 \cos(\phi_\lambda(b)) = 0 \\
&\iff (\cos(\phi_\lambda(b)), \sin(\phi_\lambda(b))) \in (\mathbb{R}\,(\beta_2,\beta_1))^\perp \overset{\text{s.o.}}{\ni} (\cos(\beta), \sin(\beta)) \\
&\iff \text{r.S.}
\end{aligned}$$

Mit (360) ist (361) klar.]

Nach 11.25 (a) - (c) ist

$$\begin{aligned}
&\phi(b,\ldots)\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bijektiv und streng monoton wachsend.} \\
&h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ bezeichne die Umkehrfunktion von } \phi(b,\ldots).
\end{aligned} \tag{362}$$

Wir definieren

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, \lambda_n := h(\beta + n\pi), \text{ d.h. } \phi(b,\lambda_n) = \beta + n\pi. \tag{363}$$

Dann folgt aus (360), (362)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, \lambda_n < \lambda_{n+1}$$

und

$$\{\lambda_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \text{ ist die Menge aller Eigenwerte von (SLE).}$$

[32] Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so bezeichnen wir mit V^* den Dualraum von V.

Nach 11.25 (c) existieren $C, D, \lambda_* \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\geq\lambda_*}\, C\sqrt{\lambda} \leq \phi(b,\lambda) \leq D\sqrt{\lambda}.$$

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\phi(b,\lambda_{n_0}) \overset{(363)}{=} \beta + n_0\pi \geq \phi(b,\lambda_*)$. Dann folgt nach (362), daß $\lambda_{n_0} \geq \lambda_*$, also für jedes $n \geq n_0$, d.h. $\lambda_n \geq \lambda_{n_0} \geq \lambda_*$,

$$C^2\lambda_n \leq \underbrace{\phi(b,\lambda_n)^2}_{\overset{(362)}{=}(\beta+n\pi)^2} \leq D^2\lambda_n,$$

also

$$\underbrace{\left(\frac{\beta}{n}+\pi\right)^2\frac{1}{D^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\left(\frac{\pi}{D}\right)^2} \leq \frac{\lambda_n}{n^2} \leq \underbrace{\left(\frac{\beta}{n}+\pi\right)^2\frac{1}{C^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\left(\frac{\pi}{C}\right)^2},$$

woraus offenbar (357) folgt.

Zu (ii): Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach (361) ist der Eigenwert λ_n von (SLE) einfach und $u_n := u_{\lambda_n}$ ist die Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n. 11.20 2.) besagt u.a.

$$\forall_{x\in[a,b]}\ \left(u_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \phi_{\lambda_n}(x) \in \mathbb{Z}\pi\right),$$

ferner gilt

$$\phi_{\lambda_n}(a) \overset{(359)}{=} \alpha \in [0,\pi[\quad \text{sowie} \quad \phi_{\lambda_n}(b) \overset{(363)}{=} \underbrace{\beta}_{\in]0,\pi]} + n\pi \in]n\pi,(n+1)\pi].$$

Nach 11.25 (d) und dem Zwischenwertsatz existiert zu jedem $k \in \{1,\ldots,n\}$ genau ein

$$x_{n,k} \in]a,b[\text{ mit } \phi_{\lambda_n}(x_{n,k}) = k\pi. \tag{364}$$

Es gilt

$$a < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n} < b$$

sowie

$$\phi_{\lambda_n}\left(]a,b[\setminus \{x_{n,1},\ldots,x_{n,n}\}\right) \cap \mathbb{Z}\pi = \varnothing.$$

Damit ist (ii) klar.

Zu (iii): Sei $n \in \mathbb{N}$.

1.) Es seien γ, δ mit $\gamma < \delta$ zwei Nullstellen u_n. (Hierbei ist $\gamma = a$ oder $\delta = b$ möglich.)

Wir wenden den Satz von Sturm-Picone 11.26 mit folgendem Lexikon an:

$$L_1u = (p_1u')' + q_1u \text{ mit } p_1 := p \text{ und } q_1 := q + \lambda_n r,$$
$$L_2u = (p_2u')' + q_2u \text{ mit } p_2 := p \text{ und } q_2 := q + \lambda_{n+1} r,$$

also $p_1 = p_2$ und $q_1 < q_2$. Es gilt $u_n \neq 0$, $L_1u_n = 0$, $u_{n+1} \neq 0$, $L_2u_{n+1} = 0$ und u_n, u_{n+1} sind z.B. nach (ii) linear unabhängig. Nach 11.26 besitzt daher u_{n+1} genau eine Nullstelle in $]\gamma,\delta[$. Damit ist die erste Aussage von (iii) bewiesen.

