Kriterien für kompakte Hyperflächen, sphärisch zu sein

Diplomarbeit
von
Christoph Bock

angefertigt im Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von
Herrn Professor Dr. Wolfgang Henke

Köln
Sommersemester 2002

Die vorliegende Version meiner Diplomarbeit ist von mir nach der Abgabe noch einmal überarbeitet worden.

Christoph Bock

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Eine m-dimensionale Hyperfläche einer riemannschen Mannigfaltigkeit heißt sphärisch, wenn sie zu einer Sphäre des E^{m+1} isometrisch ist. Wie wir in 5.2 zeigen werden, sind Beispiele hierfür m-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeiten von M_C^{m+1} [1], die Abstands-Sphären sind, d.h. genau die Punkte enthalten, die von einem $q_0 \in M_C^{m+1}$ konstanten Abstand haben. Möchte man den Nachweis erbringen, daß eine Hyperfläche in M_C^{m+1} sphärisch ist, genügt es daher zu zeigen, daß sie eine solche m-dimensionale Abstands-Sphäre ist.

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Veröffentlichung [5] von Fontenele und Silva, in der die Autoren beweisen ([5, Theorem A]), daß eine kompakte und zusammenhängende Hyperfläche im E^{m+1}, die in einem abgeschlossenen Ball vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$ enthalten und deren Skalarkrümmung stets kleiner oder gleich dem konstanten Wert der Skalarkrümmung der Sphäre vom Radius r in E^{m+1} ist, bereits die Sphäre ist.

Sie führen dies auf das folgende allgemeinere Resultat zurück ([5, Theorem B]):

Eine kompakte und zusammenhängende Hyperfläche im E^{m+1}, deren quadrierte Stützfunktion multipliziert mit der Skalarkrümmung stets kleiner oder gleich Eins ist, ist eine Sphäre.

Wie sich herausstellte, funktionieren die von Fontenele und Silva angegebenen Beweise nicht nur im $E^{m+1} = M_0^{m+1}$, sondern auch für analoge Ergebnisse über Hyperflächen der Standard-Räume konstanter Krümmung C kleiner Null, (siehe Abschnitt 5.3).

Da die Voraussetzung $C \leq 0$ für die Beweisführung entscheidend ist, stellte sich die Frage, ob ein ähnliches Resultat wie [5, Theorem A] auch für die Standard-Räume konstanter Krümmung größer Null gilt.

Dies führte zur Betrachtung der Arbeit [15] von Veeravalli, der nachweist ([15, Theorem 1], Hauptsatz 5.4.2), daß eine kompakte und zusammenhängende Hyperfläche von M_C^{m+1} mit $m \geq 3$ und $C \geq 0$, die in einem abgeschlossenen normalen Ball vom Radius $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[$ enthalten und deren Ricci-Krümmung stets kleiner oder gleich dem konstanten Wert der Ricci-Krümmung der Abstands-Sphäre vom Radius r in M_C^{m+1} ist, bereits die Sphäre ist.

Dies folgt aus einem erheblich allgemeineren hinreichenden Kriterium

[1] d.i. der $(m+1)$-dimensionale Standard-Raum konstanter Krümmung C, vgl. Satz 1.2.1

([15, Theorem 2], Hauptsatz 5.4.1) für sphärische Hyperflächen in vollständigen und zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nach oben durch eine Zahl größer oder gleich Null beschränkter Krümmung.

Die Veröffentlichung [11] von Markvorsen wurde in die Betrachtung mit einbezogen, da sie ein von Fontenele und Silva formuliertes Korollar verallgemeinert. Markvorsen beweist ([11, Theorem 2], Hauptsatz 5.5.1), daß eine kompakte und zusammenhängende Hyperfläche in einer vollständigen und zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit mit durch $C \in \mathbb{R}$ nach oben beschränkter Krümmung sphärisch ist, wenn sie in einem abgeschlossenen normalen Abstands-Ball vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$ (bzw. $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[$, falls $C > 0$) enthalten und ihre mittlere Krümmung betraglich kleiner oder gleich $\mathrm{k}_C(r)$ ist, wobei $\mathrm{k}_C(r)$ der konstante Wert des Betrages der mittleren Krümmung einer Sphäre vom Radius r im Standard-Raum konstanter Krümmung C ist.

Die o.g. Resultate werden im fünften Kapitel bewiesen, die vorherigen vier haben überwiegend vorbereitenden Charakter.

Der Beweis der Sätze von Fontenele und Silva ist sehr rechnerisch. Neben einer Einführung der Objekte, die in den Hauptsätzen in Kapitel 5 als Voraussetzungen zugrunde gelegt sind, enthält das erste Kapitel einen Großteil der für den Nachweis dieser Sätze notwendigen Überlegungen.

Kapitel 2 stellt bekannte Resultate zusammen, wie z.B. das Index-Lemma, die Sätze von Sard, Rauch und Omori sowie das Hopf-Lemma. Die hier aufgeführten Ergebnisse werden im weiteren Verlauf der Arbeit als Hilfsmittel benötigt.

Die Beweise von [15, Theorem 1] und [11, Theorem 2] werden auf dieselbe Art und Weise geführt:

Unter gewissen Voraussetzungen sind die Abstands-Sphären einer vollständigen und zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit mit nach oben beschränkter Krümmung isometrisch zu einer Sphäre des E^{m+1}. Ist dies der Fall, so genügt es wieder zu zeigen, daß eine Hyperfläche eine Abstands-Sphäre ist, um zu beweisen, daß sie sphärisch ist. Beim Nachweis hiervon kann es nützlich sein, zunächst mittels des Hopf-Lemmas zu begründen, daß das Quadrat der Abstandsfunktion konstant ist. Hierfür benötigt man allerdings Differenzierbarkeit.

Daher beschäftigen wir uns in Kapitel 3 mit der Abstandsfunktion in riemannschen Mannigfaltigkeiten nach oben beschränkter Krümmung. In solchen Mannigfaltigkeiten bestimmen wir Umgebungen, auf denen das Quadrat der Abstandsfunktion differenzierbar ist, und betrachten den Gradienten bzw. die Hesseform. Für letztere weisen wir eine Ungleichung nach, die u.a. bei der Überprüfung der Voraussetzungen des Hopf-Lemmas dienlich ist.

Im vierten Kapitel betrachten wir eine Hyperfläche in einer vollständigen und zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$, deren Krümmung kleiner oder gleich $C \in \mathbb{R}$ ist. Wir weisen (in Satz 4.5) zunächst Mindestgrößen der Beträge der Hauptkrümmungen in Punkten, in denen die Abstandsfunktion maximal wird, nach. Hieraus folgern wir (in Satz 4.9), daß eine Abstands-Sphäre in $\widetilde{M}$, deren mittlere Krümmung betraglich gleich einer gewissen Konstante ist, isometrisch zu einer Sphäre des E^{m+1} ist.

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln ist das vierte keine reine Vorbereitung der Beweise der oben genannten Hauptsätze. Ist eine Hyperfläche M kompakt, so existiert ein minimales $r \in \mathbb{R}_+$ derart, daß M in einem Ball vom Radius r enthalten ist. Ist dieser Ball normal, so läßt sich mit dem oben erwähnten Satz 4.5 zeigen, daß das Supremum des Betrages der mittleren Krümmung auf M größer oder gleich $\mathrm{k}_C(r)$ ist, wobei $\mathrm{k}_C(r)$ der konstante Wert des Betrages der mittleren Krümmung der Sphäre vom Radius r im Standard-Raum konstanter Krümmung C ist. (Im Falle $C > 0$, muß man zusätzlich fordern, daß $r < \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$ gilt.) Markvorsen erwähnt in [11, Theorem 1], daß diese Aussage richtig bleibt, wenn M lediglich vollständig anstatt kompakt ist und nach unten beschränkte Skalarkrümmung hat. Diesen Beweis werden wir in Kapitel 4 (Hauptsatz 4.7) ebenfalls darstellen.

Kapitel 1

Vorbereitungen

Generalvoraussetzungen

Seien stets $m, \widetilde{m} \in \mathbb{N}$ mit $m, \widetilde{m} \geq 2$.

Ist im folgenden von Differenzierbarkeit die Rede, so ist damit immer C^∞-Differenzierbarkeit gemeint.

Wir setzen die Ergebnisse aus [7] und [8] als bekannt voraus und verwenden – soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt – zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit die dort eingeführten Symbole. Reden wir von einer kovarianten Ableitung ∇, so meinen wir damit stets die Levi-Civita kovariante Ableitung. (Eine Auflistung der in dieser Arbeit verwendeten Symbole findet sich im Anhang.) Wenn in einem Zusammenhang zwei oder drei riemannsche Mannigfaltigkeiten auftreten, so verwenden wir dieselben Symbole, versehen mit $\widetilde{\ }$ bzw. $\widetilde{\widetilde{\ }}$.

1.1 Krümmungsgrößen

Abweichend von [7] definieren wir die Ricci- und die Skalarkrümmung einer riemannschen Mannigfaltigkeit M:

Definition 1.1.1 (Ricci- und Skalarkrümmung)**.** Sei M eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Durch

$$\forall_{X,Y \in \mathfrak{V}_M} \operatorname{Ric}(X,Y) := \operatorname{Spur}(\mathrm{R}(\ldots, X)Y)$$

wird ein differenzierbares Tensorfeld vom Typ $(2,0)$ auf M definiert. Dann existiert offenbar genau ein differenzierbares Tensorfeld $\overline{\operatorname{Ric}}$ vom Typ $(1,1)$ mit $\forall_{X,Y \in \mathfrak{V}_M} \langle \overline{\operatorname{Ric}}(X), Y \rangle = \operatorname{Ric}(X,Y)$. Ric bzw. $\overline{\operatorname{Ric}}$ heißt das *Ricci-Tensorfeld vom Typ* $(2,0)$ *bzw. vom Typ* $(1,1)$ *auf* M. Ric ist offenbar symmetrisch, also ist $\overline{\operatorname{Ric}}$ selbstadjungiert.

(ii) Die *Ricci-Krümmung von M* ist per definitionem die Abbildung

$$\mathfrak{r}\colon\ T^1M \longrightarrow \mathbb{R},$$

definiert durch

$$\begin{aligned}\forall_{p\in M}\forall_{v\in T_p^1M}\ \mathfrak{r}(v) \quad &:= \quad \frac{\mathrm{Ric}_p(v,v)}{m-1} = \frac{\sum_{i=1}^m \langle \mathrm{R}_p(v_i,v)v, v_i\rangle}{m-1} \\ &= \quad \frac{\sum_{i=2}^m \mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v,v_i\})}{m-1},\end{aligned}$$

falls $v_1,\dots,v_m$ eine Orthonormalbasis von T_pM mit $v=v_1$ ist.

(iii) Die *Skalarkrümmung von M* ist per definitionem die Abbildung

$$\mathfrak{s}\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R},$$

definiert durch

$$\forall_{p\in M}\ \mathfrak{s}(p) := \frac{\mathrm{Spur}(\overline{\mathrm{Ric}_p})}{m(m-1)} = \frac{\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}_p(v_i,v_i)}{m(m-1)} \overset{(ii)}{=} \frac{\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^m \mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v_i,v_j\})}{m(m-1)},$$

falls $v_1,\dots,v_m$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist.

Definition 1.1.2. Sei $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion einer m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M in eine $\widetilde{m}$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$.

(i) $\alpha\colon\ \mathfrak{V}_M \times \mathfrak{V}_M \to \mathfrak{V}_f^\perp$ bezeichne die *vektorwertige zweite Fundamentalform* von f, und für $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ beliebig seien

$$A_\xi\colon\ \mathfrak{V}_M \longrightarrow \mathfrak{V}_M \quad \text{bzw.} \quad h_\xi\colon\ \mathfrak{V}_M \times \mathfrak{V}_M \longrightarrow C_M^\infty$$

der *zweite Fundamentaltensor* bzw. die *zweite Fundamentalform von f bzgl. ξ*.

Ferner seien $\varphi_1^\xi \leq \ldots \leq \varphi_m^\xi\colon\ G\xi \to \mathbb{R}$ die (stetigen) *Hauptkrümmungen von f bzgl. ξ*.

(ii) Für jedes $j \in \{1,\dots,m\}$ und jedes $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ definieren wir die *j-te mittlere Krümmung* als die stetige Funktion

$$\mathrm{H}_{\xi,j} := \frac{\sum_{i_1<\ldots<i_j} \varphi_{i_1}^\xi \cdots \varphi_{i_j}^\xi}{\binom{m}{j}}\colon\ G\xi \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Für $j=1$ erhält man die wohlbekannte differenzierbare *mittlere Krümmung* $\mathrm{H}_\xi = \mathrm{H}_{\xi,1}$ *von f bzgl. ξ* und für $j=m$ die *Gauß-Kroneckersche Krümmung von f bzgl. ξ*.

Bemerkung.

1.) Statt $\varphi_i^\xi, \mathrm{H}_{\xi,j}$ bzw. H_ξ schreiben wir im folgenden, sofern keine Verwechslungen auftreten können, auch φ_i, H_j bzw. H.

2.) Bekanntlich gilt für jedes $p \in M$ und jede Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_m$ von T_pM: $\quad \mathrm{H}_\xi(p) = \frac{1}{m} \sum \langle A_\xi(w_i), w_i \rangle$.

3.) Es gilt für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ $\varphi_i^\xi = -\varphi_{m-i+1}^{-\xi}$. Daher ist im Falle $\widetilde{m} = m+1$ für $j \in \{1, \ldots, m\} \cap 2\mathbb{N}$ und $p \in M$ obige Definition von $\mathrm{H}_{\xi,j}(p)$ und $\mathrm{H}_\xi^2(p)$ unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$, und für diese j sind

$$\mathrm{H}_j\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}^2\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |\mathrm{H}|\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf ganz M wohldefinierte Funktionen.

4.) Für alle $p \in M$, $v, w \in T_pM$ und $\xi_1, \ldots, \xi_{\widetilde{m}-m} \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, \ldots, \widetilde{m} - m\}$ gilt

$$\alpha(v, w) = \sum_{i=1}^{\widetilde{m}-m} \langle \alpha(v, w), \xi_i|_p \rangle \xi_i|_p = \sum_{i=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_i}(v, w) \xi_i|_p = \sum_{i=1}^{\widetilde{m}-m} \langle A_{\xi_i}(v), w \rangle \xi_i|_p.$$

Als nächstes wollen wir im Falle $\widetilde{m} = m + 1$ eine Längenfunktion der vektorwertigen zweiten Fundamentalform $\|\alpha\|\colon M \to \mathbb{R}$ definieren. (Beachte, daß α eine Abbildung $\mathfrak{V}_M \times \mathfrak{V}_M \to \mathfrak{V}_f^\perp$ ist.) Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.1.3. *Es seien V ein m-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$ beliebig. Für eine Basis $\mathfrak{B}$ von V bezeichne*

$$A^{\mathfrak{B}} = (a_{ij}^{\mathfrak{B}})_{i,j} \in \mathrm{M}(m, m; \mathbb{R})$$

die Matrix von A bzgl. $\mathfrak{B}$.

Dann gilt für je zwei orthonormale Basen $\mathfrak{E}, \widetilde{\mathfrak{E}}$ $\quad \sum_{i,j=1}^m (a_{ij}^{\mathfrak{E}})^2 = \sum_{i,j=1}^m (a_{ij}^{\widetilde{\mathfrak{E}}})^2$ *und durch* $\quad \forall_{A \in End(V)} \|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^m (a_{ij}^{\mathfrak{E}})^2}$, *wobei $\mathfrak{E}$ eine beliebige Orthonormalbasis von V ist, wird eine Norm auf* $\mathrm{End}(V)$ *definiert.*

Beweis: Seien $\mathfrak{E}, \widetilde{\mathfrak{E}}$ zwei Orthonormalbasen von V und $A \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert nach linearer Algebra $T = (T_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}(m)$ mit

$$A^{\widetilde{\mathfrak{E}}} = TA^{\mathfrak{E}}T^{-1} \overset{T \in O(m)}{=} TA^{\mathfrak{E}}T^\tau,$$

also gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_{ij}^{\widetilde{\mathfrak{E}}} = \sum_{k,l=1}^{m} T_{ik} a_{kl}^{\mathfrak{E}} T_{jl}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij}^{\widetilde{\mathfrak{E}}})^2 &= \sum_{i,j=1}^{m} (\sum_{k,l=1}^{m} T_{ik} a_{kl}^{\mathfrak{E}} T_{jl})(\sum_{\widetilde{k},\widetilde{l}=1}^{m} T_{i\widetilde{k}} a_{\widetilde{k}\widetilde{l}}^{\mathfrak{E}} T_{j\widetilde{l}}) \\
&= \sum_{k,l,\widetilde{k},\widetilde{l}=1}^{m} \underbrace{(\sum_{i=1}^{m} T_{ik} T_{i\widetilde{k}})}_{=\delta_{k\widetilde{k}}} \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} T_{jl} T_{j\widetilde{l}})}_{=\delta_{l\widetilde{l}}} a_{kl}^{\mathfrak{E}} a_{\widetilde{k}\widetilde{l}}^{\mathfrak{E}} \\
&= \sum_{k,l=1}^{m} (a_{kl}^{\mathfrak{E}})^2.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij}^{\mathfrak{E}})^2}$ unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $\mathfrak{E}$ von V ist.

Daß die Abbildung $\| \dots \|$ wie im Lemma die ersten beiden Axiome einer Norm erfüllt, ist trivial, und das dritte Axiom folgt aus der Minkowski-Ungleichung. $\square$

Definition 1.1.4. Seien M eine m-dimensionale, $\widetilde{M}$ eine $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion.

Wir definieren $\|\alpha\|\colon\ M \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{p \in M}\ \|\alpha(p)\| = \underbrace{\| \underbrace{A_{\xi_0}}_{\in \mathrm{End}(T_pM)} \|}_{\text{vgl. 1.1.3}}, \quad \text{wobei } \xi_0 \in \perp_p^1 (f) \text{ beliebig.}$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi_0 \in \perp_p^1 (f)$ wegen $\|A_{-\xi_0}\| = \| - A_{\xi_0}\| \overset{1.1.3}{=} \|A_{\xi_0}\|$.

Nach Lemma 1.1.3 gilt für jedes $p \in M$ und jede Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_m$ von T_pM sowie $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\|\alpha(p)\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \langle A_\xi(v_i), v_j\rangle^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} h_\xi(v_i, v_j)^2}\,, \tag{1.1}$$

insbesondere

$$\|\alpha(p)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\varphi_i^{\xi}(p))^2}\,. \tag{1.2}$$

Lemma 1.1.5. *Seien M eine m-dimensionale, $\widetilde{M}$ eine $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion.*

Dann gilt:

$$\mathrm{H}_2 \;\leq\; \mathrm{H}^2 \;\leq\; \frac{\|\alpha\|^2}{m}$$

Beachte, daß H_2 und H^2 nach 1.1.2 Bemerkung 3.) auf ganz M wohldefinierte Funktionen sind.

Beweis: Zunächst gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\forall_{x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}} \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{1.3}$$

[Denn aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \;&=\; (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \langle \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\rangle^2\\ &\leq\; (\,\| \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \|\,\| \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \|\,)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;]\end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas kann nun auf (1.3) zurückgeführt werden.
Wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_2 \;&=\; \frac{\sum_{i<j}\varphi_i\varphi_j}{\binom{m}{2}} = \frac{2\sum_{i<j}\varphi_i\varphi_j}{m(m-1)} = \frac{\sum_{i\neq j}\varphi_i\varphi_j}{m(m-1)},\\ \mathrm{H}^2 \;&=\; (\frac{\sum_i \varphi_i}{m})^2 = \frac{\sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j}{m^2},\\ \frac{\|\alpha\|^2}{m} \;&=\; \frac{\sum_i \varphi_i^2}{m}\end{aligned}$$

ergibt sich $\mathrm{H}^2 \leq \frac{\|\alpha\|^2}{m} \Leftrightarrow (1.3)$ und

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_2 \leq \mathrm{H}^2 \;&\Longleftrightarrow\; m\sum_{i\neq j}\varphi_i\varphi_j \;\leq\; (m-1)\sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j \;=\; (m-1)(\sum_i \varphi_i^2 + \sum_{i\neq j}\varphi_i\varphi_j)\\ &\Longleftrightarrow\; \sum_{i\neq j}\varphi_i\varphi_j \;\leq\; (m-1)\sum_i \varphi_i^2\\ &\Longleftrightarrow\; \sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j \leq m\sum_i \varphi_i^2\\ &\Longleftrightarrow\; (1.3).\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.1.6. *Seien $M, \widetilde{M}$ m- bzw. $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion. Ferner sei $\widetilde{M}$ von konstanter Krümmung $C \in \mathbb{R}$.*

Dann folgt:

(i) $\mathfrak{s} = C + \mathrm{H}_2$

(ii) Für alle $p \in M$, $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$ und $v \in T_pM$ gilt

$$\mathrm{Ric}(v,v) = (m-1)C\|v\|^2 + m\mathrm{H}_\xi(p)\langle A_\xi(v), v\rangle - \|A_\xi(v)\|^2 \tag{1.4}$$

$$m^2\mathrm{H}^2(p) = \|\alpha(p)\|^2 + m(m-1)\mathrm{H}_2(p). \tag{1.5}$$

Beweis: Seien $p \in M$, $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$ beliebig und $v_1, \ldots, v_m$ eine Orthonormalbasis von Hauptkrümmungsrichtungen zu den Hauptkrümmungen $\varphi_1(p), \ldots, \varphi_m(p)$ von f bzgl. ξ_p.