2.) $x_{n,1}$ ist die kleinste Nullstelle, die größer als a ist, von u_n. Wegen

$$\phi_{\lambda_{n+1}}(a) \overset{(359)}{=} \alpha < \pi$$

und

$$\phi_{\lambda_{n+1}}(x_{n,1}) \overset{11.25(a)}{>} \phi_{\lambda_n}(x_{n,1}) \overset{(364)}{=} \pi$$

existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in]a, x_{n,1}[$ mit $\phi_{\lambda_{n+1}}(x) = \pi$, also nach 11.20 2.) mit $u_{n+1}(x) = 0$.

3.) Im Falle $\beta_2 = 0$ gilt $\beta_1 \neq 0$ sowie $0 = R_2 u_n = \beta_1 u_n(b)$, also $u_n(b) = 0$. Dann folgt aus 1.), daß zwischen $x_{n,n}$, der größten Nullstelle von u_n, die kleiner als b ist, und b eine Nullstelle von u_{n+1} liegt. Die restliche Behauptung von (iii) folgt nunmehr sofort aus (ii). □

Der Beweis des Entwicklungssatzes nach Eigenfunktionen von (SLE) 11.18 benötigt funktonalanalytische Kenntnisse über kompakte selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen. In einer späteren Version dieses Skriptums wird der Autor den (umfangreichen) Beweis evtl. hinzufügen – zunächst sei auf [6] verwiesen.

A Das Lemma von Zorn

Definition A.1. Sei X eine Menge.

(i) Eine *Ordnung von* X ist eine zweistellige Relation $\leq$ (d.h. eine Teilmenge von $X \times X$, wobei wir $x \leq y$ für $(x,y) \in \leq$ schreiben) derart, daß für alle $x,y,z \in X$ gilt:

$x \leq x$ (Reflexivität)
$x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
$x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (Transitivität)

$x,y \in X$ heißen *miteinander vergleichbar*, wenn gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Eine Ordnung heißt *Totalordnung*, wenn je zwei Elemente miteinander vergleichbar sind.

(ii) Ist $\leq$ eine Ordnung von X, so definieren wir für alle $x,y \in X$

$$\begin{aligned} x \geq y &:\Longleftrightarrow y \leq x, \\ x < y &:\Longleftrightarrow (x \leq y \wedge x \neq y), \\ x > y &:\Longleftrightarrow y < x. \end{aligned}$$

(iii) Seien $\leq$ eine Ordnung von X und $a \in X$.

a heißt *größtes Element von* $X :\Longleftrightarrow \forall_{x \in X}\, a \geq x$.
Insbesondere ist ein größtes Element mit allen $x \in X$ vergleichbar.

a heißt *maximales Element von* $X :\Longleftrightarrow \forall_{x \in X}\, (x \geq a \Rightarrow x = a)$,
d.h. ein maximales Element ist $\geq$ allen Elementen, mit denen es vergleichbar ist.

Es gilt:

a größtes Element von $X \Longrightarrow a$ maximales Element von X.
Die Umkehrung ist i.a. falsch.

Es existiert höchstens ein größtes Element von X. Dagegen können viele maximale Elemente von X existieren, s.u. Beispiele.

Analog definiert man die Begriffe *kleinstes Element von* X und *minimales Element von* X.

(iv) Seien $\leq$ eine Ordnung von $\mathcal{X}$, M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathcal{X}$ und $a \in \mathcal{X}$.

a heißt *obere Schranke von* M *(in* X*)*, wenn gilt: $\forall_{x \in M}\, a \geq x$.

a heißt *kleinste obere Schranke von* M *(in* X*)*, wenn a obere Schranke von M ist und für jede obere Schranke $b \in X$ von M gilt $a \leq b$, d.h. a ist kleinstes – nicht nur minimales !! – Element der Menge aller oberen Schranken von M.

Es gilt:

Es existiert höchstens eine kleinste obere Schranke von M, die wir im Falle ihrer Existenz mit $\boxed{\sup M}$ bezeichnen.

Analog definiert man die Begriffe *untere Schranke*, *größte untere Schranke* und das Symbol $\boxed{\inf M}$.