Zu (i):
Aus der Gauß-Gleichung [7, 8.6(2) incl. Zusätze] folgt für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$

$$\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v_i, v_j\}) = C + h_\xi(v_i, v_i)h_\xi(v_j, v_j) - h_\xi(v_i, v_j)^2 = C + \varphi_i(p)\varphi_j(p) - 0$$

und daher

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}(p) &\overset{1.1.1(iii)}{=} \frac{\sum_{i\neq j}\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v_i, v_j\})}{m(m-1)} = C + \frac{\sum_{i\neq j}\varphi_i(p)\varphi_j(p)}{m(m-1)} \\ &= C + \frac{2\sum_{i<j}\varphi_i(p)\varphi_j(p)}{m(m-1)} = C + \frac{\sum_{i<j}\varphi_i(p)\varphi_j(p)}{\binom{m}{2}} \\ &\overset{1.1.2(ii)}{=} C + \mathrm{H}_2(p)\,,\end{aligned}$$

d.h. es gilt (i).

Zu (ii):
Sei $v \in T_pM$ beliebig. Ist $v = 0$, so steht auf beiden Seiten von (1.4) Null, und es ist nichts zu zeigen. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, daß $v \neq 0$ gilt und eine Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_m$ mit $\frac{v}{\|v\|} = w_1$ finden. Dann folgt aus der Gauß-Gleichung [7, 8.6(1) incl.Zusätze] für $i \neq 1$

$$\begin{aligned}&\mathrm{R}(w_i, w_1)w_1 \\ &\quad= C\big(\langle w_1, w_1\rangle w_i - \langle w_i, w_1\rangle w_1\big) + h_\xi(w_1, w_1)A_\xi(w_i) - h_\xi(w_i, w_1)A_\xi(w_1) \\ &\quad= C\underbrace{\|w_1\|^2}_{=1} w_i + h_\xi(w_1, w_1)A_\xi(w_i) - h_\xi(w_i, w_1)A_\xi(w_1)\,,\end{aligned}$$

also nach Definition 1.1.1(i)

$$\mathrm{Ric}(w_1, w_1) = \sum_{i=2}^{m}\langle \mathrm{R}(w_i, w_1)w_1, w_i\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^{m} \big(C \underbrace{\langle w_i, w_i\rangle}_{=1} + h_\xi(w_1,w_1)\langle A_\xi(w_i), w_i\rangle - h_\xi(w_i,w_1)\langle A_\xi(w_1), w_i\rangle\big)\\
&= (m-1)C + \sum_{i=2}^{m} \big(\langle A_\xi(w_1), w_1\rangle\langle A_\xi(w_i), w_i\rangle - \langle A_\xi(w_1), w_i\rangle^2\big)\\
&= (m-1)C + \sum_{i=1}^{m} \big(\underbrace{\langle A_\xi(w_1), w_1\rangle\langle A_\xi(w_i), w_i\rangle - \langle A_\xi(w_1), w_i\rangle^2}_{\text{für i=1 steht hier Null}}\big)\\
&= (m-1)C + \langle A_\xi(w_1), w_1\rangle\big(\sum_{i=1}^{m}\langle A_\xi(w_i), w_i\rangle\big) - \langle A_\xi(w_1), \sum_{i=1}^{m}\langle A_\xi(w_1), w_i\rangle w_i\rangle\\
&= (m-1)C + \langle A_\xi(w_1), w_1\rangle\, m\, \mathrm{H}_\xi(p) - \langle A_\xi(w_1), A_\xi(w_1)\rangle.
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $\|v\|^2$ und erhalten wegen $v = w_1\|v\|$ die Gültigkeit von Formel (1.4).

Weiterhin gilt, da die $v_1, \ldots, v_m$ Hauptkrümmungsrichtungen sind,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}(p) &= \frac{\sum_{j=1}^m \mathrm{Ric}(v_j, v_j)}{m(m-1)}\\
&\overset{(1.4)}{=} \frac{\sum_{j=1}^m \big((m-1)C + mH_\xi(p)\langle A_\xi(v_j), v_j\rangle - \langle A_\xi(v_j), A_\xi(v_j)\rangle\big)}{m(m-1)}\\
&= \frac{m(m-1)C + m^2\mathrm{H}^2(p) - \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(p)}{m(m-1)}\\
&\overset{(1.2)}{=} C + \frac{m^2}{m(m-1)}\mathrm{H}^2(p) - \frac{\|\alpha(p)\|^2}{m(m-1)}\,.
\end{aligned}
$$

Daher folgt aus (i)

$$
\begin{aligned}
C + \mathrm{H}_2(p) &= C + \tfrac{m^2}{m(m-1)}\mathrm{H}^2(p) - \tfrac{\|\alpha(p)\|^2}{m(m-1)},\\
m^2\mathrm{H}^2(p) &= \|\alpha(p)\|^2 + m(m-1)\mathrm{H}_2(p),
\end{aligned}
$$

d.h. es gilt auch (1.5). □

1.2 Die Standard-Räume konstanter Krümmung und die Abstandsfunktion

Satz 1.2.1 (Die Standard-Räume konstanter Krümmung)**.** *Für jedes $C \in \mathbb{R}$ existiert eine (bis auf Isometrie) eindeutig bestimmte einfach-zusammenhängende vollständige m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit M_C^m von konstanter Krümmung C, der sog. m-*dimensionale Standard-Raum konstanter Krümmung *C, nämlich* *(i)* $M_C^m\,(=S_C^m\,)=\{q\in E^{m+1}|\langle q,q\rangle=\frac{1}{C}\}\overset{\iota}{\hookrightarrow}E^{m+1}$, *falls* $C>0$,

(ii) $M_C^m=E^m$, *falls* $C=0$,

(iii) $M_C^m\,(=H_C^m\,)=\{q\in L^{m+1}|\langle q,q\rangle=\frac{1}{C}\wedge q_1>0\}\overset{\iota}{\hookrightarrow}L^{m+1}$, *falls* $C<0$,

wobei die Einbettung ι *in (i) und (iii) jeweils eine isometrische Einbettung ist.*

Ferner existiert im Falle $C>0$ *ein raum- und im Falle* $C<0$ *ein zeitartiges Einheitsnormalenfeld* $N\in\mathfrak{V}_\iota^\perp(M_C^m)$ *mit* $\overrightarrow{N}=\sqrt{|C|}\,\iota$, *insbesondere gilt*

$$\forall_{q\in M_C^m}\ \overrightarrow{\perp_q(\iota)}=\mathbb{R}\,\iota(q)\ \wedge\ \overrightarrow{\iota_*T_qM_C^m}=\big(\mathbb{R}\,\iota(q)\big)^\perp. \tag{1.6}$$

Beweis: Siehe [7, 8.8, 12.20 und 8.5]. □

Da der Standard-Raum konstanter Krümmung Null als euklidischer Vektorraum eine metrische Struktur besitzt, ist klar, was z.B. unter einer Sphäre vom Radius $r\in\mathbb{R}_+$ zu verstehen ist. Um dies auch in allgemeineren riemannschen Mannigfaltigkeiten zu ermöglichen, benötigt man auch dort eine Metrik, die der folgende Satz zumindest für eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit bereitstellt.

Satz 1.2.2 (Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume)**.** *Sei* M *eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.*

(i) Durch

$$\delta(q_0,q):=\inf\{\text{Länge}(\gamma)\,|\quad \gamma \textit{ stückweise differenzierbarer Weg in } M \textit{ von } q_0 \textit{ nach } q\}$$

wird eine Metrik $\delta\colon\ M\times M\to[0,\infty[$ *auf* M *definiert.*

(ii) Die kanonische Topologie des metrischen Raumes $(|M|,\delta)$ *stimmt mit der Topologie der riemannschen Mannigfaltigkeit* M *überein.*

Beweis: Siehe [7, 10.22]. □

Definition 1.2.3 (Abstandsfunktion und Abstands-Sphären)**.** Sei M eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Für jedes $q_0\in M$ wird die *Abstandsfunktion von* q_0 $\delta_{q_0}\colon\ M\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall_{q\in M}\,\delta_{q_0}(q):=\delta(q_0,q)\in[0,\infty[.$$

δ_{q_0} ist stetig (s.u.) und die Menge der Punkte, in denen δ_{q_0} sogar differenzierbar ist, bezeichnen wir mit $G\delta_{q_0}$.

[Beweis der Stetigkeit von δ_{q_0}: Es genügt offenbar zu zeigen, daß für alle $r,s\in\mathbb{R}_+$ mit $r<s$ die Mengen $\overline{\delta_{q_0}}^{1}([0,r[)$ und $\overline{\delta_{q_0}}^{1}(]r,s[)$ offen in M sind, und dies ist nach 1.2.2(ii) klar.]

(ii) Für $q_0 \in M$ und $r \in \mathbb{R}_+$ setzen wir:

$B_r(q_0) := \{q \in M | \delta_{q_0}(q) \leq r\}$ *den (abgeschlossenen) Ball um q_0 vom Radius r*

$U_r(q_0) := \{q \in M | \delta_{q_0}(q) < r\}$ *die (offene) r-Umgebung von q_0*

$S_r(q_0) := \{q \in M | \delta_{q_0}(q) = r\}$ *die (abgeschlossene) r-Sphäre um q_0*

(iii) Für jede Teilmenge V von M definieren wir den *(topologischen) Rand* ∂V von V durch $\partial V := \overline{V} \setminus \overset{\circ}{V}$.

Bemerkung.

1.) $S_r(q_0)$ ist i.a. nicht kompakt.

Denn z.B. für die reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit $E^2 \setminus \{(1,0)\}$ von E^2 gilt $S_1(0_{E^2}) = \{x \in E^2 \setminus \{(1,0)\} \,|\, \langle x, x\rangle = 1\}$, und diese Menge ist nicht kompakt.

2.) I.a. gilt nicht $\partial B_r(q_0) = S_r(q_0)$.

Denn ist $C \in \mathbb{R}_+$, so gilt für die riemannsche Mannigfaltigkeit M_C^m (d.i. die Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{C}}$ im E^{m+1}) für jedes $q_0 \in M_C^m$

$$B_{\frac{\pi}{\sqrt{C}}}(q_0) = M_C^m\,, \quad \overline{B_{\frac{\pi}{\sqrt{C}}}(q_0)} = \overset{\circ}{\widehat{B_{\frac{\pi}{\sqrt{C}}}(q_0)}} = M_C^m \quad \text{und} \quad \partial B_{\frac{\pi}{\sqrt{C}}}(q_0) = \emptyset.$$

3.) Man beachte, daß im Falle $M = E^{m+1}$ für $C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ die Menge $S_C(0_{E^{m+1}})$ wie in (ii) <u>nicht</u> mit der der riemannschen Mannigfaltigkeit $M_C^m = S_C^m$ zugrundeliegenden Menge (vgl. 1.2.1(i)) übereinstimmt. Letztere ist nämlich gleich $S_{\frac{1}{\sqrt{C}}}(0_{E^{m+1}})$, und es gilt offenbar $S_C(0_{E^{m+1}}) \neq S_{\frac{1}{\sqrt{C}}}(0_{E^{m+1}})$. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden wir statt S_C^m im folgenden nur noch M_C^m schreiben.

Das folgende Beispiel zeigt unter anderem, daß die Metrik der riemannschen Mannigfaltigkeit E^m mit der durch den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^m$ induzierten Metrik übereinstimmt.

Beispiel 1.2.4 (Die Abstandsfunktion in den Standard-Räumen). *Für je zwei Punkte $q, q_0 \in M_C^m$ gilt*

$$\delta_{q_0}(q) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\operatorname{arccos}(C\,\langle\iota(q),\iota(q_0)\rangle)}{\sqrt{C}} & : & C > 0 \\ \|q - q_0\| & : & C = 0 \\ \frac{\operatorname{arcosh}(C\,\langle\iota(q),\iota(q_0)\rangle)}{\sqrt{|C|}} & : & C < 0 \end{array} \right\}, \tag{1.7}$$

wobei ι wie in Satz 1.2.1 sei.

Im Falle $C \leq 0$ ist δ_{q_0} auf $M_C^m \backslash \{q_0\}$ und im Falle $C > 0$ auf $M_C^m \backslash \{q_0, -q_0\}$ differenzierbar, d.h. $G\delta_{q_0} = M_C^m \backslash \{q_0\}$ für $C \leq 0$ bzw. $G\delta_{q_0} = M_C^m \backslash \{q_0, -q_0\}$ für $C > 0$.

Ferner gilt für $C < 0$ bzw. $C > 0$ $\forall_{q \in G\delta_{q_0}} C\langle \iota(q_0), \iota(q)\rangle \in]1, \infty[$ bzw. $]-1, 1[$.

Beweis: 1.) Sei zunächst $C = 0$.
Dann gilt $r_{q_0} = \infty$, wobei r_{q_0} den Injektivitätsradius in q_0 bezeichne.

Sei $q \neq q_0$ und $v \in T^1_{q_0} E^m$ mit $\overrightarrow{v} = \frac{q - q_0}{\|q - q_0\|}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon \quad [0, \|q - q_0\|] &\longrightarrow E^m \\ t &\longmapsto q_0 + t\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

nach [7, Ü 85] eine Geodätische von q_0 nach q und es folgt aus [7, 10.14(ii)]

$$\delta_{q_0}(q) = \mathit{Länge}(\gamma) = \int_0^{\|q-q_0\|} \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \int_0^{\|q-q_0\|} dt = \|q - q_0\|.$$

Im Falle $q = q_0$ gilt ferner $d_{q_0}(q) = 0 = \|q - q_0\|$.

Die Differenzierbarkeit von δ_{q_0} auf $E^m \setminus \{q_0\}$ ist klar.

2.) Sei $C < 0$, dann gilt ebenfalls $r_{q_0} = \infty$.
Nach dem Beweis des Satzes von der freien Beweglichkeit [7, 8.9] existiert eine Isometrie $l\colon\ L^{m+1} \to L^{m+1}$ mit $l(H_C^m) = H_C^m$ sowie $l(q_0) = (\frac{1}{\sqrt{|C|}}, 0_{\mathbb{R}^m})$, und es folgt für alle $q \in H_C^m$

$$C\langle q_0, q\rangle = C\langle l(q_0), l(q)\rangle = C(-\tfrac{1}{\sqrt{|C|}} l(q)_1) = \sqrt{|C|}\, l(q)_1 \overset{l(q)\in H_C^m}{\geq} 1 \tag{1.8}$$
mit Gleichheit genau dann, wenn $l(q_0) = l(q)$, d.h. $q_0 = q$.

2a) Sei $q \in H_C^m$ mit $q \neq q_0$. Dann existiert

$$v \in T_{q_0} H_C^m \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\iota_* v} = \frac{\sqrt{|C|} q + |C|^{3/2} \langle q_0, q\rangle q_0}{\sqrt{|C|}\sinh(\operatorname{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle))}. \tag{1.9}$$

[Denn einerseits ist der Nenner wegen $q \neq q_0$ und (1.8) nicht Null, andererseits gilt nach 1.2.1(1.6) $\overrightarrow{\iota_* T_{q_0} H_C^m} = (\mathbb{R}q_0)^\perp$, und es ist

$$\langle q_0, \sqrt{|C|} q + |C|^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0\rangle = \sqrt{|C|}\langle q_0, q\rangle + |C|^{3/2}\langle q_0, q\rangle \underbrace{\langle q_0, q_0\rangle}_{=\frac{1}{C} = -\frac{1}{|C|}} = 0. \ ]$$

Es gilt

$$\|v\| = \|\iota_* v\| = \frac{1}{\sqrt{|C|}}. \tag{1.10}$$

[Zu (1.10):

$$\langle \iota_* v, \iota_* v\rangle = \frac{\langle \sqrt{|C|}q + |C|^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0, \sqrt{|C|}q + |C|^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0\rangle}{|C| \sinh^2(\,\mathrm{arcosh}(\,C\langle q_0, q\rangle\,)\,)}$$
$$= \frac{1}{|C|(|C|^2\langle q_0, q\rangle^2 - 1)}(|C|\underbrace{\langle q, q\rangle}_{=-\frac{1}{|C|}} + 2\underbrace{\sqrt{|C|}|C|^{3/2}}_{=|C|^2}\langle q_0, q\rangle^2 + |C|^3\langle q_0, q\rangle^2\underbrace{\langle q_0, q_0\rangle}_{=-\frac{1}{|C|}})$$
$$= \frac{-1 + |C|^2\langle q_0, q\rangle^2}{|C|(|C|^2\langle q_0, q\rangle^2 - 1)} = \frac{1}{|C|}\ ]$$

Nach [7, Ü 85] ist $\gamma\colon\ [0, \mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)] \to H^m_C$ definiert durch

$$\gamma(t) \quad := \quad \frac{1}{\sqrt{|C|}}\Big(\cosh(\sqrt{|C|}\,\|v\|\,t)\,\frac{q_0}{\|q_0\|} + \sinh(\sqrt{|C|}\,\|v\|\,t)\,\overrightarrow{\iota_*(\frac{v}{\|v\|})}\Big)$$
$$\overset{(1.10), q_0 \in H^m_C}{=} \quad \cosh(t)\,q_0 + \sinh(t)\,\overrightarrow{\iota_* v}$$

eine Geodätische von q_0 nach

$$\gamma\Big(\mathrm{arcosh}\big(C\langle q_0, q\rangle\big)\Big) = C\langle q_0, q\rangle q_0 + \sinh\big(\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)\big)\overrightarrow{\iota_* v}$$
$$\overset{(1.9)}{=} \underbrace{C}_{-|C|}\langle q_0, q\rangle q_0 + \frac{1}{\sqrt{|C|}}(\sqrt{|C|}q + |C|^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0) = q,$$

und es gilt nach [7, 10.14(ii)] (wegen $r_{q_0} = \infty$)

$$\delta_{q_0}(q) = \mathit{Länge}(\gamma) = \int_0^{\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)} \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$
$$= \int_0^{\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)} \|(\widehat{\cosh(t)q_0 + \sinh(t)\overrightarrow{\iota_* v}})^{\cdot}\|\,dt$$
$$\overset{1.2.1(1.6)}{=} \int_0^{\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)} (\sinh^2(t)\underbrace{\langle q_0, q_0\rangle}_{=-\frac{1}{|C|}} + \cosh^2(t)\underbrace{\langle \iota_* v, \iota_* v\rangle}_{=\frac{1}{|C|}})^{1/2}\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{|C|}}\int_0^{\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)} dt = \frac{\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q\rangle)}{\sqrt{|C|}}.$$

2b) Im Falle $q = q_0$ ist ferner nach (1.8) klar, daß gilt:

$$\delta_{q_0}(q) = 0 = \frac{1}{\sqrt{|C|}}(\mathrm{arcosh}(1)) = \frac{1}{\sqrt{|C|}}(\mathrm{arcosh}(C\langle q_0, q_0\rangle))$$

Damit ist (1.7) im Falle $C < 0$ gezeigt.

Die Differenzierbarkeit von δ_{q_0} auf $H^m_C \setminus \{q_0\}$ folgt schließlich aus (1.7),(1.8) und der Differenzierbarkeit von arcosh auf $]1,\infty[$.

3.) Sei $C > 0$, dann gilt $r_{q_0} = \frac{\pi}{\sqrt{C}}$.
Nach dem Beweis des Satzes von der freien Beweglichkeit [7, 8.9] existiert eine Isometrie $l\colon\ E^{m+1} \to E^{m+1}$ mit $l(M^m_C) = M^m_C$ sowie $l(q_0) = (\frac{1}{\sqrt{C}}, 0_{\mathbb{R}^m})$, und es folgt für alle $q \in M^m_C$

$$\begin{array}{c} C\langle q_0, q\rangle = C\langle l(q_0), l(q)\rangle = \sqrt{C}\, l(q)_1 \overset{l(q)\in M^m_C}{\in} [-1,1] \\ \text{und } \ C\langle q_0, q\rangle = \pm 1 \ \text{ genau dann, wenn } \ l(q_0) = \pm l(q), \text{ d.h. } q_0 = \pm q. \end{array} \tag{1.11}$$

3a) Sei $q \in M^m_C$ mit $q \neq \pm q_0$. Dann existiert

$$v \in T_{q_0} M^m_C \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\iota_* v} = \frac{\sqrt{C} q - C^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0}{\sqrt{C}\sin(\arccos(C\langle q_0, q\rangle))}. \tag{1.12}$$

[Denn einerseits ist der Nenner wegen $q \neq \pm q_0$ und (1.11) nicht Null, andererseits gilt nach 1.2.1(1.6) $\overrightarrow{\iota_* T_{q_0} M^m_C} = (\mathbb{R} q_0)^\perp$, und es ist

$$\langle q_0, \sqrt{C} q - C^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0\rangle = \sqrt{C}\langle q_0, q\rangle - C^{3/2}\langle q_0, q\rangle \underbrace{\langle q_0, q_0\rangle}_{=\frac{1}{C}} = 0. \quad]$$

Es gilt

$$\|v\| = \|\iota_* v\| = \frac{1}{\sqrt{C}}. \tag{1.13}$$

[Zu (1.13):

$$\begin{aligned} \langle \iota_* v, \iota_* v\rangle &= \frac{\langle \sqrt{C} q - C^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0, \sqrt{C} q - C^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0\rangle}{C\sin^2(\,\arccos(\,C\langle q_0, q\rangle\,)\,)} \\ &= \frac{1}{C(1 - C^2\langle q_0, q\rangle^2)}(C\underbrace{\langle q, q\rangle}_{=\frac{1}{C}} - 2\underbrace{\sqrt{C} C^{3/2}}_{=C^2}\langle q_0, q\rangle^2 + C^3\langle q_0, q\rangle^2 \underbrace{\langle q_0, q_0\rangle}_{=\frac{1}{C}}) \\ &= \frac{1 - C^2\langle q_0, q\rangle^2}{C(1 - C^2\langle q_0, q\rangle^2)} = \frac{1}{C} \ ] \end{aligned}$$

Nach [7, Ü 85] ist $\gamma\colon\ [0, \arccos(C\langle q_0, q\rangle)] \to M^m_C$ definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) \quad &:= \quad \frac{1}{\sqrt{C}}\Big(\cos(\sqrt{C}\,\|v\|\,t)\,\frac{q_0}{\|q_0\|} + \sin(\sqrt{C}\,\|v\|\,t)\,\overrightarrow{\iota_*(\frac{v}{\|v\|})}\Big) \\ &\overset{(1.13), q_0\in M^m_C}{=} \quad \cos(t)\, q_0 + \sin(t)\,\overrightarrow{\iota_* v} \end{aligned}$$

eine Geodätische von q_0 nach

$$\gamma\Big(\arccos\big(C\langle q_0, q\rangle\big)\Big) = C\langle q_0, q\rangle q_0 + \sin\big(\arccos(C\langle q_0, q\rangle)\big)\overrightarrow{\iota_* v}$$

$$\overset{(1.12)}{=} C\langle q_0, q\rangle q_0 + \frac{1}{\sqrt{C}}(\sqrt{C}q - C^{3/2}\langle q_0, q\rangle q_0) = q,$$

und es gilt nach [7, 10.14(ii)] (wegen $r_{q_0} = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \overset{(1.11),\, q_0 \neq \pm q}{>} \frac{\arccos(C\langle q_0,q\rangle)}{\sqrt{C}}$)

$$\begin{aligned}
\delta_{q_0}(q) = \mathit{L\ddot{a}nge}(\gamma) &= \int_0^{\arccos(C\langle q_0,q\rangle)} \|\dot\gamma(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{\arccos(C\langle q_0,q\rangle)} \|\widehat{(\cos(t)q_0 + \sin(t)\overrightarrow{\iota_* v})}^{\cdot}\|\, dt \\
&\overset{1.2.1(1.6)}{=} \int_0^{\arccos(C\langle q_0,q\rangle)} (\sin^2(t)\underbrace{\langle q_0, q_0\rangle}_{=\frac{1}{C}} + \cos^2(t)\underbrace{\langle \iota_* v, \iota_* v\rangle}_{=\frac{1}{C}})^{1/2}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{C}} \int_0^{\arccos(C\langle q_0,q\rangle)} dt = \frac{\arccos(C\langle q_0, q\rangle)}{\sqrt{C}}.
\end{aligned}$$

3b) Da δ_{q_0} nach 1.2.3(i) stetig ist, folgt aus dem in 3a) gezeigten auch

$$\delta_{q_0}(q_0) = 0 = \frac{1}{\sqrt{C}}(\arccos(1)) = \frac{1}{\sqrt{C}}(\arccos(C\langle q_0, q_0\rangle))$$

und

$$\delta_{q_0}(-q_0) = \frac{\pi}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{C}}(\arccos(-1)) = \frac{1}{\sqrt{C}}(\arccos(C\langle q_0, q_0\rangle)).$$

Damit ist (1.7) auch im Falle $C > 0$ gezeigt.

Die Differenzierbarkeit von δ_{q_0} auf $M_C^m \setminus \{\pm q_0\}$ ergibt sich schließlich aus (1.7),(1.11) und der Differenzierbarkeit von arccos auf $]-1,1[$.

Die restliche Behauptung folgt aus (1.8) und (1.11). □

1.3 Richtungsvektorfeld und Stützfunktion

Definition 1.3.1. Wir definieren für jedes $C \in \mathbb{R}$ die differenzierbare Funktion $\mathrm{s}_C\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{t\in[0,\infty[} \quad \mathrm{s}_C(t) := \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{C})}{\sqrt{C}} & : \quad C > 0 \\ t & : \quad C = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{|C|})}{\sqrt{|C|}} & : \quad C < 0 \end{cases}$$

Definition 1.3.2 (Richtungsvektorfeld und Stützfunktion)**.** Seien M eine m-dimensionale, $\widetilde{M}$ eine $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltikeit konstanter Krümmung $C \in \mathbb{R}$, $q_0 \in \widetilde{M}$ und $f\colon M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion mit $f(M) \subset G\delta_{q_0}$ (d.h. δ_{q_0} ist in allen Punkten $f(p)$ mit $p \in M$ differenzierbar).

(i) Durch $\forall_{p\in M} \quad X_p := \mathrm{s}_C\Big(\delta_{q_0}\big(f(p)\big)\Big)\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p)}\delta_{q_0}$ wird ein differenzierbares Vektorfeld längs f auf M, das sog. *Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0*, definiert.

(ii) Sei $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$. Die *Stützfunktion von f bzgl. q_0 in Richtung ξ* ist per definitionem die differenzierbare Funktion $\rho_{q_0,\xi}\colon G\xi \to \mathbb{R}$, die durch $\forall_{p\in M}\, \rho_{q_0,\xi}(p) = \langle X_p, \xi_p\rangle$ gegeben ist.

Bemerkung.

1.) Statt $\rho_{q_0,\xi}$ schreiben wir im folgenden, sofern keine Verwechslungen auftreten können, auch ρ_{q_0}.

2.) $\rho^2_{q_0,\xi}(p)$ ist offenbar für jedes $p \in M$ unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$. Daher ist

$$\rho^2_{q_0}\colon\, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

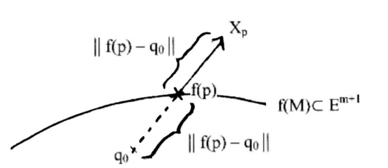
eine auf ganz M wohldefinierte differenzierbare Funktion.

Beispiel 1.3.3 (Richtungsvektorfeld im Standard-Raum)**.** *Seien M eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $C \in \mathbb{R}$, $q_0 \in M_C^{m+1}$, $f\colon\, M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion mit*

$$f(M) \subset G\delta_{q_0} \overset{1.2.4}{=} \left\{ \begin{array}{lcl} M_C^{m+1} \setminus \{\pm q_0\} & : & C > 0 \\ M_C^{m+1} \setminus \{q_0\} & : & C \leq 0 \end{array} \right\}$$

und X das Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0.

(i) Im Falle $C = 0$ gilt $\overrightarrow{X} = f - q_0$.



(ii) Und im Falle $C \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\iota_* X} &= -\big(\iota(q_0) - \langle \iota(q_0), \overrightarrow{N\circ f}\rangle \langle \overrightarrow{N\circ f}, \overrightarrow{N\circ f}\rangle\, \overrightarrow{N\circ f}\big) \\ &= -\big(\iota(q_0) - C\,\langle \iota(q_0), \iota\circ f\rangle\, \iota\circ f\big)\,, \end{aligned}$$

wobei $\iota\colon\, M_C^{m+1} \hookrightarrow E^{m+2}$ (im Falle $C > 0$) bzw. $\iota\colon\, M_C^{m+1} \hookrightarrow L^{m+2}$ (im Falle $C < 0$) und $N \in \mathfrak{V}_\iota^\perp(M_C^{m+1})$ wie in 1.2.1 seien.

(iii) Für alle $r \in \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C \leq 0 \end{array} \right\}$ *und* $p \in M$ *gilt:*

$$\big(\|X_p\| = \mathrm{s}_C(r) \,\wedge\, \delta_{q_0}(f(p)) \in \left\{ \begin{array}{c}]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[\\ \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \big) \quad \Longleftrightarrow \quad f(p) \in S_r(q_0)$$

Beweis: Zu (i):
Sei $C = 0$, also $M_C^{m+1} = E^{m+1}$. Dann gilt nach Beispiel 1.2.4

$$\delta_{q_0} = \|id - q_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} (x_i - q_{0,i})^2}$$

und folglich auf $E^{m+1} \setminus \{q_0\}$

$$\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\,\delta_{q_0}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} (x_i - q_{0,i})^2}} (x_1 - q_{0,1}\,, \ldots,\, x_{m+1} - q_{0,m+1}) = \frac{1}{\delta_{q_0}} (\mathrm{id} - q_0)\,,$$

also folgt aus $\mathrm{s}_0 = \mathrm{id}$ (vgl. 1.3.1): $\overrightarrow{X} = (\mathrm{s}_0 \circ \delta_{q_0}\, \overrightarrow{\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\,\delta_{q_0}}) \circ f = f - q_0$

Zu (ii):
Sei $C \neq 0$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}$ den Gradienten in $\left\{ \begin{array}{c} E^{m+2} \\ L^{m+2} \end{array} \right\}$ und definieren differenzierbare Funktionen $A_C := \frac{1}{\sqrt{|C|}} \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{arccos}\colon\,]-1,1[\to \mathbb{R} \\ \mathrm{arcosh}\colon\,]1,\infty[\to \mathbb{R} \end{array} \right\}$ und $g_C := C\langle \ldots, \iota(q_0) \rangle\colon \left\{ \begin{array}{c} E^{m+2} \to \mathbb{R} \\ L^{m+2} \to \mathbb{R} \end{array} \right\}$. Dann gilt nach Beispiel 1.2.4 auf $G\delta_{q_0}$

$$\delta_{q_0} = A_C \circ g_C \circ \iota. \tag{1.14}$$

Hieraus und aus [7, Ü 59] folgt auf $G\delta_{q_0}$ $\widetilde{\mathrm{grad}}\,\delta_{q_0} = A'_C \circ g_C \circ \iota\; \widetilde{\mathrm{grad}}\,(g_C \circ \iota)$.

Für jeden differenzierbaren Weg $\gamma\colon\,]-\varepsilon,\varepsilon[\to G\delta_{q_0}$ gilt

$$\langle \widetilde{\mathrm{grad}}\,(g_C \circ \iota), \dot\gamma \rangle = \dot\gamma \cdot (g_C \circ \iota) = \iota_*\dot\gamma \cdot g_C = \langle \widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\, g_C, \iota_*\dot\gamma \rangle = \langle {}^{T\iota}\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\, g_C, \dot\gamma \rangle$$

und folglich

$$\widetilde{\mathrm{grad}}\,\delta_{q_0} = A'_C \circ g_C \circ \iota\; {}^{T\iota}\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\, g_C. \tag{1.15}$$

Wir berechnen ${}^{T\iota}\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\, g_C$:
Zunächst gilt

$$\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{\mathrm{grad}}}\, g_C} = C\iota(q_0). \tag{1.16}$$

[Denn ist $\mu\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to \left\{\begin{array}{c} E^{m+2} \\ L^{m+2} \end{array}\right\}$ ein beliebiger differenzierbarer Weg, so folgt

$$\langle \overrightarrow{\widetilde{\widetilde{\widetilde{\operatorname{grad}}}}\, g_C}, \overrightarrow{\dot{\mu}} \rangle = \langle \widetilde{\widetilde{\widetilde{\operatorname{grad}}}}\, g_C, \dot{\mu} \rangle = (g_C \circ \mu)' = C\langle \iota(q_0), \mu' \rangle = C\langle \iota(q_0), \overrightarrow{\dot{\mu}} \rangle\,,$$

also gilt (1.16).]

Nach Satz 1.2.1 ist $N \in \mathfrak{V}_\iota^\perp(M_C^{m+1})$ ein $\left\{\begin{array}{c} \text{raumartiges} \\ \text{zeitartiges} \end{array}\right\}$ Einheitsnormalenfeld mit $\overrightarrow{N} = \sqrt{|C|}\,\iota$. Aus (1.16) ergibt sich daher weiter

$$\overrightarrow{\iota_*{}^{T\iota}\widetilde{\widetilde{\widetilde{\operatorname{grad}}}}\, g_C} = C\,\big(\iota(q_0) \mp \langle \iota(q_0), \sqrt{|C|}\,\iota \rangle\, \sqrt{|C|}\,\iota\big) = C\,\big(\iota(q_0) - C\,\langle \iota(q_0), \iota \rangle\, \iota\big)\,,$$

also nach (1.15) auf $G\delta_{q_0}$

$$\overrightarrow{\iota_* \widetilde{\operatorname{grad}}\, \delta_{q_0}} = C A_C' \circ g_C \circ \iota\ \ \big(\iota(q_0) - C\,\langle \iota(q_0), \iota \rangle\, \iota\big)\,.$$

Hieraus und aus $\mathrm{s}_C \circ \delta_{q_0} = -\frac{1}{C\,A_C' \circ g_C \circ \iota}$ (Beweis s.u.) folgt wegen $f(M) \subset G\delta_{q_0}$

$$\overrightarrow{\iota_* X} = (\mathrm{s}_C \circ \delta_{q_0}\ \iota_* \widetilde{\operatorname{grad}}\, \delta_{q_0}) \circ f = -\big(\iota(q_0) - C\,\langle \iota(q_0), \iota \circ f \rangle\, \iota \circ f\big)\,,$$

d.h. (ii) gilt.

Zum Nachweis von $\mathrm{s}_C \circ \delta_{q_0} = -\frac{1}{C\,A_C' \circ g_C \circ \iota}$ genügt es wegen (1.14) zu zeigen

$$\underset{x \in \left\{\begin{array}{c}]-1,1[\\ ]1,\infty[\end{array}\right\}}{\forall}\ \mathrm{s}_C \circ A_C(x) = -\frac{1}{C\,A_C'(x)} = \sqrt{\frac{|1-x^2|}{|C|}}\,. \tag{1.17}$$

[Zu (1.17):

1. $C > 0$: Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in]-1,1[$ gilt

$$\mathrm{s}_C(t) = \tfrac{\sin(\sqrt{C}t)}{\sqrt{C}},\ \ A_C(x) = \tfrac{\arccos(x)}{\sqrt{C}},\ \ C\,A_C'(x) = -\tfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\underbrace{\mathrm{s}_C \circ A_C(x)}_{>0})^2 = \tfrac{\sin^2(\arccos(x))}{C} = \tfrac{1-x^2}{C} = (\underbrace{-\frac{1}{C\,A_C'(x)}}_{>0})^2.$$

2. $C < 0$: Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in]1,\infty[$ gilt

$$\mathrm{s}_C(t) = \tfrac{\sinh(\sqrt{|C|}t)}{\sqrt{|C|}},\ \ A_C(x) = \tfrac{\operatorname{arcosh}(x)}{\sqrt{|C|}},\ \ C\,A_C'(x) = \tfrac{C}{\sqrt{|C|(x^2-1)}} = -\tfrac{\sqrt{|C|}}{\sqrt{x^2-1}},$$
$$(\underbrace{\mathrm{s}_C \circ A_C(x)}_{>0})^2 = \tfrac{\sinh^2(\operatorname{arcosh}(x))}{|C|} = \tfrac{x^2-1}{|C|} = (\underbrace{-\frac{1}{C\,A_C'(x)}}_{>0})^2\,.]$$

Zu (iii):
Im Falle $C = 0$ ist (iii) klar nach (i). Sei also $C \neq 0$.
Wir setzen $J := \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C < 0 \end{array} \right\}$. Dann gilt nach der Definiton von s_C

$$\mathrm{s}_C \colon J \to \mathrm{s}_C(J) \quad \text{ist bijektiv und } > 0. \tag{1.18}$$

Seien $r \in J$ und $p \in M$ mit $f(p) \in S_r(q_0)$, also (wegen $f(M) \subset G\delta_{q_0}$)

$$\begin{aligned}
&\delta_{q_0}(f(p)) = r \\
&\quad \overset{(1.14)}{\Longleftrightarrow} A_C \circ g_C \circ \iota(f(p)) = r \overset{(1.18)}{\Longleftrightarrow} \mathrm{s}_C \circ A_C \circ g_C \circ \iota(f(p)) = \mathrm{s}_C(r) \ \wedge \ r \in J \\
&\quad \overset{\text{Def. } g_C}{\Longleftrightarrow} \mathrm{s}_C \circ A_C\big(C\langle \iota(q_0), \iota(f(p))\rangle\big) = \mathrm{s}_C(r) \ \wedge \ r \in J \\
&\quad \overset{(1.18)}{\Longleftrightarrow} \mathrm{s}_C^2 \circ A_C\big(C\langle \iota(q_0), \iota(f(p))\rangle\big) = \mathrm{s}_C^2(r) \ \wedge \ r \in J
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (iii) auch im Falle $C \neq 0$, da nach (ii)

$$\begin{aligned}
\|X\|^2 &= \|\iota(q_0) - C\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle \, \iota \circ f\|^2 \\
&= |\underbrace{\langle \iota(q_0), \iota(q_0)\rangle}_{=\frac{1}{C}} - 2C\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle^2 + C^2\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle^2 \underbrace{\langle \iota \circ f, \iota \circ f\rangle}_{=\frac{1}{C}}| \\
&= |\frac{1}{C} - C\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle^2| = \frac{1}{|C|}|1 - C^2\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle^2|
\end{aligned}$$

und somit nach (1.17) (wegen $f(M) \subset G\delta_{q_0} \overset{1.2.4}{\Rightarrow} C\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle \in \left\{ \begin{array}{c}]-1, 1[\\ ]1, \infty[\end{array} \right\}$)

$$\|X_p\|^2 = \mathrm{s}_C^2 \circ A_C\big(C\langle \iota(q_0), \iota(f(p))\rangle\big).$$

$\square$

Bemerkung. Seien $f \colon M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion einer m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit in den Standard-Raum konstanter Krümmung $C \neq 0$ und $q_0 \in M_C^{m+1}$. $\iota \colon M_C^{m+1} \to E^{m+2}$ (im Falle $C > 0$) bzw. $\iota \colon M_C^{m+1} \to L^{m+2}$ (im Falle $C < 0$) und $N \in \mathfrak{V}_\iota^\perp(M_C^{m+1})$ seien wie im Beispiel.

Sei Y das eindeutig bestimmte globale Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{m+2}$ mit $\overrightarrow{Y} = \mathrm{id} - q_0$. Dann ist $X := ({}^{T_\iota}(Y \circ \iota)) \circ f$ ein <u>globales</u> differenzierbares Vektorfeld mit

$$\overrightarrow{\iota_* X} = -\big(\iota(q_0) - C\,\langle \iota(q_0), \iota \circ f\rangle \, \iota \circ f\big).$$

Daher ist die Voraussetzung $f(M) \subset G\delta_{q_0}$ im Falle einer isometrischen Immersion in M_C^{m+1} zur Definition des Richtungsvektorfeldes von f bzgl. q_0 nicht notwendig.

Unser nächstes Ziel ist es, für isometrische Immersionen $f\colon\ M \to M_C^{m+1}$ einer m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M in den $(m+1)$-dimensionalen Standard-Raum konstanter Krümmung $C \in \mathbb{R}$, den Wert des Ricci-Tensorfeldes vom Typ $(2,0)$, angewandt auf die zurückgeholte tangentiale Komponente des Richtungsvektorfeldes von f, $\mathrm{Ric}({}^T X, {}^T X)$ auszurechnen (siehe 1.3.6). Dessen Kenntnis wird beim Beweis der Sätze von Fontenele und Silva entscheidend sein. Für die Berechnung benötigen wir die beiden folgenden Lemmata, die im weiteren sonst keine Rolle mehr spielen werden.

Lemma 1.3.4. *Seien M eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$.*

Dann existiert ein auf einer Umgebung von p in M definiertes orthonormales differenzierbares m-Beinfeld $(E_1, \ldots, E_m)$ mit $\forall_{i,j \in \{1,\ldots,m\}}\, \nabla_{E_i|_p} E_j = 0$.