Beispiel.

1.) Auf $X := \mathbb{N}_+$ wird durch

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}_+}\, m \leq_* n :\Longleftrightarrow m|n$$

eine Ordnung definiert, die keine Totalordnung ist, da z.B. weder $5|7$ noch $7|5$ gilt.

1 ist kleinstes Element von $\mathbb{N}_+$ bzgl $\leq_*$.

2.) $\mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$ ist durch $\leq_*$ ebenfalls geordnet und $\mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$ besitzt kein kleinstes Element.

Die Menge der minimalen Elemente ist die Menge aller Primzahlen.

3.) Die übliche Ordnung $\leq$ von $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung.

Hauptsatz A.2 (Lemma von Zorn)**.** *Sei $X \neq \emptyset$ eine bzgl. $\leq$ geordnete Menge mit der Eigenschaft, daß jede bzgl. $\leq$ totalgeordnete nicht-leere Teilmenge von X eine obere Schranke in X besitzt.*
Dann existiert (mindestens) ein maximales Element von X.

Die folgende Formulierung ist zum Lemma von Zorn äquivalent: *Ist $X \neq \emptyset$ eine geordnete Menge ohne maximales Element, so existiert eine totalgeordnete Teilmenge $M \neq \emptyset$ von X, die keine obere Schranke besitzt.*
Wir bereiten den Beweis des Hauptsatzes durch das folgende Lemma vor:

Lemma. *Sei $X \neq \emptyset$ eine bzgl. $\leq$ geordnete Menge mit der Eigenschaft, daß jede bzgl. $\leq$ totalgeordnete nicht-leere Teilmenge von X eine kleinste obere Schranke in X besitzt. Ferner sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung mit $\forall_{x\in X}\, x \leq f(x)$.*
Dann existiert $x_* \in X$ mit $f(x_*) = x_*$.

Beweis des Lemmas. Nach Voraussetzung existiert $a \in X$. Wir setzen $Y := \{y \in X \,|\, y \geq a\}$. Dann gilt $a \in Y$, also $Y \neq \emptyset$, und a ist kleinstes Element von Y. Daher folgt $\forall_{y\in Y}\, a \leq y \leq f(y)$ und somit $f(Y) \subset Y$.
Wir nennen eine Teilmenge A von Y *zulässig*, wenn gilt

a) $a \in A$,

b) $f(A) \subset A$,

c) $\emptyset \neq B \subset A$ und B totalgeordnet bzgl. $\leq \Longrightarrow \sup B \in A$,
beachte, daß $\sup B$ nach Voraussetzung in X existiert,

und setzen $M := \bigcap_{A\subset Y, A \text{ zulässig}} A$. Wir werden zeigen:

$$M \text{ ist zulässig,} \tag{365}$$

$$M \text{ ist totalgeordnet.} \tag{366}$$

Aus (366) und der Voraussetzung des Lemmas folgt dann die Existenz einer kleinsten oberen Schranke $y_* := \sup M$ von M in X, welche nach (365) ein Element von M ist, d.h. $y_* \in M$. Dann gilt für alle $y \in M$

$$y \leq \underbrace{f(y)}_{\substack{(365)\\ \in}\ M} \leq y_*$$

und somit (wegen $y_* \in M$) $f(y_*) = y_*$.

Zu zeigen bleiben (365) und (366).

Zu (365): a) Y ist zulässig, und jede zulässige Menge enthält a, also gilt $a \in M$.

b) Sei $y \in M$, also folgt aus der Definition von M, daß $\forall_{A \subset Y, A \text{ zulässig}}\, y \in A$ gilt. Wegen der Eigenschaft b) in der Definition der Zulässigkeit gilt dann auch $\forall_{A \subset Y, A \text{ zulässig}}\, f(y) \in A$, d.h. $f(y) \in M$. Damit ist gezeigt $f(M) \subset M$.

c) Sei $B \neq \emptyset$ eine totalgeordnete Teilmenge von $M = \bigcap_{A \subset Y, A \text{ zulässig}} A$. Dann gilt $\forall_{A \subset Y, A \text{ zulässig}}\, B \subset A$, also nach Eigenschaft c) in der Definition der Zulässigkeit $\forall_{A \subset Y, A \text{ zulässig}}\, \sup B \in A$, und somit folgt aus der Definition von M: $\sup B \in A$.

Damit ist (365) gezeigt.