Beweis: Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Orthonormalbasis von T_pM.
Für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ist nach [7, 9.4(iv)]

$$\exp_p|_{U_\varepsilon(0_p)}\colon\ U_\varepsilon(0_p) \longrightarrow U_\varepsilon(p) \text{ ein Diffeomorphismus.} \tag{1.19}$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} G\colon & U_\varepsilon(0_p) \times [0,1] & \longrightarrow & U_\varepsilon(p) \\ & (v,t) & \longmapsto & \exp_p(tv) \end{array} \tag{1.20}$$

ist dann offenbar differenzierbar. Folglich ist auch

$$g := G(\ldots, 0)\colon\ U_\varepsilon(0_p) \longrightarrow U_\varepsilon(p) \text{ differenzierbar,}$$

und für alle $v \in U_\varepsilon(0_p)$ ist

$$\begin{array}{c} \gamma_v := G(v, \ldots)\colon\ [0,1] \longrightarrow U_\varepsilon(p) \text{ ein differenzier-} \\ \text{barer Weg in } M \text{ mit } \gamma_v(0) = p \text{ und } \dot\gamma_v(0) = v. \end{array} \tag{1.21}$$

Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ setzen wir

$$\begin{array}{rrcl} Y^i\colon & U_\varepsilon(0_p) & \longrightarrow & TM\,, \\ & v & \longmapsto & e_i \end{array} \tag{1.22}$$

also $\forall_{v \in U_\varepsilon(0_p)}\, Y^i_v = e_i \in T_{\underbrace{p}_{=g(v)}} U_\varepsilon(p)$, $\quad Y^i \in \mathfrak{V}_g(U_\varepsilon(0_p))$. Nach [7, 6.17(L6)] existiert genau ein $\widetilde{Y}^i \in \mathfrak{V}_G(U_\varepsilon(0_p) \times [0,1])$ mit

$$\forall_{v \in U_\varepsilon(0_p)}\, \widetilde{Y}^i(v, \ldots) \text{ parallel längs } \gamma_v \text{ mit } \widetilde{Y}^i(v,0) = Y^i_v \tag{1.23}$$

$$\forall_{(v,t) \in U_\varepsilon(0_p) \times [0,1]}\, \widetilde{Y}^i(v,t) = \mathrm{L}_{\gamma_v|_{[0,t]}}(Y^i_v)\,, \tag{1.24}$$

wobei L die Parallelverschiebung bezeichne. Wegen (1.19) ist

$$E_i := \widetilde{Y}^i(\widehat{\exp_p|U_\varepsilon(0_p)}^{-1}, 1)\colon\ U_\varepsilon(p) \to TM \text{ differenzierbar,} \tag{1.25}$$

und es gilt $\Big($ wegen $G \circ (\widehat{\exp_p|U_\varepsilon(0_p)}^{-1}, 1) = \exp_p \circ \widehat{\exp_p|U_\varepsilon(0_p)}^{-1} = \mathrm{id}_{U_\varepsilon(p)}$ $\Big)$

$$E_i \in \mathfrak{V}_{id_{U_\varepsilon(p)}} = \mathfrak{V}_M(U_\varepsilon(p)).$$

Wir zeigen, daß für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\nabla_{E_i|_p} E_j = 0 \tag{1.26}$$

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\,, \tag{1.27}$$

d.h. $(E_1, \ldots, E_m)$ erfüllt die Behauptung.
[Zu (1.26):
Wir zeigen, daß für alle $v \in T_pM$ $\nabla_v E_j = 0$ gilt. Hierfür genügt es (wegen der Linearität von $\nabla_{\ldots} E_j$) $\forall_{v \in U_\varepsilon(0_p)} \nabla_v E_j = 0$ zu zeigen, und dies folgt aus

$$\forall_{v \in U_\varepsilon(0_p)} \forall_{t \in [0,1]}\ E_j \circ \gamma_v(t) = \widetilde{Y}^j(v, t) \tag{1.28}$$

wegen

$$\forall_{v \in U_\varepsilon(0_p)} \nabla_v E_j \overset{(1.21)}{=} \nabla_{\dot\gamma_v(0)} E_j = \nabla_{D_0}(E_j \circ \gamma_v) \overset{(1.28)}{=} \nabla_{D_0} \widetilde{Y}^j(v, \ldots) \overset{(1.23)}{=} 0.$$

(1.28) wiederum folgt aus

$$\forall_{t \in [0,1]}\ \mathrm{L}_{\underbrace{\gamma_{tv}|_{[0,1]}}_{=\gamma_{tv}}}(Y^j_{tv}) = \mathrm{L}_{\gamma_v|_{[0,t]}}(Y^j_v)\,, \tag{1.29}$$

da für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} E_j \circ \gamma_v(t) &\overset{(1.25)}{=} \widetilde{Y}^j(\widehat{\exp_p|_{U_\varepsilon(0_p)}}^{-1} \circ \gamma_v(t), 1) \overset{(1.21),(1.20)}{=} \widetilde{Y}^j(tv, 1) \\ &\overset{(1.24)}{=} \mathrm{L}_{\gamma_{tv}|_{[0,1]}}(Y^j_{tv}) \overset{(1.29)}{=} \mathrm{L}_{\gamma_v|_{[0,t]}}(Y^j_v) \overset{(1.24)}{=} \widetilde{Y}^j(v, t). \end{aligned}$$

Zum Nachweis von (1.26) bleibt (1.29) zu zeigen:
Sei $t \in [0, 1]$ beliebig. Nach Definition der Parallelverschiebung gilt

$$\mathrm{L}_{\gamma_v|_{[0,t]}}(Y^j_v) = Z_t, \text{ wobei } Z \in \mathfrak{V}_{\underbrace{\gamma_v}_{=\gamma_v|_{[0,1]}}} \text{ parallel mit } Z_0 = Y^j_v \overset{(1.22)}{=} e_j\,. \tag{1.30}$$

Dann ist offenbar auch

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}\colon\quad [0,1] &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto Z_{tx} \end{aligned} \tag{1.31}$$

wohldefiniert (beachte, daß $t \in [0,1]$) und differenzierbar. Da nach (1.21) und (1.20) $\forall_{x\in[0,1]}\, \gamma_v(tx) = \gamma_{tv}(x)$ gilt, ist $\widetilde{Z}_x = Z_{tx} \in T_{\gamma_{tv}(x)}M$, also $\widetilde{Z} \in \mathfrak{V}_{\gamma_{tv}}$. Ferner hat man

$$\nabla_D \widetilde{Z} = \nabla_D\big(Z \circ (x \mapsto tx)\big) = \nabla_{(x\mapsto tx)_* D} Z \overset{(1.30)}{=} 0,$$

d.h. $\widetilde{Z} \in \mathfrak{V}_{\gamma_{tv}}$ ist parallel mit $\widetilde{Z}_0 = Z_0 \overset{(1.30)}{=} e_i \overset{(1.22)}{=} Y^j_{tv}$, und somit gilt (erneut nach Definition der Parallelverschiebung) $\mathrm{L}_{\gamma_{tv}}(Y^j_{tv}) = \widetilde{Z}_1 \overset{(1.31)}{=} Z_t \overset{(1.30)}{=} L_{\gamma_v|_{[0,t]}}(Y^j_v)$, damit ist (1.29) bewiesen.
Zu (1.27):
Sei $q \in U_\varepsilon(p)$ beliebig und $w := \widehat{\exp_p|_{U_\varepsilon(0_p)}}^{-1}(q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle E_i|_q, E_j|_q\rangle &\overset{(1.25)}{=} \langle \widetilde{Y}^i(w,1), \widetilde{Y}^j(w,1)\rangle \overset{(1.24)}{=} \langle \mathrm{L}_{\gamma_w|_{[0,1]}}(\underbrace{Y^i_w}_{\overset{(1.22)}{=} e_i}), \mathrm{L}_{\gamma_w|_{[0,1]}}(\underbrace{Y^j_w}_{\overset{(1.22)}{=} e_j})\rangle \\ &= \langle Z_1^{e_i}, Z_1^{e_j}\rangle \text{ , wobei } Z^{e_k} \in \mathfrak{V}_{\gamma_w} \text{ parallel mit } Z_0^{e_k} = e_k\,.\end{aligned}$$

Da die Z^{e_k} parallel sind, gilt nach dem Satz von Levi-Civita $D\cdot\langle Z^{e_i}, Z^{e_j}\rangle = 0$, also ist $\langle Z^{e_i}, Z^{e_j}\rangle$ konstant vom Wert $\langle Z_0^{e_i}, Z_0^{e_j}\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, d.h. $\langle E_i|_q, E_j|_q\rangle = \delta_{ij}$. Damit ist auch (1.27) bewiesen.] $\square$

Lemma 1.3.5. ***Vor.:*** *Seien $f\colon M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion einer m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit in den $(m+1)$-dimensionalen Standard-Raum konstanter Krümmung $C \in \mathbb{R}$, $q_0 \in M_C^{m+1}$, es gelte*

$$f(M) \subset G\delta_{q_0} \overset{1.2.4}{=} \left\{ \begin{array}{ccc} M_C^{m+1} \setminus \{\pm q_0\} & : & C > 0 \\ M_C^{m+1} \setminus \{q_0\} & : & C \le 0 \end{array} \right\}$$

(d.h. δ_{q_0} ist in allen Punkten $f(p)$ mit $p \in M$ differenzierbar) und sei $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ beliebig. X bezeichne das Richtungsvektorfeld von f, ρ_{q_0} die Stützfunktion von f bzgl. q_0 in Richtung ξ und H_ξ die mittlere Krümmung von f bzgl. ξ.
Beh.: *Dann gilt auf $G\xi$*

$$\operatorname{grad}\|X\|^2 = 2\,(\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f)\,{}^T\!X \tag{1.32}$$
$$\operatorname{div}{}^T\!X = m\,(\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f + \rho_{q_0}\mathrm{H}_\xi) \tag{1.33}$$
$$\triangle\|X\|^2 = -2\,C\,\|{}^T\!X\|^2 + 2\,m\,(\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f)\,(\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f + \rho_{q_0}\mathrm{H}_\xi) \tag{1.34}$$
$$\operatorname{grad}\rho_{q_0} = -A_\xi({}^T\!X) \tag{1.35}$$
$$\triangle\rho_{q_0} = -m\,(\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f)\,\mathrm{H}_\xi - \rho_{q_0}\|\alpha\|^2 - \langle \operatorname{grad}\mathrm{H}_\xi, {}^T\!X\rangle \tag{1.36}$$

Beweis: Die Beweisidee findet sich in [1, Lemmata 1 und 2].

Seien $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ und $E_1, \ldots, E_m$ ein auf einer Umgebung G von M definiertes orthonormales differenzierbares m-Beinfeld. O.B.d.A. sei $G = G\xi$. Wir zeigen zunächst, daß auf G für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\widetilde{\nabla}_{E_i} X = \mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f\, f_* E_i \tag{1.37}$$

$$E_i \cdot (\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f) = -C\langle X, f_* E_i\rangle \tag{1.38}$$

$$h_\xi(E_j, E_i) = -\langle f_* E_i, \widetilde{\nabla}_{E_j}\xi\rangle \tag{1.39}$$

$$\widetilde{\nabla}_{E_j}\xi = -\textstyle\sum_{k=1}^m h_\xi(E_j, E_k) f_* E_k \tag{1.40}$$

$$\widetilde{\nabla}_{E_i}\widetilde{\nabla}_{E_j}\xi = -\textstyle\sum_{k=1}^m \Big(h_\xi(E_j, E_k)\widetilde{\nabla}_{E_i} f_* E_k + \big(E_i \cdot h_\xi(E_j, E_k)\big) f_* E_k\Big) \tag{1.41}$$

$$\forall_{k\in\{1,\dots,m\}}\, (\nabla_{E_i} h_\xi)(E_j, E_k) - (\nabla_{E_j} h_\xi)(E_i, E_k) = 0 \tag{1.42}$$

[Zu (1.37):

1. Fall: $C = 0$

Dann gilt nach Definition 1.3.1 $\mathrm{s}_C' = 1$, und es ergibt sich für jedes $p \in G$ und jeden differenzierbaren Weg $\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ mit $\dot\gamma(0) = E_i|_p$

$$\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{E_i|_p} X} = E_i|_p \cdot \overrightarrow{X} \overset{1.3.3(i)}{=} \dot\gamma(0)\cdot(f - q_0) = \overrightarrow{f_*\dot\gamma(0)} = \mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f(p)\, \overrightarrow{f_* E_i|_p}\,.$$

2. Fall: $C \neq 0$

Es bezeichne ι die Einbettung aus Satz 1.2.1 und $\widetilde{\widetilde{\nabla}}$ die Levi-Civita kovariante Ableitung von E^{m+2}, falls $C > 0$ bzw. L^{m+2}, falls $C < 0$. Dann gilt für jedes $p \in G$ und jeden differenzierbaren Weg $\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ mit $\dot\gamma(0) = E_i|_p$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{E_i|_p}\iota_* X} &= E_i|_p \cdot \overrightarrow{\iota_* X} \overset{1.3.3(ii)}{=} E_i|_p \cdot \Big(-\big(\iota(q_0) - C\langle\iota(q_0), \iota\circ f\rangle \iota\circ f\big)\Big)\\
&= -\big(\iota(q_0) - C\langle\iota(q_0), \iota\circ f\circ\gamma\rangle\, \iota\circ f\circ\gamma\big)'(0)\\
&= C\langle\iota(q_0), \big(\iota\circ f\circ\gamma\big)'(0)\rangle\, \iota\circ f\circ\gamma(0) + C\langle\iota(q_0), \iota\circ f\circ\gamma(0)\rangle \big(\iota\circ f\circ\gamma\big)'(0)\\
&= C\,\langle\iota(q_0), \overrightarrow{\iota_* f_* E_i|_p}\rangle\, \iota(f(p)) + C\,\langle\iota(q_0), \iota(f(p))\rangle\, \overrightarrow{\iota_* f_* E_i|_p}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $\overrightarrow{\perp_{f(p)}(\iota)} = \mathbb{R}\,\iota(f(p))$ nach (1.6) in Satz 1.2.1

$$\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} X = {}^{T_\iota}\big(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{E_i|_p}\iota_* X\big) = C\,\langle\iota(q_0), \iota(f(p))\rangle\, f_* E_i|_p\,.$$

Zum Nachweis von (1.37) bleibt daher zu zeigen

$$\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p))) = C\langle\iota(q_0), \iota(f(p))\rangle\,,$$

und dies gilt wegen $\text{l.S.} \overset{1.3.1}{=} \left\{\begin{matrix}\cos\big(\sqrt{C}\,\delta_{q_0}(f(p))\big)\\ \cosh\big(\sqrt{|C|}\,\delta_{q_0}(f(p))\big)\end{matrix}\right\} \overset{1.2.4}{=} \text{r.S.}$

Zu (1.38):

$$\begin{aligned}
E_i \cdot (\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f) &= \mathrm{s}_C'' \circ \delta_{q_0} \circ f\, E_i \cdot (\delta_{q_0} \circ f)\\
&= \mathrm{s}_C'' \circ \delta_{q_0} \circ f\, (f_* E_i \cdot \delta_{q_0}) \overset{1.2.1}{=} -C\,\mathrm{s}_C \circ \delta_{q_0} \circ f\, \langle(\widetilde{\mathrm{grad}}\,\delta_{q_0}) \circ f, f_* E_i\rangle\\
&\overset{1.3.2(i)}{=} -C\,\langle X, f_* E_i\rangle
\end{aligned}$$

Zu (1.39):
Es gilt $\langle f_* E_i, \xi \rangle = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= E_j \cdot \langle f_* E_i, \xi \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{E_j} f_* E_i, \xi \rangle + \langle f_* E_i, \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi \rangle \\ &= h_\xi(E_j, E_i) + \langle f_* E_i, \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi \rangle \end{aligned}$$

und somit $h_\xi(E_j, E_i) = -\langle f_* E_i, \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi \rangle$.
Zu (1.40):

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi &= \textstyle\sum_{k=1}^m \langle \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi, f_* E_k \rangle \, f_* E_k + \underbrace{\langle \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi, \xi \rangle}_{= \frac{1}{2} E_j \cdot \langle \xi, \xi \rangle = 0} \, \xi \\ &\overset{(1.39)}{=} - \textstyle\sum_{k=1}^m h_\xi(E_j, E_k) \, f_* E_k \end{aligned}$$

Zu (1.41):

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{E_i} \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi &\overset{(1.40)}{=} \widetilde{\nabla}_{E_i} \big(- \sum_{k=1}^m h_\xi(E_j, E_k) \, f_* E_k \big) \\ &= - \sum_{k=1}^m \Big(h_\xi(E_j, E_k) \, \widetilde{\nabla}_{E_i} f_* E_k + \big(E_i \cdot h_\xi(E_j, E_k) \big) f_* E_k \Big) \end{aligned}$$

Zu (1.42):
Laut der Codazzi-Gleichung [7, Ü 68a)] ist

$$\big(\widetilde{\mathrm{R}}(f_* E_i, f_* E_j) f_* E_k \big)^\perp = (\nabla^\perp_{E_i} \alpha)(E_j, E_k) - (\nabla^\perp_{E_j} \alpha)(E_i, E_k).$$

Da $\widetilde{M}^{m+1}_C$ von konstanter Krümmung C ist, gilt nach [7, 7.31] für die linke Seite der Codazzi-Gleichung

$$\text{l.S.} = \big(C \, (\langle f_* E_j, f_* E_k \rangle \, \underbrace{f_* E_i} - \langle f_* E_i, f_* E_k \rangle \, \underbrace{f_* E_j}) \big)^\perp = 0.$$

Nach Definition von $\nabla^\perp$, h_ξ und wegen $\alpha(Y, Z) = h_\xi(Y, Z) \, \xi$, $(\widetilde{\nabla}_{E_i} \xi)^\perp = \langle \widetilde{\nabla}_{E_i} \xi, \xi \rangle \, \xi = \frac{1}{2} E_i \cdot \langle \xi, \xi \rangle \, \xi = 0$ folgt

$$\begin{aligned} (\nabla^\perp_{E_i} \alpha)(E_j, E_k) &= (\widetilde{\nabla}_{E_i} \alpha(E_j, E_k))^\perp - \alpha(\nabla_{E_i} E_j, E_k) - \alpha(E_j, \nabla_{E_i} E_k) \\ &= h_\xi(E_j, E_k)(\nabla_{E_i} \xi)^\perp + (E_i \cdot h_\xi(E_j, E_k))\xi - h_\xi(\nabla_{E_i} E_j, E_k)\xi - h_\xi(E_j, \nabla_{E_i} E_k)\xi \\ &= \big((\nabla_{E_i} h_\xi)(E_j, E_k) \big) \xi \, , \end{aligned}$$

also ist $\big((\nabla_{E_i} h_\xi)(E_j, E_k) - (\nabla_{E_j} h_\xi)(E_i, E_k) \big) \xi$ gleich der rechten Seite der Codazzi-Gleichung, womit (1.42) gezeigt ist.
Somit sind (1.37) bis (1.42) bewiesen.]

Die Behauptungen des Lemmas können nun auf (1.37) - (1.42) zurückgeführt werden:
Zu (1.32) und (1.35):
Seien $p \in G$ beliebig, $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ ein differenzierbarer Weg in M mit $\dot\gamma(0) = E_i|_p$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad}_p \|X\|^2 \,,\, E_i|_p\rangle &= \langle \operatorname{grad}_p \|X\|^2 \,,\, \dot\gamma(0)\rangle = \dot\gamma(0)\cdot \|X\|^2 \\
&= \dot\gamma(0)\cdot\langle X, X\rangle = 2\,\langle \widetilde\nabla_{\dot\gamma(0)} X \,,\, X_p\rangle \overset{(1.37)}{=} 2\,\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p))\,\langle f_* E_i|_p \,,\, X_p^T\rangle \\
&= \langle E_i|_p \,,\, 2\,\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p))\,{}^T X_p\rangle
\end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von $p \in M$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ folgt (1.32).
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad}_p \rho_{q_0} \,,\, E_i|_p\rangle &= \langle \operatorname{grad}_p \rho_{q_0} \,,\, \dot\gamma(0)\rangle = \dot\gamma(0)\cdot\rho_{q_0} \overset{1.3.2(ii)}{=} \dot\gamma(0)\cdot\langle X, \xi\rangle \\
&= \langle \underbrace{\widetilde\nabla_{E_i|_p} X}_{\overset{(1.37)}{=} \mathrm{s}_C'(f(p)) f_* E_i|_p} \,,\, \xi_p\rangle + \langle X_p \,,\, \widetilde\nabla_{\dot\gamma(0)}\xi\rangle = \langle X_p \,,\, \widetilde\nabla_{\dot\gamma(0)}\xi\rangle,
\end{aligned}$$

und aus $\langle \xi, \xi\rangle = 1$ folgt $(\widetilde\nabla\xi)^\perp = 0$, also

$$\begin{aligned}
\langle X_p \,,\, \widetilde\nabla_{\dot\gamma(0)}\xi\rangle &= \langle X_p^T \,,\, (\widetilde\nabla_{\dot\gamma(0)}\xi)^T\rangle = -\langle {}^T X_p \,,\, -{}^T(\widetilde\nabla_{\dot\gamma(0)}\xi)\rangle \\
&= -\langle {}^T X_p \,,\, A_\xi(\dot\gamma(0))\rangle \overset{A_\xi \text{ selbstadj.}}{=} -\langle \dot\gamma(0) \,,\, A_\xi({}^T X_p)\rangle \\
&= \langle E_i|_p \,,\, -A_\xi({}^T X_p)\rangle.
\end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von $p \in M$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ folgt (1.35).
Zu (1.33):
Sei $p \in G$ beliebig.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}{}^T X)(p) &= \operatorname{Spur}(\nabla_{\dots}{}^T X | T_p M) = \sum_{i=1}^m \langle \widetilde\nabla_{E_i|_p}{}^T X \,,\, E_i|_p\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \langle \widetilde\nabla_{E_i|_p} X^T \,,\, f_* E_i|_p\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \widetilde\nabla_{E_i|_p}(X - \langle X, \xi\rangle\xi) \,,\, f_* E_i|_p\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \langle (\widetilde\nabla_{E_i|_p} X) - \langle X_p, \xi_p\rangle(\widetilde\nabla_{E_i|_p}\xi) - (E_i|_p\cdot\langle X, \xi\rangle)\xi_p \,,\, f_* E_i|_p\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \langle \underbrace{\widetilde\nabla_{E_i|_p} X}, \, f_* E_i|_p\rangle - \langle X_p, \xi_p\rangle \sum_{i=1}^m \underbrace{\langle \widetilde\nabla_{E_i|_p}\xi \,,\, f_* E_i|_p\rangle} \\
&\overset{(1.37),(1.39)}{=} \sum_{i=1}^m \mathrm{s}_C'\big(\delta_{q_0}(f(p))\big) + \underbrace{\langle X_p, \xi_p\rangle}_{=\rho_{q_0}(p)} \sum_{i=1}^m h_\xi(E_i|_p, E_i|_p)
\end{aligned}$$

$$= m\Big(\mathrm{s}_C'\big(\delta_{q_0}(f(p))\big) + \rho_{q_0}(p)\mathrm{H}_\xi(p)\Big)$$

Zu (1.34):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle(\|X\|^2) &= \frac{1}{2}\operatorname{div}\operatorname{grad}\|X\|^2 \\
&\overset{(1.32)}{=} \operatorname{div}\big((\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f)^T X\big) \\
&\overset{[7,\text{Ü87b})]}{=} (\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f)\operatorname{div}({}^T X) + {}^T X\cdot(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f) \\
&\overset{(1.33)}{=} m\,(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f)\,(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f + \rho_{q_0}\,\mathrm{H}_\xi) + {}^T X\cdot(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f)
\end{aligned}$$

Zum Nachweis von (1.34) genügt es nun zu zeigen, daß gilt

$${}^T X\cdot(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f) = -C\,\|{}^T X\|^2.$$