Zu (366): Wir nennen ein Element $e \in M$ *extremales Element*, wenn

$$\forall_{y \in M}\, y < e \Longrightarrow f(y) \leq e$$

gilt und setzen für jedes extremale Element $e \in M$

$$M_e := \{y \in M \,|\, y \leq e \vee f(e) \leq y\}.$$

Dann folgen nacheinander

$$e \in M \text{ extremal } \Longrightarrow M_e = M, \tag{367}$$

$$\forall_{y \in M}\, y \text{ extremal}. \tag{368}$$

[Zu (367): Sei $e \in M$ extremal. Wir zeigen, daß M_e zulässig ist.

a) a ist kleinstes Element von Y, und nach (365) gilt $a \in M \subset Y$. Hieraus folgt $a \leq e$, $a \in M_e$.

b) Sei $y \in M_e$, also $y \leq e$ oder $f(e) \leq y$.

Im Falle $y < e$ folgt aus der Extremmalität von e, daß gilt $f(y) \leq e$, also $f(y) \in M_e$.

Im Falle $y = e$ gilt trivialerweise $f(y) = f(e)$, also $f(e) \leq f(y)$ und somit $f(y) \in M_e$.

Im Falle $f(e) \leq y$ gilt wegen der Voraussetzung an f

$$f(e) \leq y \leq f(y),$$

also wieder $f(y) \in M_e$.

Damit ist gezeigt $f(M_e) \subset M_e$.

c) Sei $B \neq \emptyset$ eine totalgeordnete Teilmenge von M_e.

Im Falle $\forall_{b \in B}\, b \leq e$ folgt $\sup B \leq e$ (denn in diesem Fall ist e eine obere Schranke von B und $\sup B$ ist die kleinste solche) und somit $\sup B \in M_e$.

Existiert andernfalls $b_0 \in B \subset M_e$ mit $b_0 > e$, so folgt aus der Defintion von M_e, daß gilt $f(e) \leq b_0 \leq \sup B$, also $\sup B \in M_e$.

Nun ist M der Schnitt aller zulässigen Mengen, also $M \subset M_e$, daher folgt $M = M_e$.

Zu (368): Setze $E := \{e \in M \mid e \text{ extremal}\}$. Wir zeigen, daß E zulässig ist. Dann folgt wieder $E = M = \bigcap_{A \subset Y, A \text{ zulässig}} A$.

a) a ist das kleinste Element von $Y \supset M$, d.h. die Prämisse der Aussage

$$y \in M \wedge y < a \Longrightarrow f(y) \leq a$$

ist immer falsch, d.h. die Aussage ist wahr. Hieraus folgt $a \in E$.

b) Es sei $e \in E$. Wir wollen nachweisen, daß dann auch $f(e) \in E$ gilt, d.h. $\forall_{y \in M}\, y < f(e) \Rightarrow f(y) \leq f(e)$. Sei also $y \in M$ mit $y < f(e)$. Nach (367) gilt $y \in M_e$, d.h. entweder $y < e$ oder $y = e$ oder $f(e) \leq y$, und letzteres kann nicht eintreten, da $y < f(e)$.

Ist $y < e$, so folgt aus der Extremaleigenschaft von e und der Voraussetzung an f, daß gilt $f(y) \leq e \leq f(e)$.

Ist $y = e$, so gilt trivialerweise $f(y) = f(e)$.

c) Sei $B \neq \varnothing$ eine totalgeordnete Teilmenge von E. Zu zeigen ist $\sup B \in E$, d.h.

$$\forall_{y \in M}\, y < \sup B \Longrightarrow f(y) \leq \sup B.$$

Sei also $y \in M$ mit $y < \sup B$.

Im Falle $\forall_{b \in B}\, f(b) \leq y$ gälte auch $\forall_{b \in B}\, b \leq f(b) \leq y$, d.h. y wäre eine obere Schranke von B. Daher folgte (weil $\sup B$ kleinste obere Schranke von B ist) $\sup B \leq y$, im Widerspruch zu $y < \sup B$.

Daher existiert $b_0 \in B \subset E$ mit $f(b_0) > y$. Nach (367) gilt $M = M_{b_0}$, d.h. $y \in M_{b_0}$, also $y \leq b_0 \vee f(b_0) \leq y$. Daher muß $y \leq b_0$ gelten.

Entweder gilt nun $y < b_0$ und (da b_0 extremal) somit $f(y) \leq b_0 \leq \sup B$, oder es gilt $y = b_0$, also $f(y) = f(b_0)$. Aus $B \subset E \subset M$ und (365) folgt dann

$$\sup B \in M \overset{(367)}{=} M_{b_0},$$

und somit gilt nach Definition von M_{b_0} wegen $b_0 = y < \sup B$

$$f(y) = f(b_0) \leq \sup B.$$

Damit ist auch (368) gezeigt.]

Aus (367), (368) folgt jetzt, daß M totalgeordnet ist:

Seien nämlich $y_1, y_2 \in M$. Nach (368) ist y_1 extremal, also folgt aus (367) $y_2 \in M_{y_1}$, d.h.

$$y_2 \leq y_1 \quad \text{oder} \quad \underbrace{f(y_1) \leq y_2}_{\Rightarrow y_1 \leq f(y_1) \leq y_2} .$$

Damit ist auch (366) bewiesen, und hierauf hatten wir das Lemma zurückgeführt. □

Beweis des Hauptsatzes. 1. Fall: Jede nicht-leere totalgeordnete Teilmenge von X hat eine kleinste obere Schranke in X. Wir nehmen dann an, daß X kein maximales Element besitzt. Dann gilt

$$\forall_{x\in X}\, X_{>x} := \{y \in X \,|\, y > x\} \neq \varnothing.$$

Aus dem Auswahlaxiom folgt daher $\bigtimes_{x\in X} X_{>x} \neq \varnothing$, d.h. es existiert eine Abbildung $f\colon X \to X$ mit $\forall_{x\in X}\, f(x) \in X_{>x}$. Es gilt also

$$\forall_{x\in X}\, f(x) > x. \tag{369}$$

Aus (369) und dem Lemma folgt die Existenz von $x_* \in X$ mit $f(x_*) = x_*$, im Widerspruch zu (369).

2. Fall: Jede nicht-leere totalgeordnete Teilmenge von X hat eine obere Schranke in X. (D.i. ist die Voraussetzung des Hauptsatzes.) Sei dann

$$\widetilde{X} := \{A \in \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \,|\, A \text{ totalgeordnet bzgl. } \leq\}.$$

Durch

$$\forall_{A,B\in\widetilde{X}}\, A \preceq B :\Longleftrightarrow A \subset B$$

wird eine Ordnung auf $\widetilde{X}$ definiert, und jede nicht-leere bzgl. $\preceq$ totalgeordnete Teilmenge von $\widetilde{X}$ besitzt eine kleinste obere Schranke in $\widetilde{X}$.

[Denn ist $(A_i)_{i\in I}$ eine nicht-leere bzgl. $\preceq$ totalgeordnete Teilmenge von $\widetilde{X}$, so ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ bzgl. $\leq$ totalgeordnet[33] und offenbar (bzgl. $\preceq$) die kleinste obere Schranke von $(A_i)_{i\in I}$ in $\widetilde{X}$.]

Aus dem bereits bewiesenen 1. Fall folgt nun die Existenz eines (bzgl. $\preceq$) maximalen Elementes $\widetilde{X}_0$ von $\widetilde{X}$. Insbesondere gilt $\widetilde{X}_0 \neq \varnothing$, und $\widetilde{X}_0$ ist eine bzgl. $\leq$ totalgeordnete Teilmenge von X. Nach Voraussetzung des Hauptsatzes besitzt $\widetilde{X}_0$ eine obere Schranke $a \in X$. Dann ist a maximales Element von X bzgl $\leq$:

Sei nämlich $x \in X$ mit $x \geq a$. Dann ist $\widetilde{X}_0 \cup \{x\}$ totalgeordnet bzgl. $\leq$ mit $\widetilde{X}_0 \preceq \widetilde{X}_0 \cup \{x\}$. Wegen der Maximalität von $\widetilde{X}_0$ bzgl. $\preceq$ gilt dann $\widetilde{X}_0 = \widetilde{X}_0 \cup \{x\}$, d.h. $x \in \widetilde{X}_0$. Nun ist a obere Schranke von $\widetilde{X}_0$, also folgt $a \geq x$. Nach Wahl von x gilt aber auch $x \geq a$, also folgt $a = x$.

Damit ist das Lemma von Zorn vollständig bewiesen. □

Wir haben das Zornsche Lemma unter Verwendung des Auswahlaxiomes bewiesen. Tatsächlich ist es zum Auswahlaxiom äquivalent.