Beweis hiervon:

$$\begin{aligned}
{}^T X\cdot(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f) &= \sum_{i=1}^m \langle {}^T X, E_i\rangle\, E_i\cdot(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f) \\
&\overset{(1.38)}{=} \sum_{i=1}^m \langle {}^T X, E_i\rangle(-C\,\underbrace{\langle X, f_* E_i\rangle}_{=\langle {}^T X, E_i\rangle}) \\
&= -C\,\langle {}^T X, \sum_{i=1}^m \langle {}^T X, E_i\rangle\, E_i\rangle = -C\,\langle {}^T X, {}^T X\rangle = -C\,\|{}^T X\|^2
\end{aligned}$$

Zu (1.36):
Seien $p\in M$ und $E_1,\dots,E_m$ das orthonormale Basisfeld aus Lemma 1.3.4 mit

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,m\}}\,\nabla_{E_i|_p}E_j = 0. \tag{1.43}$$

Wir bereiten den Beweis von (1.36) vor, indem wir die folgenden Formeln (1.44) bis (1.47) beweisen:

$$\forall_{i,k,l\in\{1,\dots m\}}\,\langle\widetilde{\nabla}_{E_i|_p}f_*E_k, f_*E_l|_p\rangle = 0 \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
&\forall_{i,j\in\{1,\dots,m\}}\,\widetilde{\nabla}_{E_i|_p}\widetilde{\nabla}_{E_j}\xi \\
&= -\textstyle\sum_{k=1}^m\Big((h_\xi(E_j,E_k)\langle\widetilde{\nabla}_{E_i}f_*E_k,\xi\rangle\xi + (\nabla_{E_i}h_\xi)(E_j,E_k)\,f_*E_k\Big)(p)
\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$-\textstyle\sum_{i,j=1}^m\langle {}^T X_p, E_j|_p\rangle\, E_j|_p\cdot h_\xi(E_i,E_i) = -m\,\langle\operatorname{grad}_p H_\xi, {}^T X_p\rangle \tag{1.46}$$

$$-\sum_{i,j=1}^m\langle\nabla_{E_i|_p}{}^T X, E_j|_p\rangle\, h_\xi(E_i|_p,E_j|_p) = -m\,\mathrm{s}_C'\big(\delta_{q_0}(f(p))\big)\,\mathrm{H}_\xi(p) - \rho_{q_0}(p)\|\alpha(p)\|^2 \tag{1.47}$$

[(1.44) ist klar, da aus $\nabla_{E_i|_p} E_k = 0$ auch $0 = f_* \nabla_{E_i|_p} E_k = (\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} f_* E_k)^T$ folgt.
Zu (1.45):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} \widetilde{\nabla}_{E_j} \xi &\overset{(1.41)}{=} -\sum_{k=1}^{m} \Big(h_\xi(E_j|_p, E_k|_p) \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} f_* E_k + \big(E_i|_p \cdot h_\xi(E_j, E_k) \big) f_* E_k|_p \Big) \\
&= -\sum_{k=1}^{m} h_\xi(E_j|_p, E_k|_p) \big(\sum_{l=1}^{m} \underbrace{\langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} f_* E_k, f_* E_l|_p \rangle}_{\overset{(1.44)}{=} 0} f_* E_l|_p + \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} f_* E_k, \xi_p \rangle \xi_p \big) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m} \big((\nabla_{E_i|_p} h_\xi)(E_j, E_k) + h_\xi(\underbrace{\nabla_{E_i|_p} E_j}_{\overset{(1.43)}{=} 0}, E_k|_p) + h_\xi(E_j|_p, \underbrace{\nabla_{E_i|_p} E_k}_{\overset{(1.43)}{=} 0}) \big) f_* E_k|_p \\
&= -\sum_{k=1}^{m} \big(h_\xi(E_j|_p, E_k|_p) \, \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} f_* E_k, \xi_p \rangle \, \xi_p \big) - \sum_{k=1}^{m} (\nabla_{E_i|_p} h_\xi)(E_j, E_k) \, f_* E_k|_p
\end{aligned}$$

Zu (1.46):

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i,j=1}^{m} \big(\langle {}^T X_p, E_j|_p \rangle E_j|_p \big) \cdot h_\xi(E_i, E_i) \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{m} \langle {}^T X_p, \sum_{j=1}^{m} (E_j|_p \cdot h_\xi(E_i, E_i)) E_j|_p \rangle \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{m} \langle {}^T X_p, \sum_{j=1}^{m} \langle \operatorname{grad}_p \big(h_\xi(E_i, E_i) \big), E_j|_p \rangle \, E_j|_p \rangle \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{m} \langle {}^T X_p, \operatorname{grad}_p \big(h_\xi(E_i, E_i) \big) \rangle = -\langle {}^T X_p, \operatorname{grad}_p \big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} h_\xi(E_i, E_i)}_{= m \, \mathrm{H}_\xi} \big) \rangle \\
&\quad = -m \, \langle \operatorname{grad}_p H_\xi, {}^T X_p \rangle
\end{aligned}$$

Zu (1.47):

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i,j=1}^{m} \langle \nabla_{E_i|_p} {}^T X, E_j|_p \rangle \, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^{m} \langle (\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} X^T)^T, f_* E_j|_p \rangle \, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^{m} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} X^T, f_* E_j|_p \rangle \, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^{m} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} (X - \langle X, \xi \rangle \xi) \, , \, f_* E_j|_p \rangle \, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i,j=1}^{m} h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \\
&\qquad\qquad \Big\langle (\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} X) - \langle X_p, \xi_p\rangle (\widetilde{\nabla}_{E_i|_p}\xi) - (E_i|_p \cdot \langle X, \xi\rangle)\, \xi_p \,,\ f_* E_j|_p \Big\rangle \\
&= -\Big(\sum_{i,j=1}^{m} \langle \underbrace{\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} X}\,,\ f_* E_j|_p \rangle\, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \\
&\quad - \langle X_p, \xi_p\rangle \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{\big\langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p}\xi\,,\ f_* E_j|_p \big\rangle}\, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \Big) \\
&\overset{(1.37),(1.39)}{=} -\Big(\sum_{i,j=1}^{m} \big\langle \mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p)))\, f_* E_i|_p \,,\ f_* E_j|_p \big\rangle\, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \\
&\qquad + \langle X_p, \xi_p\rangle \sum_{i,j=1}^{m} h_\xi(E_i|_p, E_j|_p)\, h_\xi(E_i|_p, E_j|_p) \Big) \\
&= -\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p))) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} h_\xi(E_i|_p, E_i|_p)}_{= m\, \mathrm{H}_\xi(p)} - \underbrace{\langle X_p, \xi_p\rangle}_{=\rho_{q_0}(p)} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} \big(h_\xi(E_i|_p, E_j|_p)\big)^2}_{\overset{1.1.4(1.1)}{=} \|\alpha(p)\|^2}
\end{aligned}
$$

Damit sind (1.44) bis (1.47) gezeigt.].
Nun ergibt sich (1.36) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\triangle \rho_{q_0}(p) &= \mathrm{Spur}\,(\nabla_{\ldots} \mathrm{grad}\, \rho|_{T_pM}) \overset{(1.35)}{=} \mathrm{Spur}\big(\nabla_{\ldots}\big(- A_\xi({}^T X)|_{T_pM}\big)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} \big(- f_* A_\xi({}^T X)\big), f_* E_i|_p \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} \quad \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{{}^T X}\xi)^T}_{=\widetilde{\nabla}_{{}^T X}\xi,\ {}^T X \cdot \langle \xi, \xi\rangle = 0} \quad , f_* E_i|_p \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i|_p} \big(\sum_{j=1}^{m} \langle {}^T X, E_j\rangle \widetilde{\nabla}_{E_j}\xi \big), f_* E_i|_p \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \langle {}^T X_p, E_j|_p\rangle \, \langle \qquad \underbrace{\widetilde{\nabla}_{E_i|_p} \widetilde{\nabla}_{E_j}\xi}_{\overset{(1.45)}{=} \ldots \xi_p - \sum_{k=1}^{m} (\nabla_{E_i|_p} h_\xi)(E_j, E_k) f_* E_k|_p} \qquad , f_* E_i|_p \rangle \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{m} (E_i|_p \cdot \langle {}^T X, E_j\rangle) \langle \widetilde{\nabla}_{E_j|_p}\xi, f_* E_i|_p \rangle \\
&= -\sum_{i,j=1}^{m} \langle {}^T X_p, E_j|_p\rangle \qquad \underbrace{(\nabla_{E_i|_p} h_\xi)(E_j, E_i)}_{\overset{(1.42)}{=} (\nabla_{E_j|_p} h_\xi)(E_i, E_i) \overset{(1.43)}{=} E_j|_p \cdot h_\xi(E_i, E_i) + 0}
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}(E_i|_p\cdot\langle{}^TX,E_j\rangle)\underbrace{\langle\underbrace{\widetilde{\nabla}_{E_j|_p}\xi}_{\overset{(1.40)}{=}-\sum_{k=1}^m h_\xi(E_j|_p,E_k|_p)f_*E_k|_p},f_*E_i|_p\rangle}_{=-h_\xi(E_j|_p,E_i|_p)}$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{m}\langle{}^TX_p,E_j|_p\rangle E_j|_p\cdot h_\xi(E_i,E_i)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{m}\big(\langle\nabla_{E_i|_p}{}^TX,E_j|_p\rangle+\langle{}^TX_p,\underbrace{\nabla_{E_i|_p}E_j}_{\overset{(1.43)}{=}0}\rangle\big)h_\xi(E_j|_p,E_i|_p)$$

$$\overset{(1.46),(1.47)}{=}-m\,\langle\mathrm{grad}_pH_\xi,\,{}^TX_p\rangle-m\,\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p)))\,\mathrm{H}_\xi(p)-\rho_{q_0}(p)\,\|\alpha(p)\|^2,$$

womit das Lemma vollständig bewiesen ist. □

Satz 1.3.6 ([5, Proposition 2.1]). ***Vor.:*** *Seien $f\colon M\to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion einer m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit in den $(m+1)$-dimensionalen Standard-Raum konstanter Krümmung $C\in\mathbb{R}$, $q_0\in M_C^{m+1}$, es gelte*

$$f(M)\subset G\delta_{q_0}\overset{1.2.4}{=}\left\{\begin{array}{ccc}M_C^{m+1}\setminus\{\pm q_0\}&:&C>0\\M_C^{m+1}\setminus\{q_0\}&:&C\le 0\end{array}\right\}$$

(d.h. δ_{q_0} ist in allen Punkten $f(p)$, $p\in M$, differenzierbar), und sei $X\in\mathfrak{V}_f(M)$ das Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0.

Ferner seien für $\xi\in\mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\|=1$ beliebig $\rho_{q_0,\xi}$, H_ξ bzw. $\mathrm{H}_{\xi,2}$ die Stützfunktion von f bzgl. q_0 in Richtung ξ, die mittlere Krümmung von f bzgl. ξ bzw. die zweite mittlere Krümmung von f bzgl. ξ.

Beh.:

(i) Für alle $p\in M$ sind $\rho_{q_0,\xi}^2(p)$, $\mathrm{H}_{\xi,2}(p)$, $\rho_{q_0,\xi}(p)\mathrm{H}_\xi(p)$ und $\rho_{q_0,\xi}(p)A_\xi({}^TX_p)$ unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi\in\mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\|=1$. Daher sind

$$\rho_{q_0}^2\colon\ M\longrightarrow\mathbb{R},\ \ \mathrm{H}_2\colon\ M\longrightarrow\mathbb{R},\ \ \rho_{q_0}\mathrm{H}\colon\ M\longrightarrow\mathbb{R}$$

auf ganz M wohldefinierte Funktionen, und es ist $\rho_{q_0}A({}^TX)\in\mathfrak{V}_M(M)$.

(ii) Das Vektorfeld $Y:=(m-1)\,(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f)\,{}^TX-m\,\rho_{q_0}\,\mathrm{H}\,{}^TX+\rho_{q_0}\,A({}^TX)$ ist differenzierbar, d.h. $Y\in\mathfrak{V}_M(M)$.

(iii)

$$\mathrm{Ric}({}^TX,{}^TX)=$$
$$2\,(m-1)\,C\,\|{}^TX\|^2+m(m-1)\,(\rho_{q_0}^2\,\mathrm{H}_2-(\mathrm{s}_C')^2\circ\delta_{q_0}\circ f)$$
$$+\mathrm{div}\big((m-1)\,(\mathrm{s}_C'\circ\delta_{q_0}\circ f)\,{}^TX-m\,\rho_{q_0}\,\mathrm{H}\,{}^TX+\rho_{q_0}\,A({}^TX)\big)$$

Beweis: (i) ist klar nach 1.1.2 Bem. 3), 1.3.2 Bem. 2) und wegen $A_{-\xi} = -A_\xi$.
Zu (ii):
Zu jedem $p \in M$ existiert ein $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$. Da nach (i) gilt

$$Y|_{G\xi} = (m-1)\,(\mathrm{s}_C^{'} \circ \delta_{q_0} \circ f)\,{}^T X - m\,\rho_{q_0,\xi}\,\mathrm{H}_\xi\,{}^T X + \rho_{q_0,\xi}\,A_\xi({}^T X)\,,$$

ist Y (lokal) differenzierbar, da jeder der drei Summanden differenzierbar ist.
Zu (iii):
Wir setzen zur Abkürzung $\theta_C := \mathrm{s}_C^{'} \circ \delta_{q_0} \circ f$. Sei $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\triangle(\rho_{q_0,\xi}^2) &\overset{[7,\text{Ü87b})]}{=} 2\,\underbrace{\rho_{q_0,\xi}}\,\triangle(\rho_{q_0,\xi}) + 2\|\underbrace{\mathrm{grad}\rho_{q_0,\xi}}\|^2 \\
&\overset{(1.36),(1.35)}{=} 2\rho_{q_0,\xi}(-m\,\theta_C \mathrm{H}_\xi - \rho_{q_0,\xi}\|\alpha\|^2 - m \underbrace{\langle \mathrm{grad}(\mathrm{H}_\xi), {}^T X\rangle}_{\overset{[7,\text{Ü87b})]}{=} \mathrm{div}(\mathrm{H}_\xi{}^T X) - \mathrm{H}_\xi\,\mathrm{div}({}^T X)}\quad) \\
&\qquad +2\|A_\xi({}^T X)\|^2,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\triangle(\rho_{q_0,\xi}^2) \\
&\quad= \quad -m\,\theta_C \rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi - \rho_{q_0,\xi}^2\|\alpha\|^2 \\
&\qquad\quad -m\,\rho_{q_0,\xi}\,\mathrm{div}(\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) + \underbrace{m\,\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,\mathrm{div}({}^T X)}_{\overset{(1.33)}{=} m^2\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\theta_C + m^2\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_\xi^2} + \|A_\xi({}^T X)\|^2 \\
&\quad= \quad m(m-1)\,\theta_C\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi - \rho_{q_0,\xi}^2\underbrace{\|\alpha\|^2} \\
&\qquad\quad -m\,\rho_{q_0,\xi}\,\mathrm{div}(\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) + m^2\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_\xi^2 + \|A_\xi({}^T X)\|^2 \\
&\overset{1.1.6(1.5)}{=} m(m-1)\,\theta_C\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi \underbrace{-m^2\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_\xi^2} + m(m-1)\,\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_{\xi,2} \\
&\qquad\quad -m\,\rho_{q_0,\xi}\,\mathrm{div}(\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) \underbrace{+m^2\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_\xi^2} + \|A_\xi({}^T X)\|^2 \\
&\qquad\quad +m(m-1)\,\theta_C^2 - m(m-1)\,\theta_C^2 \\
&\quad= \quad m(m-1)\,\theta_C(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi + \theta_C) + m(m-1)\,(\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_{\xi,2} - \theta_C^2) \\
&\qquad\quad -m\,\rho_{q_0,\xi}\,\mathrm{div}(\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) + \|A_\xi({}^T X)\|^2\,.
\end{aligned}$$

Daher folgt wegen

$$\begin{aligned}
\rho_{q_0,\xi}\,\mathrm{div}(\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) &\overset{[7,\text{Ü87b})]}{=} \mathrm{div}(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) - \langle \mathrm{grad}(\rho_{q_0,\xi}), \mathrm{H}_\xi\,{}^T X\rangle \\
&\overset{(1.35)}{=} \mathrm{div}(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,{}^T X) + \mathrm{H}_\xi\langle A_\xi({}^T X), {}^T X\rangle,
\end{aligned}$$

daß gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\triangle(\rho_{q_0,\xi}^2)\\
&\quad = \quad m(m-1)\,\theta_C(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi+\theta_C)+m(m-1)\,(\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_{\xi,2}-\theta_C^2)\\
&\qquad\quad -m\,\mathrm{div}(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,{}^TX)-m\,\mathrm{H}_\xi\langle A_\xi({}^TX),{}^TX\rangle+\|A_\xi({}^TX)\|^2\\
&\quad \overset{1.1.6(1.4)}{=} \quad m(m-1)\,\theta_C(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi+\theta_C)+m(m-1)\,(\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_{\xi,2}-\theta_C^2)\\
&\qquad\quad -m\,\mathrm{div}(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,{}^TX)-\mathrm{Ric}({}^TX,{}^TX)+(m-1)\,C\,\|{}^TX\|^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}({}^TX,{}^TX) \quad = \quad & (m-1)\,C\,\|{}^TX\|^2+m(m-1)\,(\rho_{q_0,\xi}^2\mathrm{H}_{\xi,2}-\theta_C^2)\\
& +m(m-1)\,\theta_C(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi+\theta_C)-m\,\mathrm{div}(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,{}^TX)\\
& -\frac{1}{2}\triangle(\rho_{q_0,\xi}^2).
\end{aligned}$$

Hieraus und aus

$$\begin{aligned}
m(m-1)\,\theta_C(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi+\theta_C) &\overset{(1.34)}{=} \tfrac{m-1}{2}\triangle(\|X\|^2)+(m-1)\,C\,\|{}^TX\|^2\\
&\overset{(1.32)}{=} \mathrm{div}\big((m-1)\,\theta_C\,{}^TX\big)+(m-1)\,C\,\|{}^TX\|^2
\end{aligned}$$

sowie

$$-\tfrac{1}{2}\triangle(\rho_{q_0,\xi}^2) \overset{[7,\text{Ü87b})]}{=} -\mathrm{div}\big(\rho_{q_0,\xi}\mathrm{grad}(\rho_{q_0,\xi})\big) \overset{(1.35)}{=} \mathrm{div}\big(2\rho_{q_0,\xi}A_\xi({}^TX)\big)$$

und der Beliebigkeit von ξ folgt die Behauptung von (iii). $\square$

Kapitel 2

Hilfsmittel (Die Sätze von Sard, Omori und Rauch, das Index- und das Hopf-Lemma)

Wir werden für unsere Beweise im weiteren Verlauf dieser Arbeit bekannte Resultate aus der Differentialtopologie und –geometrie sowie der linearen Algebra benötigen, die wir in diesem Kapitel zusammmenstellen.

Lemma 2.1 ([14, Kapitel 11 Lemma 1]). *Seien V, W euklidische Vektorräume, $V^1 := \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ und $\alpha\colon V \times V \to W$ eine symmetrische bilineare Abbildung. Dann sind offenbar*

$$g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(v) := \|\alpha(v,v)\|^2 \qquad \text{und} \qquad g|_{V^1}\colon V^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Abbildungen. Ferner sei $u_1 \in V^1$ ein kritischer Punkt von $g|_{V^1}$. Dann gilt:

(i) $\forall_{v \in V} \big(\quad \langle u_1, v\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle \alpha(u_1,u_1), \alpha(u_1,v)\rangle = 0 \quad \big)$

(ii) Ist zusätzlich $g(u_1) = \|\alpha(u_1,u_1)\|^2 \neq 0$, so gilt

$$\forall u \in V \big(\quad \alpha(u_1,u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u_1, u\rangle = 0 \quad \big).$$

(iii) Besitzt $g|_{V^1}$ in u_1 sogar ein relatives Minimum, so gilt für jedes $v \in V^1$

$$\begin{gathered} \langle u_1, v\rangle = 0 \\ \Longrightarrow \quad \langle \alpha(u_1,u_1), \alpha(v,v)\rangle + 2\|\alpha(u_1,v)\|^2 \geq \|\alpha(u_1,u_1)\|^2. \end{gathered}$$

Beweis: Sei $v \in V^1$ mit $\langle u_1, v\rangle = 0$. Dann ist offenbar $\gamma\colon \mathbb{R} \to V$, definiert durch $\gamma(t) := \cos(t)\, u_1 + \sin(t)\, v$, ein differenzierbarer Weg in V mit

$$\gamma(\mathbb{R}) \subset V^1,\ \gamma(0) = u_1,\ \gamma'(0) = v \text{ und } \gamma''(0) = -u_1. \tag{2.1}$$

Da u_1 nach Voraussetzung ein kritischer Punkt von $g|_{V^1}$ ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (g\circ\gamma)'(0) = \langle \alpha(\gamma,\gamma),\alpha(\gamma,\gamma)\rangle'(0) = 2\,\langle \alpha(\gamma,\gamma)'(0),\alpha(\gamma,\gamma)(0)\rangle \\ &= 4\,\langle \alpha\big(\gamma'(0),\gamma(0)\big),\alpha\big(\gamma(0),\gamma(0)\big)\rangle \overset{(2.1)}{=} 4\,\langle \alpha(v,u_1),\alpha(u_1,u_1)\rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt offenbar (i) (auch für beliebiges $v\in V$ mit $\langle u_1,v\rangle = 0$).
Zu (iii):
Besitzt $g|_{V^1}$ in u_1 ein relatives Minimum, so gilt (iii) wegen

$$\begin{aligned} 0 &\leq (g\circ\gamma)''(0) = 4\,\langle \alpha(\gamma',\gamma),\alpha(\gamma,\gamma)\rangle'(0) \\ &= 4\,\big(\big\langle \alpha(\gamma'',\gamma)+\alpha(\gamma',\gamma')\,,\,\alpha(\gamma,\gamma)\big\rangle(0) + \big\langle \alpha(\gamma',\gamma)\,,2\,\alpha(\gamma',\gamma)\big\rangle(0)\big) \\ &\overset{(2.1)}{=} 4\,\big(-\|\alpha(u_1,u_1)\|^2 + \langle \alpha(v,v),\alpha(u_1,u_1)\rangle + 2\|\alpha(v,u_1)\|^2\big). \end{aligned}$$

Zu (ii):
Gelte $\|\alpha(u_1,u_1)\|^2 \neq 0$ und sei $u\in V$ mit $\alpha(u_1,u)=0$. Dann existieren

$$\widetilde{v}\in V,\ \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u = \lambda u_1 + \widetilde{v} \ \text{ und } \ \langle u_1,\widetilde{v}\rangle = 0, \tag{2.2}$$

nämlich $\lambda := \langle u,u_1\rangle$ und $\widetilde{v}$ die zu u_1 normale Komponente von u.

Aus (2.2) und (i) (dort $v=\widetilde{v}$) folgt

$$\langle \alpha(u_1,u_1),\alpha(u_1,\widetilde{v})\rangle = 0, \tag{2.3}$$

und aus der Bilinearität von α ergibt sich

$$0 = \langle \alpha(u_1,u_1),\underbrace{\alpha(u_1,u)}_{=0}\rangle \overset{(2.2),(2.3)}{=} \langle \alpha(u_1,u_1),\alpha(u_1,\lambda u_1)\rangle = \lambda\|\alpha(u_1,u_1)\|^2.$$

Hieraus folgt (wegen $\|\alpha(u_1,u_1)\|^2 \neq 0$) $\lambda = 0$, d.h. nach (2.2) $u=\widetilde{v}$ und $\langle u_1,u\rangle = 0$. □

2.2 Der Satz von Sard

Satz 2.2. ***Vor.:*** *Seien M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $n\in\mathbb{N}_+$ und $\Phi\colon M\to\mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Ferner bezeichnen wir mit $\mathcal{C} := \{p\in M \mid \mathrm{Rang}\Phi_{*p} < n\}$ die Menge der nicht-regulären Punkte von Φ.*
Beh.: *Dann ist $\Phi(\mathcal{C})\subset\mathbb{R}^n$ eine μ_n-Nullmenge.*

Beweis: Für den Fall $M=\mathbb{R}^m$ siehe [12, S. 16-19]. Der allgemeine Fall folgt dann sofort aus [7, 2.10]. □

2.3 Eigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten

Satz 2.3.1. *Seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{K} \subset M$ eine kompakte Teilmenge von M.*

Dann ist $\bigcup_{p \in \mathcal{K}} T_p^1 M$ eine kompakte Teilmenge von TM.

Beweis: Bezeichne $\mathfrak{p}\colon TM \to M$ die (differenzierbare) Fußpunktabbildung. Wir werden zeigen, daß gilt:

$$\forall_{p \in M}\, \exists_{U_p \in \mathrm{Umg}(p,M)}\, \overline{\mathfrak{p}}^1(\,\overline{U_p}\,) \cap T^1 M \text{ ist kompakte Teilmenge von } TM \qquad (2.4)$$

Dann ist $(U_p)_{p \in \mathcal{K}}$ eine Überdeckung von $\mathcal{K}$ durch offene Mengen von M. Aus der Kompaktheit von $\mathcal{K}$ folgt dann die Existenz einer endlichen Teilmenge $\mathcal{K}_0$ von $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} \subset \bigcup_{p \in \mathcal{K}_0} U_p \subset \bigcup_{p \in \mathcal{K}_0} \overline{U_p}$, also gilt auch

$$\bigcup_{p \in \mathcal{K}} T_p^1 M = \overline{\mathfrak{p}}^1(\mathcal{K}) \cap T^1 M \subset \bigcup_{p \in \mathcal{K}_0} \overline{\mathfrak{p}}^1(\,\overline{U_p}\,) \cap T^1 M.$$

Da $\mathcal{K}_0$ endlich ist, folgt aus (2.4) die Kompaktheit von $\bigcup_{p \in \mathcal{K}_0} \overline{\mathfrak{p}}^1(\,\overline{U_p}\,) \cap T^1 M$. Außerdem ist $\mathcal{K}$ als kompakte Teilmenge von M abgeschlossen in M, also folgt aus der Stetigkeit von $\mathfrak{p}$, daß $\overline{\mathfrak{p}}^1(\mathcal{K})$ abgeschlossen in TM ist. Da $T^1 M$ (als Urbild der Menge $\{1\}$ unter der stetigen Funktion $\|\ldots\|\colon TM \to \mathbb{R}$) ebenfalls abgeschlossen ist, ist $\bigcup_{p \in \mathcal{K}} T_p^1 M$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums in dem Hausdorff-Raum TM, also kompakt.
Zu zeigen bleibt (2.4):
Seien $p_0 \in M$ beliebig, $m := \dim M$, $(E_1, \ldots, E_m)$ ein auf einer Umgebung G von p_0 definiertes orthonormales differenzierbares m-Beinfeld und $u\colon Gu \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von M mit $p_0 \in Gu \subset G$, $u(p_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$ sowie $u(Gu) = \mathbb{R}^m$. Wir setzen $U_{p_0} := \overline{u}^1(\,U_1(0_{\mathbb{R}^m})\,) \in \mathrm{Umg}(p_0, M)$. Es genügt zu zeigen, daß

$$\overline{\mathfrak{p}}^1(\,\overline{U_{p_0}}\,) \cap T^1 M = \overline{\mathfrak{p}}^1\big(\overline{u}^1(\,\overline{U_1(0_{\mathbb{R}^m})}\,)\big) \cap T^1 M = \overline{\mathfrak{p}}^1\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,)\big) \cap T^1 M$$

eine kompakte Teilmenge von TM ist. Da $\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,) \times S_1(0_{\mathbb{R}^m})$ offenbar eine kompakte Teilmenge von $Gu \times \mathbb{R}^m$ ist, genügt es hierfür zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} g\colon \quad Gu \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow TM\,, \\ (p, x) &\longmapsto \sum_{i=1}^{m} x_i E_i|_p \end{aligned}$$

eine stetige Funktion mit $g\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,) \times S_1(0_{\mathbb{R}^m})\big) = \overline{\mathfrak{p}}^1\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,)\big) \cap T^1 M$ ist.
Zur Stetigkeit von g:
Wir zeigen sogar, daß g differenzierbar ist. Sei $\overline{u} : \overline{\mathfrak{p}}^1(Gu) \to u(Gu) \times \mathbb{R}^m$ die zu u

assoziierte Bündelkarte und $(p,x) \in Gu \times \mathbb{R}^m$ beliebig. Dann gilt $g(p,x) \in \overline{\mathfrak{p}}^1(Gu)$ und

$$\begin{aligned}
\overline{u} \circ g(p,x) &= \big(u \circ \mathfrak{p} \circ g(p,x)\,,\, g(p,x) \cdot u_1\,,\dots,\, g(p,x) \cdot u_m\big) \\
&= \big((u \circ \mathfrak{p})(\sum_{i=1}^m x_i E_i|_p)\,,\, \sum_{i=1}^m x_i (E_i|_p \cdot u_1)\,,\dots,\, \sum_{i=1}^m x_i (E_i|_p \cdot u_m)\big) \\
&= \big(u(p)\,,\, \sum_{i=1}^m x_i \underbrace{(E_i \cdot u_1)}_{\text{differenzierbar}}(p)\,,\dots,\, \sum_{i=1}^m x_i \underbrace{(E_i \cdot u_m)}_{\text{differenzierbar}}(p)\big)\,,
\end{aligned}$$

also ist $\overline{u} \circ g$ – und damit auch g – differenzierbar in (p,x).
Zu $g\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,) \times S_1(0_{\mathbb{R}^m})\big) = \overline{\mathfrak{p}}^1\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,)\big) \cap T^1M$:
Für jedes $p \in Gu$ ist $g(p,\dots)\colon\ \mathbb{R}^m \to T_pM$ eine lineare Abbildung, die den i-ten ($i \in \{1,\dots,m\}$) Einheitsvektor der Standard-Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$ auf das i-te Element der Orthonormalbasis $E_1|_p,\dots,E_m|_p$ von T_pM abbildet, also folgt $g\big(\{p\} \times S_1(0_{\mathbb{R}^m})\big) = g\big(\{p\} \times \{x \in \mathbb{R}^m | \langle x,x\rangle = 1\}\big) = T_p^1M$ und somit

$$g\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,) \times S_1(0_{\mathbb{R}^m})\big) = \bigcup_{p \in \overline{u}^1(B_1(0_{\mathbb{R}^m}))} T_p^1M = \overline{\mathfrak{p}}^1\big(\overline{u}^1(\,B_1(0_{\mathbb{R}^m})\,)\big) \cap T^1M.$$

□

Satz 2.3.2. *Seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{K} \subset M$ kompakt. K_M bezeichne die Schnittkrümmungsfunktion.*

Dann ist $\{\mathrm{K}_M(\sigma)\,|\,q \in \mathcal{K}$ und σ 2-dimensionaler Untervektorraum von $T_qM\}$ eine (nach oben und unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Beweis: Siehe [8, Liegruppen und homogene Räume, 17.64]. □

Satz 2.3.3. *Eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.*

Beweis: In den Übungen zu [7] im Anschluß an Übung 99 besprochen. □

2.4 Der Satz von Omori

Satz 2.4. ***Vor.:*** *Seien M eine zusammenhängende, vollständige m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit nach unten beschränkter Schnittkrümmung und $\Psi\colon\ M \to \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte differenzierbare Funktion.*
Beh.: *Zu jedem $p_0 \in M$ und jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $p \in M$ derart, daß*

$$\Psi(p) \geq \Psi(p_0),$$
$$\|\mathrm{grad}_p\Psi\| < \varepsilon,$$
$$\max\{\mathrm{hess}_p\Psi(v,v) | v \in T_p^1M\} < \varepsilon.$$

Beweis: Die hier angegebene Version des Satzes von Omori entspricht dem Teil (i) inclusive Zusatz des zentralen Satzes von Kapitel 3 in [13, S. 30f]. Der Beweis ist in derselben Arbeit (S. 42-116) angegeben. □

2.5 Jacobifelder und Indexform

In diesem Abschnitt seien stets $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$.
Wir erinnern zunächst an die folgenden Bezeichnungen und Resultate:

Definition 2.5.1 (Jacobifelder)**.** Seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to M$ eine Geodätische und $Y \in \mathfrak{V}_\gamma$.

(i) Y heißt *Jacobifeld längs* γ (i.Z. $Y \in J_\gamma$)

$$:\Longleftrightarrow \quad Y'' + \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

$\overset{[7,9.11]}{\Longleftrightarrow}$ Es existiert eine Variation $V\colon [\alpha,\beta]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ von γ, die Y als Variationsvektorfeld besitzt mit $\forall_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}\, V_s$ Geodätische.

(ii) $Y \in \mathfrak{V}'_\gamma :\Longleftrightarrow Y \in \mathfrak{V}_\gamma \wedge \langle Y, \dot\gamma\rangle = 0$.

Satz 2.5.2. *Seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to M$ eine nicht-konstante Geodätische. Ferner sei $V\colon [\alpha,\beta]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ eine Variation von γ mit Längenfunktion L. Y bezeichne das Variationsvektorfeld von V und $Y^\perp$ die zu $\dot\gamma$ normale Komponente von Y.*

Dann gilt:

$$\begin{aligned} L''(0) &= \tfrac{1}{\|\dot\gamma(\alpha)\|} \Big(\int_\alpha^\beta (\|\nabla_D(Y^\perp)\|^2 - \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle)(t)\,dt \\ &\quad + \langle \nabla_{D_0} \widehat{V(\beta,\dots)}, \dot\gamma(\beta)\rangle - \langle \nabla_{D_0} \widehat{V(\alpha,\dots)}, \dot\gamma(\alpha)\rangle \Big)\end{aligned}$$

Beweis: Siehe [7, 9.15]. □

Es wird sich im folgenden als zweckmäßig erweisen, die Indexform einer Geodätischen abweichend von [7] folgendermaßen zu definieren:

Definition 2.5.3 (Indexform)**.** Seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to M$ eine Geodätische. Wir definieren $I\colon \mathfrak{V}_\gamma \times \mathfrak{V}_\gamma \to \mathbb{R}$, die sog. *Indexform* von γ, durch

$$\begin{aligned} \forall_{Y,Z\in\mathfrak{V}_\gamma}\, I(Y,Z) &:= \int_\alpha^\beta (\langle Y', Z'\rangle - \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Z\rangle)(t)\,dt \\ &= \langle Y, Z'\rangle|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \langle Y, \underbrace{Z'' + \mathrm{R}(Z,\dot\gamma)\dot\gamma}_{=0,\, falls\, Z\in J_\gamma}\rangle(t)\,dt. \end{aligned}$$

I ist offenbar eine symmetrische Bilinearform.

Bemerkung. Der Unterschied zur Definition der Indexform in [7] besteht darin, daß sie dort nur auf $\mathfrak{V}'_\gamma$ anstatt auf $\mathfrak{V}_\gamma$ definiert war.

Satz 2.5.4 (Index-Lemma; [2, Lemma 1.21])**.** *Sei* $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to M$ *eine nichtkonstante Geodätische ohne konjugierten Punkt in einer riemannschen Mannigfaltigkeit* M*, und sei* $Z \in J_\gamma$ *mit* $Z_\alpha = 0$*.*

Dann gilt für alle $Y \in \mathfrak{V}_\gamma$ *mit* $Y_\alpha = Z_\alpha = 0$ *und* $Y_\beta = Z_\beta$

$$I(Y,Y) \geq I(Z,Z) \quad \textit{mit Gleichheit genau dann, wenn} \quad Y = Z.$$

Bemerkung. In [7] wurde in 12.11 ein ähnliches Resultat für $Z \in J_\gamma \cap \mathfrak{V}'_\gamma$ (anstatt $Z \in J_\gamma$) und $Y \in \mathfrak{V}'_\gamma$ (anstatt $Y \in \mathfrak{V}_\gamma$) bewiesen. In diesem spezielleren Fall genügte es $Y_\alpha = Z_\alpha$ (anstatt $Y_\alpha = Z_\alpha = 0$) zu fordern.

Der obige Satz wird im folgenden mehrfach benötigt, und z.B. beim Beweis des Vergleichssatzes von Rauch (s.u.) genügt die in [7] angegebene Version, aber beim Beweis einer Abschätzung für die Hesseform des Quadrates der Abstandsfunktion am Ende von Kapitel 3 ist dies nicht der Fall.

Beweis: Wir bereiten den Beweis durch das folgende Lemma vor:

Lemma. *Sei* $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion mit* $g(\alpha) = 0$*.*

Dann existiert eine differenzierbare Funktion $G\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\forall_{t\in[\alpha,\beta]}\, g(t) = (t-\alpha)G(t)\,.$$

Beachte, daß eine differenzierbare Funktion für uns eine C^∞*-Funktion ist.*

Beweis des Lemmas: O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\alpha = 0$ gilt. Da die Differenzierbarkeit von

$$\begin{aligned} G\colon \quad]0,\beta] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{g(t)}{t} \end{aligned}$$

klar ist, haben wir zu zeigen, daß G in 0 differenzierbar fortsetzbar ist. Wir zeigen zunächst:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \lim_{t\to 0+} G^{(n)}(t) = \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1} \tag{2.5}$$

[Beweis hiervon:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in]0,\beta]$ beliebig. Dann gilt:

$$G^{(n)}(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(t)(-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(n-k)}(t)(-1)^k k!\, t^{n-k}}{t^{n+1}}$$

Wegen $g(0) = 0$ streben sowohl der Zähler als auch der Nenner für $t \to 0$ gegen Null, und wir können zur Berechnung von $\lim_{t\to 0+} G^{(n)}(t)$ die Regel von de L'Hospital anwenden. Die Ableitung des Zählers nach t ist:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k!\,(g^{(n-k+1)}(t)t^{n-k} + g^{(n-k)}(t)(n-k)t^{n-k-1})$$

$$\begin{aligned}
\overset{g(0)=0}{=} \quad & g^{(n+1)}(t)t^n + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k k!\, g^{(n-k+1)}(t)t^{n-k} \\
& + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}(-1)^{k-1}(k-1)!\, g^{(n-k+1)}(t)(n-k+1)t^{n-k} \\
= \quad & g^{(n+1)}(t)t^n \\
& + \textstyle\sum_{k=1}^n \Big(\binom{n}{k}k! - \underbrace{\binom{n}{k-1}(n-k+1)(k-1)!}_{=\binom{n}{k}k!}\Big)(-1)^k g^{(n-k+1)}(t)t^{n-k} \\
= \quad & g^{(n+1)}(t)t^n
\end{aligned}$$

Die Ableitung des Nenners nach t ist $(n+1)t^n$, also folgt aus der Voraussetzung

$$\lim_{t\to 0+} G^{(n)}(t) = \frac{1}{n+1} \lim_{t\to 0+} g^{(n+1)}(t) = \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1},$$

und (2.5) ist bewiesen.]
Wir behaupten:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ G\colon\ [0,\beta] \to \mathbb{R}\ C^n\text{-Funktion mit } G^{(n)}(0) = \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1} \tag{2.6}$$

Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:
Für $n = 0$ ist dies klar wegen der Differenzierbarkeit von g in 0 mit $g(0) = 0$ und

$$\lim_{t\to 0+} G(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g^{'}(0) = G(0).$$

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und (2.6) klar für $n-1$. Weiter sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]0,\beta]$ mit $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz von $\xi_k \in]0, t_k[$ und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{G^{(n-1)}(t_k) - G^{(n-1)}(0)}{t_k} = \lim_{k\to\infty} G^{(n)}(\xi_k) \overset{(2.5)}{=} \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Daher ist $G^{(n-1)}$ auch in 0 differenzierbar mit Ableitung $\frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}$, und $G^{(n)}$ ist auch in 0 stetig wegen $\lim_{t\to 0+} G^{(n)}(t) = \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1} = G^{(n)}(0)$.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Beweis des Satzes: Seien $m := \dim M$ und $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von $T_{\gamma(\beta)}M$. Da γ nach Voraussetzung keinen konjugierten Punkt besitzt, existieren nach [7, 10.2] (eindeutig bestimmte) $V_1, \ldots, V_m \in J_\gamma$ mit $\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} V_i|_\alpha = 0 \wedge V_i|_\beta = v_i$. Dann gilt

$$\forall_{t\in]\alpha,\beta]}\ V_1|_t, \ldots, V_m|_t \quad \text{sind linear unabhängig .} \tag{2.7}$$

[Denn andernfalls existierten $t_0 \in]\alpha,\beta[$ und $i \in \{1,\ldots,m\}$ sowie $\lambda_j \in \mathbb{R}$ mit $V_i|_{t_0} = \sum_{j=1,j\neq i}^m \lambda_j V_j|_{t_0}$. Aus [7, 10.2] folgte dann $V_i = \sum_{j=1,j\neq i}^m \lambda_j V_j$, also insbes. $v_i = V_i|_\beta = \sum_{j=1,j\neq i} \lambda_j V_j|_\beta = \sum_{j=1,j\neq i} \lambda_j v_j$, im Widerspruch dazu, daß $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von $T_{\gamma(\beta)}M$ ist.]

Als nächstes beweisen wir die Existenz von differenzierbaren Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_m \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{t \in [\alpha,\beta]} \, Y_t = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t) V_i|_t. \tag{2.8}$$

[Zu (2.8):
Die Existenz von differenzierbaren Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_m \colon]\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ mit (2.8) folgt aus (2.7) und der Cramerschen Regel analog zu [7, 6.4a)]. Zu zeigen bleibt die rechtsseitige Differenzierbarkeit in α:

Sei $E_1, \ldots, E_m$ ein orthonormales differenzierbares m-Beinfeld längs γ. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$V_i = \sum_{j=1}^{m} \langle V_i, E_j \rangle E_j,$$

und die $g_{ij} := \langle V_i, E_j \rangle$ sind differenzierbare Funktionen auf $[\alpha, \beta]$ für die wegen $V_i(\alpha) = 0$ gilt: $\forall_{i,j \in \{1,\ldots,m\}} \, g_{ij}(\alpha) = 0$. Aus dem Lemma folgt die Existenz von differenzierbaren Funktionen $G_{ij} \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ mit $\forall_{t \in [\alpha,\beta]} \, G_{ij}(t)(t - \alpha) = g_{ij}(t)$, also gilt

$$\forall_{i \in \{1,\ldots,m\}} \, V_i|_t = (t - \alpha) \underbrace{\sum_{j=1}^{m} G_{ij} E_j}_{=: A_i \in \mathfrak{V}_\gamma([\alpha,\beta])} |_t. \tag{2.9}$$

Hieraus folgt $V_i'|_\alpha = A_i|_\alpha$. Aus (2.7) und [7, 9.10] ergibt sich dann weiter die lineare Unabhängigkeit von $A_1|_\alpha, \ldots, A_m|_\alpha$. Aus Stetigkeitsgründen existiert eine Zahl $\varepsilon \in]\alpha, \beta]$ mit

$$\forall_{t \in [\alpha,\varepsilon[} \quad A_1|_t, \ldots, A_m|_t \text{ sind linear unabhängig.} \tag{2.10}$$

Daher existieren erneut nach der Cramerschen Regel differenzierbare Funktionen $q_1, \ldots, q_m \colon [\alpha, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit

$$Y|_{[\alpha,\varepsilon[} = \sum_{i=1}^{m} q_i A_i|_{[\alpha,\varepsilon[}. \tag{2.11}$$

Wegen $Y_\alpha = 0$ (nach Vor.) und (2.10) gilt dann auch $\forall_{i \in \{1,\ldots,m\}} \, q_i(\alpha) = 0$ und es folgt wiederum aus dem Lemma

$$\frac{q_i(x)}{x - \alpha} \colon \;]\alpha, \varepsilon[\to \mathbb{R} \text{ läßt sich in } \alpha \text{ (rechtsseitig) differenzierbar fortsetzen.} \tag{2.12}$$

Nun gilt für $t \in]\alpha, \varepsilon[$

$$\textstyle\sum_i \psi_i(t)(t - \alpha) A_i|_t \overset{(2.9)}{=} \sum_i \psi_i(t) V_i|_t = Y|_t \overset{(2.11)}{=} \sum_i q_i(t) A_i(t).$$

Aus (2.10) folgt für alle i: $\forall_{t\in]\alpha,\varepsilon[}\psi_i(t)=\frac{q_i(t)}{t-\alpha}$ und somit nach (2.12) die rechtsseitige Differenzierbarkeit von ψ_i in α. Damit ist (2.8) gezeigt.]