[33] Seien $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Dann existieren $i_0, i_1 \in I$ mit $x \in A_{i_0}$ und $y \in A_{i_1}$. Da $(A_i)_{i\in I}$ totalgeordnet bzgl. $\preceq$ ist, gilt ohne Einschränkung $A_{i_0} \subset A_{i_1}$, also $x, y \in A_{i_1}$. Nun ist aber $A_{i_1} \in \widetilde{X}$, also totalgeordnet bzgl. $\leq$, d.h. $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Literatur

[1] W. Henke: *Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichungen*, WS 2001/2002, Universität zu Köln.

[2] H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner (2006).

[3] F. Hirzebruch, W. Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis*, Bibliographisches Institut (1971).

[4] E. Kamke: *Differentialgleichungen – Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner (1983).

[5] E. Kamke: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Chelsea Publishing Company (1947).

[6] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer (1993).

Index

Anfangswertaufgabe, 1
Argumentfunktion, 153

Bahn, 106

d'Alembertsches Reduktionsverfahren, 59, 75
Defekt, 85
Differentialgleichung
  Alembertsche, 53
  autonome, 5, 106
  Bernoullische, 11
  Clairautsche, 51
  Eulersche, 82
  exakte, 42
  explizite, 1
  gewöhnliche, 1
  homogene, 9
  lineare – n-ter Ordnung, 73
  lineare – 1. Ordnung, 6, 55
  lineares System von –en 1. Ordnung, 55
  mit getrennten Variablen, 3
  partielle, 2
  Riccatische, 13
  System von –en, 2
Differntialgleichung
  Ähnlichkeits-, 10
dynamisches System, 108

Eigenfunktion, 149
Eigenwert, 68
  von (SLE), 149
Einhüllende, 52
Element
  größtes, 170
  kleinstes, 170
  maximales, 170
  minimales, 170
Enveloppe, 52
Equilibrium, 107
Eulerscher Multiplikator, 45
Exponentialabbildung für Endomorphismen, 64

Fluß eines Vektorfeldes, 107
  vollständiger, 107
Fourier
  -Reihe, 151
Fundamentalsystem, 56, 74
Funktion
  Greensche, 141
  ungerade, 150

Gleichgradige Stetigkeit, 15
Greensche Funktion, 141
Grundlösung, 138

Integralkurve, 106
Integration durch Differentiation, 49
Intervall, nicht-entartet, 1

Komplexifizierung, 69

Lagrange-Identität, 135
Lemma
  von Gronwall, 90
  von Zorn, 171
Linienelementefeld, 3, 40, 47
Lipschitz
  –Bedingung, 15
  –Bedingung bzgl. y, 30
  –Konstante, 15, 30
  lokal – -stetig, 106
  lokale – -Bedingung bzgl. y, 31

Orbit, 106
Ordnung, 170

Phasenportrait, 108
Phasenraum, 108
Potential, 42
Prüfer-Transformation, 152

Randbedingung, 133
  Sturmsche, 133
Randwertaufgabe
  Sturmsche, 134
    homogene, 134
Reduktionsverfahren von d'Alembert, 59, 75

Satz
(In-)Stabilitäts-, 120, 122
Begradigungs-, 108
Entwicklungs– nach Eigenfunktionen von (SLE), 151
Existenz- und Eindeutigkeits–
für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung, 55
von Picard-Lindelöf, 32–34
Existenz- und Eindeutigkeits– für Randwertaufgaben, 146
Existenz– von Eigenwerten und -funktionen von (SLE), 151, 165
Existenz– von Peano, 23, 26, 27
Fixpunkt– von Banach, 29
von Arzela-Ascoli, 16
von Sturm-Picone, 164
Schranke
größte untere, 171
kleinste obere, 170
obere, 170
untere, 171
Stabilität, 115
asymptonische, 115
In-, 115
Stammfunktion einer Differentialform, 42
stationärer Punkt einer autonomen Differentialgleichung, 107
Stetige partielle Differenzierbarkeit nach y, 31
Stromlinie, 106
Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem (SLE), 148
System von Differentialgleichungen, 2
lineares – 1. Ordnung, 55

Totalordnung, 170

Variation der Konstanten, 7, 63, 77
Vektorfeld, 106
vollständiges, 107

Wronski-Determinante, 58, 75

Zornsches Lemma, 171