Nach [7, 9.10] ist $\{\widetilde{Z}\in J_\gamma|\widetilde{Z}_\alpha=0\}$ ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, also folgt aus $Z,V_1,\ldots,V_m\in\{\widetilde{Z}\in J_\gamma|\widetilde{Z}_\alpha=0\}$ und (2.7) die Existenz von $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ mit $Z=\sum_{i=1}^m\lambda_iV_i$. Wegen $Y_\beta=Z_\beta$ (nach Vor.) folgt aus (2.8)

$$\sum_{i=1}^m\psi_i(\beta)\underbrace{V_i|_\beta}_{=v_i}=\sum_{i=1}^m\lambda_i\underbrace{V_i|_\beta}_{=v_i},$$

also, da $v_1,\ldots,v_m$ eine Basis ist: $\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}}\lambda_i=\psi_i(\beta)$, d.h.

$$Z=\sum_{i=1}^m\psi_i(\beta)V_i\quad\text{ und }\quad Z'=\sum_{i=1}^m\psi_i(\beta)V_i' \tag{2.13}$$

Aus 2.5.3 folgt wegen $Z\in J_\gamma$ und $Z_\alpha=0$

$$I(Z,Z)=\langle Z_\beta,Z'_\beta\rangle\overset{(2.13)}{=}\sum_{i,j=1}^m\psi_i(\beta)\psi_j(\beta)\langle V_i|_\beta,V_j'|_\beta\rangle. \tag{2.14}$$

Ferner gilt wegen $V_i,V_j\in J_\gamma$ und [7, Ü 92b)] für alle $i,j\in\{1,\ldots,m\}$

$$\langle V_i',V_j\rangle-\langle V_i,V_j'\rangle=\text{konst.},$$

also wegen $V_i|_\alpha=V_j|_\alpha=0$

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,m\}}\,\langle V_i',V_j\rangle=\langle V_i,V_j'\rangle. \tag{2.15}$$

Wir berechnen nun $I(Y,Y)$:

$$\begin{aligned} Y' &\overset{(2.8)}{=} \nabla_D(\sum\psi_iV_i)=\sum\psi_i\nabla_DV_i+\sum(D\cdot\psi_i)V_i\\ &= \underbrace{\sum\psi_iV_i'}_{=:A}+\underbrace{\sum\psi_i'V_i}_{=:B} \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} I(Y,Y) &= \int_\alpha^\beta(\,\langle Y',Y'\rangle-\langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle\,)(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta(\,\langle A,A\rangle+2\langle A,B\rangle+\langle B,B\rangle-\langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle\,)(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\int_\alpha^\beta\langle A,A\rangle(t)\,dt\quad\overset{(2.16)}{=}\quad\sum_{i,j=1}^m\int_\alpha^\beta(\psi_i\psi_j\quad\underbrace{\langle V_i',V_j'\rangle}_{=\langle V_i',V_j\rangle'-\langle V_i'',V_j\rangle}\quad)(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{m} \Big([\psi_i\psi_j \langle V_i', V_j\rangle]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \big(\psi_i\psi_j\big)' \langle V_i', V_j\rangle\big)(t)\,dt \\
&\qquad - \int_\alpha^\beta (\psi_i\psi_j\langle \underbrace{V_i''}_{\overset{V_i\in J_\gamma}{=} -\mathrm{R}(V_i,\dot\gamma)\dot\gamma} , V_j\rangle)(t)\,dt\Big) \\
&\overset{V_j|_\alpha=0}{=} \overbrace{\sum_{i,j=1}^{m} \psi_i(\beta)\psi_j(\beta)\langle V_i'|_\beta, V_j|_\beta\rangle}^{\overset{(2.14)}{=} I(Z,Z)} \\
&\qquad - \sum_{i,j=1}^{m} \int_\alpha^\beta (\,(\psi_i\psi_j)'\langle V_i', V_j\rangle\,)(t)\,dt \\
&\qquad + \int_\alpha^\beta \langle\, \mathrm{R}(\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\psi_i V_i}_{\overset{(2.8)}{=}Y}, \dot\gamma)\dot\gamma\,,\ \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\psi_j V_j}_{\overset{(2.8)}{=}Y}\,\rangle(t)\,dt \\
&= I(Z,Z) - \sum_{i,j=1}^{m}\int_\alpha^\beta \big(\,\psi_i'\psi_j\ \overbrace{\langle V_i', V_j\rangle}^{\overset{(2.15)}{=}\langle V_i, V_j'\rangle}\ + \psi_i\psi_j'\langle V_i' V_j\rangle\,\big)(t)\,dt \\
&\qquad + \int_\alpha^\beta \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle(t)\,dt \\
&= I(Z,Z) \\
&\qquad - \int_\alpha^\beta \big(\langle \overbrace{\sum_{i=1}^{m}\psi_i' V_i}^{\overset{(2.16)}{=}B}, \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\psi_j V_j'}^{\overset{(2.16)}{=}A}\rangle + \langle \overbrace{\sum_{i=1}^{m}\psi_i V_i'}^{\overset{(2.16)}{=}A}, \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\psi_j' V_j}^{\overset{(2.16)}{=}B}\rangle\big)(t)\,dt \\
&\qquad + \int_\alpha^\beta \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle(t)\,dt \\
&= I(Z,Z) - \int_\alpha^\beta \big(2\langle A,B\rangle - \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle\big)(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Aus (2.17) und der letzten Rechnung folgt

$$
\begin{aligned}
I(Y,Y) &= \int_\alpha^\beta \big(\langle A,A\rangle + 2\langle A,B\rangle - \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle + \langle B,B\rangle\big)(t)\,dt \\
&= I(Z,Z) + \underbrace{\int_\alpha^\beta \underbrace{\langle B,B\rangle(t)}_{\geq 0}\,dt}_{\geq 0}\,,
\end{aligned}
$$

also gilt $I(Y,Y) \geq I(Z,Z)$.

Ist $I(Y,Y) = I(Z,Z)$, so folgt aus Stetigkeitsgründen $\langle B, B\rangle = 0$ und somit ergibt sich (da ψ_i stetig in α ist)

$$\begin{aligned} & 0 = \|B\| \overset{(2.16)}{=} \|\textstyle\sum_{i=1}^m \psi_i' V_i\| \\ \overset{(2.7)}{\Longrightarrow} \quad & \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}\,\forall_{t\in]\alpha,\beta]}\,\psi_i'(t) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}\,\forall_{t\in[\alpha,\beta]}\,\psi_i(t) = \psi_i(\beta) \\ \Longrightarrow \quad & \forall_{t\in[\alpha,\beta]}\,Y_t \overset{(2.8)}{=} \textstyle\sum_{i=1}^m \psi_i(\beta) V_i|_t \overset{(2.13)}{=} Z_t, \end{aligned}$$

und der Satz ist vollständig bewiesen. □.

2.6 Der Vergleichssatz von Rauch

Satz 2.6. ***Vor.:*** *Seien $k \in \mathbb{N}$, M eine m-dimensionale und $\widetilde{M}$ eine $(m+k)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Ferner seien $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\gamma\colon\ [0,\beta] \to M$ sowie $\widetilde{\gamma}\colon\ [0,\beta] \to \widetilde{M}$ nicht-konstante Geodätische derselben Geschwindigkeit, also*

$$\|\dot\gamma\| = \|\dot{\widetilde{\gamma}}\| = \text{konst.} \neq 0 \tag{2.18}$$

und seien $Y \in J_\gamma$, $\widetilde{Y} \in J_{\widetilde{\gamma}}$ mit

$$Y_0 = 0 \quad \widetilde{Y}_0 = 0 \tag{2.19}$$

$$\langle Y_0', \dot\gamma(0)\rangle = \langle \widetilde{Y}_0', \dot{\widetilde{\gamma}}(0)\rangle \tag{2.20}$$

$$\|Y_0'\| = \|\widetilde{Y}_0'\|. \tag{2.21}$$

Außerdem besitze $\widetilde{\gamma}$ keinen konjugierten Punkt, und es gelte für alle $t \in [0,\beta]$, $v \in T_{\gamma(t)}M$ sowie $\widetilde{v} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$:

$$\begin{aligned} & v, \dot\gamma(t) \text{ linear unabhängig und } \widetilde{v}, \dot{\widetilde{\gamma}}(t) \text{ linear unabhängig} \\ \Longrightarrow \quad & \mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v, \dot\gamma(t)\}) \leq \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{\widetilde{v}, \dot{\widetilde{\gamma}}(t)\}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Beh.: $\forall_{t\in[0,\beta]}\,\|Y_t\| \geq \|\widetilde{Y}_t\|$

Beweis: Die Beweisidee stammt aus [3].
Nach [7, Ü 92c)] existieren $a, \widetilde{a}, b, \widetilde{b} \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{t\in[0,\beta]}\,\langle Y, \dot\gamma\rangle(t) = at + b \,\wedge\, \langle \widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}}\rangle(t) = \widetilde{a}t + \widetilde{b}\,.$$

Wegen (2.19) folgt hieraus zum einen $b = \widetilde{b} = 0$ und zum anderen (wegen $\nabla_D\dot\gamma = 0$, $\widetilde{\nabla}_D\dot{\widetilde{\gamma}} = 0$): $\langle Y, \dot\gamma\rangle' = \langle Y', \dot\gamma\rangle = a$ und $\langle \widetilde{Y}', \dot{\widetilde{\gamma}}\rangle = \widetilde{a}$, d.h. nach (2.20)

$$a = \langle Y', \dot\gamma\rangle = \langle \widetilde{Y}', \dot{\widetilde{\gamma}}\rangle = \widetilde{a}, \tag{2.23}$$

also gilt insgesamt

$$\forall_{t\in[0,\beta]}\ \langle Y,\dot\gamma\rangle(t)=\langle Y_0',\dot\gamma(0)\rangle t=\langle \widetilde{Y}_0',\dot{\widetilde{\gamma}}(0)\rangle t=\langle \widetilde{Y},\dot{\widetilde{\gamma}}\rangle(t)\,. \tag{2.24}$$

Wir begründen zunächst, warum wir o.B.d.A. $a=0$, also

$$\langle Y',\dot\gamma\rangle=\langle \widetilde{Y}',\dot{\widetilde{\gamma}}\rangle=0 \tag{2.25}$$

annehmen dürfen.
[Hierzu: Seien $Y^T, Y^\perp\in\mathfrak{V}_\gamma$ die zu $\dot\gamma$ tangentiale bzw. normale Komponente von Y und $E_1,\dots,E_m$ ein orthonormales paralleles Basisfeld längs γ mit $E_1=\frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}$. Dann gilt $Y^\perp=\sum_{i=2}^m\langle Y,E_i\rangle E_i$ und

$$\begin{gathered}
\langle Y^\perp,\dot\gamma\rangle=0\\
Y_0^\perp=\textstyle\sum_{i=2}^m\langle Y_0,E_i|_0\rangle E_i|_0 \overset{(2.19)}{=} 0\\
\langle (Y^\perp)_0',\dot\gamma(0)\rangle=\langle \textstyle\sum_{i=2}^m\langle Y_0',E_i\rangle E_i,\|\dot\gamma(0)\|E_1|_0\rangle=0\\
\|(Y^\perp)_0'\|^2=\textstyle\sum_{i=2}^m\langle Y_0',E_i|_0\rangle^2=\|Y_0'\|^2-\langle Y_0',E_1|_0\rangle^2 \overset{(2.23)}{=} \|Y_0'\|^2-\frac{a^2}{\|\dot\gamma(0)\|^2}\,.
\end{gathered}$$

Analog sieht man ein, daß auch gilt

$$\begin{gathered}
\langle \widetilde{Y}^\perp,\dot{\widetilde{\gamma}}\rangle=0,\qquad \widetilde{Y}_0^\perp=0,\qquad \langle (\widetilde{Y}^\perp)_0',\dot{\widetilde{\gamma}}(0)\rangle=0,\\
\|(\widetilde{Y}^\perp)_0'\|^2=\|\widetilde{Y}_0'\|^2-\frac{\widetilde{a}^2}{\|\dot{\widetilde{\gamma}}(0)\|^2} \overset{(2.21),(2.23),(2.18)}{=} \|Y_0'\|^2-\frac{a^2}{\|\dot\gamma(0)\|^2}\,.
\end{gathered}$$

Da $Y^\perp,\widetilde{Y}^\perp$ nach [7, Ü 92f)] ebenfalls Jacobifelder sind und wegen der letzten Überlegung auch die Voraussetzungen des Satzes und zusätzlich (2.25) (anstelle von $Y,\widetilde{Y}$) erfüllen, folgt (wenn wir den Satz unter der Voraussetzung, daß (2.25) gilt, gezeigt haben) für alle $t\in[0,\beta]$:

$$\begin{aligned}
&& \|Y_t^\perp\| &\geq \|\widetilde{Y}_t^\perp\|\\
&\overset{(2.18)}{\Longleftrightarrow} & a^2t^2\frac{1}{\|\dot\gamma\|^2}+\langle Y_t^\perp,Y_t^\perp\rangle &\geq a^2t^2\frac{1}{\|\dot{\widetilde{\gamma}}\|^2}+\langle \widetilde{Y}_t^\perp,\widetilde{Y}_t^\perp\rangle\\
&\overset{(2.23),(2.24)}{\Longleftrightarrow} & \underbrace{\langle Y_t,\dot\gamma(t)\rangle^2\frac{1}{\|\dot\gamma\|^2}}_{=\langle Y_t^T,Y_t^T\rangle}+\langle Y_t^\perp,Y_t^\perp\rangle &\geq \underbrace{\langle \widetilde{Y}_t,\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\rangle^2\frac{1}{\|\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\|^2}}_{=\langle \widetilde{Y}_t^T,\widetilde{Y}_t^T\rangle}+\langle \widetilde{Y}_t^\perp,\widetilde{Y}_t^\perp\rangle\\
&\Longleftrightarrow & \langle Y_t^T+Y_t^\perp,Y_t^T+Y_t^\perp\rangle &\geq \langle \widetilde{Y}_t^T+\widetilde{Y}_t^T,\widetilde{Y}_t^T+\widetilde{Y}_t^T\rangle\\
&\Longleftrightarrow & \|Y_t\| &\geq \|\widetilde{Y}_t\|
\end{aligned}$$

Damit ist dann die Behauptung gezeigt.]
Ferner können wir o.B.d.A. annehmen, daß gilt

$$\|Y_0'\| \overset{(2.21)}{=} \|\widetilde{Y}_0'\|\neq 0. \tag{2.26}$$

(Denn andernfalls folgte aus der Tatsache, daß Y und $\widetilde{Y}$ Jacobifelder sind, [7, 9.10] und (2.19) $Y = 0$, $\widetilde{Y} = 0$, und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt.)

Wir definieren differenzierbare Funktionen

$$v := \|Y\|^2, \widetilde{v} := \|\widetilde{Y}\|^2 \colon\ [0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Da $\widetilde{\gamma}$ nach Voraussetzung keinen konjugierten Punkt besitzt und wegen $\widetilde{Y} \in J_{\widetilde{\gamma}}$ mit $\widetilde{Y}_0 = 0$ (nach(2.19)) gilt

$$\forall_{t \in]0,\beta]}\, \widetilde{v}(t) \neq 0\,, \tag{2.28}$$

also ist auch $\frac{v}{\widetilde{v}} \colon\ ]0, \beta] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir zeigen:

$$\lim_{t \to 0+} \tfrac{v(t)}{\widetilde{v}(t)} = 1 \tag{2.29}$$

$$\tfrac{v}{\widetilde{v}} \text{ ist auf }]0, \beta] \text{ monoton wachsend} \tag{2.30}$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt hieraus dann offenbar $\forall_{t \in [0,\beta]} \|Y_t\| \geq \|\widetilde{Y}_t\|$, d.h. zum Nachweis des Satzes bleiben (2.29) und (2.30) zu zeigen.
Zu (2.29):
v und $\widetilde{v}$ sind auf $[0, \beta]$ differenzierbar und es gilt nach (2.27) und (2.19):

$$\begin{aligned} v(0) = \widetilde{v}(0) &= 0 \\ v'(0) = 2\langle Y_0', Y_0\rangle &= 0 \\ \widetilde{v}'(0) = 2\langle \widetilde{Y}_0', \widetilde{Y}_0\rangle &= 0 \\ v''(0) = 2(\langle Y_0'', Y_0\rangle + \langle Y_0', Y_0'\rangle) &= 2\|Y_0'\|^2 \\ \widetilde{v}''(0) = 2(\langle \widetilde{Y}_0'', \widetilde{Y}_0\rangle + \langle \widetilde{Y}_0', \widetilde{Y}_0'\rangle) &= 2\|\widetilde{Y}_0'\|^2 \end{aligned}$$

Daher folgt aus (2.26) durch zweimaliges Anwenden der Regel von de L'Hospital

$$1 = \frac{v''(0)}{\widetilde{v}''(0)} = \lim_{t \to 0+} \frac{v'(t)}{\widetilde{v}'(t)} = \lim_{t \to 0+} \frac{v(t)}{\widetilde{v}(t)},$$

womit (2.29) gezeigt ist.
Zu (2.30):
Es genügt zu zeigen, daß $\forall_{t \in]0,\beta]} \left(\frac{v}{\widetilde{v}}\right)'(t) \geq 0$, d.h. genau

$$\forall_{t \in]0,\beta]}\, v'(t)\widetilde{v}(t) \geq \widetilde{v}'(t) v(t). \tag{2.31}$$

Sei $t_0 \in]0, \beta]$ beliebig. Wir zeigen (2.31) für t_0:

1. Fall: $v(t_0) = 0$

Nach (2.27) gilt dann auch $Y_{t_0} = 0$ und somit $v'(t_0) = 2\langle Y_{t_0}', Y_{t_0}\rangle = 0$, also steht auf beiden Seiten von (2.31) Null, und (2.31) gilt.

2. Fall: $v(t_0) \neq 0$
Nach (2.28) ist auch $\widetilde{v}(t_0) \neq 0$, und folglich sind mit $Y, \widetilde{Y}$ auch

$$U := \frac{1}{\sqrt{v(t_0)}} Y \text{ und } \widetilde{U} := \frac{1}{\sqrt{\widetilde{v}(t_0)}} \widetilde{Y} \text{ Jacobifelder,} \tag{2.32}$$

für die wegen (2.25) gilt

$$\langle U, \dot{\gamma} \rangle = \langle \widetilde{U}, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle = 0. \tag{2.33}$$

Seien $I\colon \mathfrak{V}_{\gamma|_{[0,t_0]}} \times \mathfrak{V}_{\gamma|_{[0,t_0]}} \to \mathbb{R}$ bzw. $\widetilde{I}\colon \mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}|_{[0,t_0]}} \times \mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}|_{[0,t_0]}} \to \mathbb{R}$ die Indexformen von $\gamma|_{[0,t_0]}$ bzw. $\widetilde{\gamma}|_{[0,t_0]}$. Dann ergibt sich

$$\frac{v'(t_0)}{v(t_0)} \overset{(2.27)}{=} 2\,\frac{\langle Y'|_{t_0}, Y_{t_0}\rangle}{v(t_0)} \overset{(2.32),(2.19)}{=} 2\,\langle U', U\rangle|_0^{t_0} \overset{2.5.3,(2.32)}{=} 2\,I(U,U)$$
$$\frac{\widetilde{v}'(t_0)}{\widetilde{v}(t_0)} = \ldots = 2\,\widetilde{I}(\widetilde{U}, \widetilde{U}).$$

Daher genügt es zum Nachweis von (2.31) in t_0 zu zeigen, daß gilt

$$I(U,U) \geq \widetilde{I}(\widetilde{U}, \widetilde{U}). \tag{2.34}$$

Beweis hiervon:
Da γ und $\widetilde{\gamma}$ nicht konstante Geodätische sind und wegen (2.27),(2.32),(2.33) existieren ein differenzierbares paralleles orthonormales Basisfeld $E_1, \ldots, E_m$ längs γ und ein differenzierbares paralleles orthonormales Basisfeld $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_{m+k}$ längs $\widetilde{\gamma}$ derart, daß gilt:

$$E_1 = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \quad E_2|_{t_0} = U_{t_0}, \quad \widetilde{E}_1 = \frac{\dot{\widetilde{\gamma}}}{\|\dot{\widetilde{\gamma}}\|}, \quad \widetilde{E}_2|_{t_0} = \widetilde{U}_{t_0}. \tag{2.35}$$

Wir definieren $\widetilde{Z} \in \mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}}$ durch $\widetilde{Z} := \sum_{i=1}^m \langle U, E_i \rangle \widetilde{E_i}$ und zeigen (2.34) durch die folgenden beiden Ungleichungen:

$$I(U,U) \geq \widetilde{I}(\widetilde{Z}, \widetilde{Z}) \tag{2.36}$$
$$\widetilde{I}(\widetilde{Z}, \widetilde{Z}) \geq \widetilde{I}(\widetilde{U}, \widetilde{U}) \tag{2.37}$$

[Zu (2.36):
Es gilt:

$$\langle \widetilde{Z}, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle \overset{(2.35)}{=} \|\dot{\widetilde{\gamma}}\| \textstyle\sum_{i=1}^m \langle U, E_i \rangle \langle \widetilde{E}_i, \widetilde{E}_1 \rangle \overset{(2.35)}{=} \|\dot{\widetilde{\gamma}}\| \langle U, \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \rangle \overset{(2.33)}{=} 0$$
$$\langle \widetilde{Z}, \widetilde{Z} \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^m \langle U, E_i \rangle^2 = \langle U, U \rangle$$

Daher folgt für alle $t \in [0, t_0]$

$$U_t, \dot{\gamma}(t) \text{ linear abhängig } \overset{(2.33)}{\Longleftrightarrow} U_t = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{Z}_t = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{Z}_t, \dot{\widetilde{\gamma}}(t) \text{ linear abhängig}$$

und

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{R}(U_t,\dot\gamma(t))\dot\gamma(t),U_t\rangle &= \|U_t\|^2\|\dot\gamma(t)\|^2\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{\sigma_t\})\\ &\overset{(2.18),(2.22)}{\leq} \|\widetilde{Z}_t\|^2\|\dot{\widetilde\gamma}(t)\|^2\widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{\widetilde\sigma_t\})\\ &= \langle\widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Z}_t,\dot{\widetilde\gamma}(t))\dot{\widetilde\gamma}(t),\widetilde{Z}_t\rangle,\end{aligned}$$

wobei σ_t bzw. $\widetilde\sigma_t$ zweidimensionale Untervektorräume von $T_{\gamma(t)}M$ bzw. $T_{\widetilde\gamma(t)}\widetilde{M}$ mit $U_t,\dot\gamma(t)\in\sigma_t$ und $\widetilde{Z}_t,\dot{\widetilde\gamma}(t)\in\widetilde\sigma_t$ seien.

Außerdem folgt aus der Parallelität der E_i längs γ und der $\widetilde{E_i}$ längs $\widetilde\gamma$

$$\begin{gathered}\widetilde{Z}' = \textstyle\sum_{i=1}^m\langle U',E_i\rangle\widetilde{E}_i\\ \langle\widetilde{Z}',\widetilde{Z}'\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^m\langle U',E_i\rangle^2 = \langle U',U'\rangle\end{gathered}$$

und somit

$$\begin{aligned}I(U,U) &= \int_0^{t_0}\langle U_t',U_t'\rangle - \langle\mathrm{R}(U_t,\dot\gamma(t))\dot\gamma(t),U_t\rangle\,dt\\ &\geq \int_0^{t_0}\langle\widetilde{Z}_t',\widetilde{Z}_t'\rangle - \langle\widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Z}_t,\dot{\widetilde\gamma}(t))\dot{\widetilde\gamma}(t),\widetilde{Z}_t\rangle\,dt\\ &= \widetilde{I}(\widetilde{Z},\widetilde{Z}).\end{aligned}$$

Zu (2.37):
Nach (2.32) ist $\widetilde{U}$ ein Jacobifeld längs $\widetilde\gamma$ mit $\widetilde{Z}_0=\widetilde{U}_0=0$ und es gilt wegen (2.35)

$$\widetilde{Z}_{t_0} = \sum_{i=1}^m\langle U_{t_0},E_i|_{t_0}\rangle\widetilde{E}_i|_{t_0} = \widetilde{E}_2|_{t_0} = \widetilde{U}_{t_0},$$

also folgt (2.37) aus dem Index-Lemma 2.5.4, da $\widetilde\gamma$ nach Voraussetzung keinen konjugierten Punkt besitzt.]

Damit ist der Vergleichssatz von Rauch vollständig bewiesen. □

2.7 Das Hopf-Lemma

Satz 2.7. *Seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Psi\colon M\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\triangle\Psi\geq 0$. Dann gilt:*

Ψ hat bei $p\in M$ ein lokales Maximum $\Longrightarrow \exists_{U\in\mathrm{Umg}(p,M)}\Psi|_U = \text{konst.}$

Beweis: Siehe [14, S. 181-190]. □

Kapitel 3

Die Abstandsfunktion

Wir haben in Beispiel 1.2.4 gezeigt, daß die Abstandsfunktion von einem Punkt in den Standard-Räumen konstanter Krümmung in nur höchstens zwei Punkten nicht differenzierbar ist. In diesem Kapitel wollen wir in allgemeineren Mannigfaltigkeiten, nämlich in solchen mit nach oben beschränkter Krümmung, offene Mengen angeben, auf denen die Differenzierbarkeit der Abstandsfunktion sichergestellt werden kann. Im Anschluß beweisen wir eine Abschätzung für die Hesseform des Quadrates der Abstandsfunktion, die wir in den folgenden Kapiteln mehrfach in Beweisen benötigen werden.

Satz 3.1. *Sei M eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit derart, daß für ihre Schnittkrümmung* $\mathrm{K} \leq C \in \mathbb{R}$ *gelte, und sei* $l \in \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C \leq 0 \end{array} \right\}$.

Dann besitzt keine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Länge l einen konjugierten Punkt.

Bemerkung. Das Beispiel des Standard-Raumes konstanter Krümmung $C > 0$ zeigt, daß nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$ in riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nach oben durch C beschränkter Krümmung konjugierte Punkte haben können.

Beweis: Im Falle $C \leq 0$ ist 3.1 klar nach [7, 12.2], sei also $C > 0$. Seien $l \in]0, \frac{\pi}{\sqrt{C}}[$, $\gamma\colon [0, l] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische und $Y \in J_\gamma \setminus \{0\}$ mit $Y_0 = 0$ beliebig. Zu zeigen ist $\forall_{t \in]0,l]} \|Y_t\| > 0$.

Sei $\widetilde{\gamma}\colon [0, l] \to M_C^m$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Dann existiert $\widetilde{Y} \in J_{\widetilde{\gamma}} \setminus \{0\}$ derart, daß gilt:

$$\widetilde{Y}_0 = 0, \quad \langle \widetilde{Y}_0', \dot{\widetilde{\gamma}}(0) \rangle = \langle Y_0', \dot{\gamma}(0) \rangle, \quad \|\widetilde{Y}'(0)\| = \|Y'(0)\|. \tag{3.1}$$

[Hierzu:
Zunächst existiert $w \in T_{\widetilde{\gamma}(0)} M_C^m$ mit $\langle w, \dot{\widetilde{\gamma}}(0) \rangle = \langle Y_0', \dot{\gamma}(0) \rangle$ und $\|w\| = \|Y_0'\|$.

Denn wegen $\|\dot{\widetilde{\gamma}}(0)\| = 1$ und $m \geq 2$ existiert $e \in T_{\widetilde{\gamma}(0)}M_C^m$ so, daß $\dot{\widetilde{\gamma}}(0)$ und e orthonormal zueinander sind, und es gilt für

$$w := \langle Y_0', \dot{\gamma}(0)\rangle \,\dot{\widetilde{\gamma}}(0) + \sqrt{\|Y_0'\|^2 - \langle Y_0', \dot{\gamma}(0)\rangle^2}\, e \in T_{\widetilde{\gamma}(0)}M_C^m$$

(beachte, daß der Ausdruck unter der Wurzel nach Cauchy-Schwarz ≥ 0 ist):

$$\langle w, \dot{\widetilde{\gamma}}(0)\rangle = \langle Y_0', \dot{\gamma}(0)\rangle$$
$$\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = \langle Y_0', \dot{\gamma}(0)\rangle^2 + \|Y_0'\|^2 - \langle Y_0', \dot{\gamma}(0)\rangle^2 = \|Y_0'\|^2$$

Sodann existiert nach [7, 9.10] genau ein $\widetilde{Y} \in J_{\widetilde{\gamma}}$ mit $\widetilde{Y}_0 = 0$ und $\widetilde{Y}_0' = w$, und es ist $\widetilde{Y} \neq 0$ wegen $0 \neq \|Y_0'\| = \|\widetilde{Y}_0'\|$ (andernfalls folgte aus $Y_0 = Y_0' = 0$ und [7, 9.10] $Y = 0$, im Widerspruch zur Wahl von Y.)]
Wegen [7, 10.5] und Länge$(\widetilde{\gamma}) = l \in]0, \frac{\pi}{\sqrt{C}}[$ besitzt $\widetilde{\gamma}$ keinen konjugierten Punkt, also folgt (aus $\widetilde{Y} \in J_{\widetilde{\gamma}}$ mit $\widetilde{Y}_0 = 0$) $\forall_{t\in]0,l]}\, \|\widetilde{Y}_t\| > 0$. Da ferner nach Vor. $\mathrm{K} \leq C = \widetilde{\mathrm{K}}$ gilt, folgt aus $Y_0 = 0$, (3.1) und dem Vergleichssatz von Rauch 2.6

$$\forall_{t\in]0,l]}\; \|Y_t\| \geq \|\widetilde{Y}_t\| > 0.$$

□

Bemerkung.

1.) Im Falle $C \leq 0$ kann man den Beweis analog zum Fall $C > 0$ führen, indem man ausnutzt, daß nicht konstante Geodätische in den Standard-Räumen konstanter Krümmung kleiner oder gleich Null keine konjugierten Punkte besitzen.

2.) Sehr ähnlich zum obigen Beweis kann man zeigen, daß in einer riemannschen Mannigfaltigkeit mit durch $C \in \mathbb{R}_+$ nach <u>unten</u> beschränkter Krümmung eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$ mindestens einen konjugierten Punkt besitzt. Denn andernfalls folgte aus dem Vergleichssatz von Rauch, daß eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$ im Standard-Raum konstanter Krümmung $C(> 0)$ keinen konjugierten Punkt besitzt, im Widerspruch zu [7, 10.5].

Korollar 3.2. *Sei M eine vollständige m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit derart, daß für ihre Schnittkrümmung $\mathrm{K} \leq C \in \mathbb{R}$ gelte. Für alle $q \in M$ bezeichne*

$$i_q \;:=\; \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ |\ \exp_q|_{U_\varepsilon(0_q)} \textit{ überall von maximalem Rang } \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

den Immersionsradius von q in M.
Dann gilt:

$$C > 0 \implies \forall_{q\in M}\, i_q \geq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$$
$$C \leq 0 \implies \forall_{q\in M}\, i_q = \infty$$

Beweis: Wir haben zu zeigen:

$$\forall_{q\in M}\forall_{\varepsilon\in\left\{\begin{array}{lcl}]0,\frac{\pi}{\sqrt{C}}[& : & C>0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C\leq 0\end{array}\right\}} \exp_q|_{U_\varepsilon(0_q)} \text{ überall von maximalem Rang} \quad (3.2)$$

Angenommen (3.2) wäre falsch. Dann existierten $q \in M$, $\varepsilon \in \left\{\begin{array}{c}]0,\frac{\pi}{\sqrt{C}}[\\ \mathbb{R}_+ \end{array}\right\}$ und $v \in T_qM$ mit $\|v\| < \varepsilon$ derart, daß $\exp_q$ in v nicht maximalen Rang hätte, also nach [7, 9.4(iv)] $v \neq 0_q$. Dann wäre

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [0,\varepsilon] & \longrightarrow & M \\ & t & \longmapsto & \exp_q(t\dfrac{v}{\|v\|}) \end{array}$$

eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Länge ε, die nach [7, 10.3(ii)] $\|v\| \in]0,\varepsilon[$ als konjugierten Punkt besäße, im Widerspruch zu Satz 3.1. □

Definition 3.3. Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle $q \in M$ heißt

$$r_q \;:=\; \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ | \exp_q|_{U_\varepsilon(0_q)} \text{ Diffeomorphismus }\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

der *Injektivitätsradius von q in M.*

Offenbar gilt stets $r_q \leq i_q$.

Satz 3.4. *Sei M eine zusammenhängende vollständige m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Dann sind für alle $q_0 \in M$ die Funktionen $\delta_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}(q_0)\setminus\{q_0\}}: U_{r_{q_0}}(q_0)\setminus\{q_0\} \to \mathbb{R}$ und $\delta^2_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}}: U_{r_{q_0}}(q_0) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Beweis: Sei $U := U_{r_{q_0}}(0_{q_0})$. Dann ist $\exp_{q_0}|_U$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\delta_{q_0}|_U \overset{[7,\text{Ü}117\text{a})]}{=} \|(\exp_{q_0}|_U)^{-1}\|.$$

Hieraus folgt offenbar die Behauptung. □

Der letzte Satz rechtfertigt, auf gewissen Umgebungen den Gradienten und die Hesseform des Quadrates der Abstandfunktion zu betrachten. Ersterer ermöglicht es nachzuweisen, daß in einer vollständigen und zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit der Rand eines abgeschlossenen Balles vom Radius $r \leq q_0$ um einen Punkt q_0 gleich der r-Sphäre um diesen Punkt und kompakt ist.

Satz 3.5. *Seien M eine zusammenhängende vollständige m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $q_0 \in M$ und $r < r_{q_0}$. Dann gilt:*

(i) *$S_r(q_0)$ ist eine $(m-1)$-dimensionale zusammenhängende kompakte reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von M mit $\partial B_r(q_0) = S_r(q_0)$. Ist $m \geq 3$, so ist $S_r(q_0)$ sogar einfach-zusammenhängend.*

(ii) *Ist $\psi := \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2$, $q \in S_r(q_0)$ und $\gamma\colon [0,r] \to M$ die nach [7, 10.24(i) und 10.14(ii)] eindeutig bestimmte nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\gamma(0) = q_0$ und $\gamma(r) = q$, so ist ψ nach Satz 3.4 in q differenzierbar und es gilt*

$$\operatorname{grad}_q \psi = r\,\dot\gamma(r) \neq 0 \tag{3.3}$$

$$\operatorname{grad}_q \psi \;\perp\; i_* T_q S_r(q_0)\,, \tag{3.4}$$

wobei $i : S_r(q_0) \hookrightarrow M$ die isometrische Einbettung bezeichne.

Bemerkung. Bemerkung 1.) zu 1.2.3 zeigt, daß $S_r(q_0)$ in einer nicht vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit nicht kompakt sein muß. Bemerkung 2.) zu 1.2.3 zeigt, daß es vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeiten mit durch $C > 0$ nach oben beschränkter Krümmung gibt, in denen der Rand eines $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$-Balles nicht die $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$-Sphäre ist.

Beweis: Seien ψ, q, γ wie in (ii). Bekanntlich gilt $\forall_{t\in[0,r]}\, \gamma(t) = \exp_{q_0}\big(t\dot\gamma(0)\big)$. ψ ist nach Satz 3.4 in $\gamma(r)$ differenzierbar, also folgt aus $\|\dot\gamma\| = 1$

$$\langle \operatorname{grad}_q \psi, \dot\gamma(r)\rangle = \tfrac{1}{2}\,(\delta_{q_0}^2 \circ \gamma)'(r) \overset{3.2,[7,\text{Ü}117\text{a})]}{=} \tfrac{1}{2}\,(t \mapsto t^2)'(r) = r\,. \tag{3.5}$$

Daher ist $2\psi_{*q} = (\delta_{q_0}^2)_{*q} : T_qM \to T_{r^2}\mathbb{R}$ eine surjektive lineare Abbildung und aus der Beliebigkeit von $q \in S_r(q_0)$ ergibt sich, daß

$$S_r(q_0) = \{q \in M | \delta_{q_0}^2(q) = r^2\} \xhookrightarrow{i} M$$

eine $(m-1)$-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von M ist.

Sei $U := U_{r_{q_0}}(0_{q_0})$, d.h. insbesondere

$$\exp_{q_0}|_U : U \longrightarrow \exp_{q_0}(U) \text{ Homöomorphismus.} \tag{3.6}$$

Wegen $\partial B_r(0_{q_0}) = \partial\{v \in T_{q_0}M|\, \|v\| \leq r\} = S_r(0_{q_0})$ folgt hieraus

$$\partial B_r(q_0) \;=\; \partial \exp|_U(B_r(0_{q_0})) = \exp|_U(\partial B_r(0_{q_0})) = S_r(q_0).$$

Außerdem ist $S_r(q_0) = \{v \in T_{q_0}M|\, \|v\| = r\}$ als Sphäre des m-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $T_{q_0}M$ kompakt, zusammenhängend und – falls $m \geq 3$ – sogar einfach-zusammenhängend. Da nach (3.6) auch $\exp_{q_0}|_{S_r(0_{q_0})} : S_r(0_{q_0}) \to \exp_{q_0}\big(S_r(0_{q_0})\big) = S_r(q_0)$ ein Homöomorphismus ist, folgt somit auch daß $S_r(q_0)$ kompakt, zusammenhängend und – falls $m \geq 3$ – sogar einfach-zusammenhängend ist. Damit ist (i) gezeigt.

Zu (3.4):
Sei $\mu\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to S_r(q_0)$ ein differenzierbarer Weg. Dann gilt (3.4) wegen

$$\begin{aligned} & \psi\circ i\circ\mu = \frac{1}{2}\,\delta_{q_0}^2\circ i\circ\mu = \frac{1}{2}\,r^2 \\ \Longrightarrow\quad & (\psi\circ i\circ\mu)' = \langle(\operatorname{grad}\psi)\circ i\circ\mu, i_*\dot\mu\rangle = 0 \\ \Longrightarrow\quad & (\operatorname{grad}\psi)\circ i\circ\mu\ \perp\ i_*\dot\mu \end{aligned}$$

und der Beliebigkeit von μ.
Zu (3.3):
Wegen der Voraussetzung an r und Satz 3.2 folgt aus [7, 10.14(i)], daß $\gamma\colon [0,r]\to M$ Kürzeste von q_0 nach $S_r(q_0)$ ist. Daher gilt wegen [7, Ü 130] $i_*T_qS_r(q_0)\ \perp\ \dot\gamma(r)$. Aus $\dim\perp_q(i)=1$, $\|\dot\gamma(r)\|=1$ und (3.4) ergibt sich folglich

$$\operatorname{grad}_q\psi \;=\; \langle\operatorname{grad}_q\psi,\dot\gamma(r)\rangle\dot\gamma(r) \overset{(3.5)}{=} r\dot\gamma(r)\neq 0.$$

□

Zum Abschluß dieses Kapitels leiten wir eine Abschätzung für die Hesseform des Quadrates der Abstandsfunktion her, benötigen jedoch die folgenden Vorbereitungen.

Definition 3.6. Seien $C\in\mathbb{R}$ und $J := \left\{\begin{array}{ccc}]0,\frac{\pi}{\sqrt{C}}[& : & C>0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C\le 0\end{array}\right\}$. Wir definieren die differenzierbare Funktion $\mathrm{k}_C : J\to\mathbb{R}$ durch

$$\forall_{t\in J}\,\mathrm{k}_C(t) := \frac{\mathrm{s}_C'(t)}{\mathrm{s}_C(t)} \overset{1.3.1}{=} \left\{\begin{array}{ccc} \sqrt{C}\,\cot(t\sqrt{C}) & : & C>0 \\ \frac{1}{t} & : & C=0 \\ \sqrt{|C|}\,\coth(t\sqrt{|C|}) & : & C<0 \end{array}\right\}.$$

Lemma 3.7.

(i) $\mathrm{k}_C^2 + C = \frac{1}{\mathrm{s}_C^2}|_J$

(ii) k_C *ist streng monoton fallend*

(iii) $C>0 \quad\Longrightarrow\quad \forall_{t\in]0,\frac{\pi}{2\sqrt{C}}[}\, t\,\mathrm{k}_C(t)\le 1\,\wedge\,\mathrm{k}_C(t)>0$

(iv) $\forall_{t\in\mathbb{R}_+}\, t\,k_0(t)=1$

(v) $C<0 \quad\Longrightarrow\quad \forall_{t\in\mathbb{R}_+}\, t\,\mathrm{k}_C(t)\ge 1\,\wedge\,\mathrm{k}_C(t)>\sqrt{|C|}$

Beweis: (i) im Falle $C=0$, (ii) und (iv) sind klar.
Zu (i) im Falle $C\neq 0$:
Ist $C>0$, so gilt

$$\mathrm{k}_C(r)^2 + C \;=\; C\frac{\cos(r\sqrt{C})^2}{\sin(r\sqrt{C})^2} + C = \frac{C}{\sin(r\sqrt{C})^2} = \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2},$$

und ist $C < 0$, so gilt

$$\mathrm{k}_C(r)^2 + C \;=\; |C|\frac{\cosh(r\sqrt{|C|})^2}{\sinh(r\sqrt{|C|})^2} - |C| = \frac{|C|}{\sinh(r\sqrt{|C|})^2} = \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}.$$

Zu (iii):
Sei $C > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \tan(0) = 0 = \mathrm{id}(0),\ \forall_{x\in[0,\frac{\pi}{2}[}\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1 = \mathrm{id}'(x)\\
\Longrightarrow\ & \forall_{x\in[0,\frac{\pi}{2}[}\ \tan(x) \geq \mathrm{id}(x) = x\\
\Longrightarrow\ & \forall_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[}\ x\ \cot(x) \leq 1\\
\Longrightarrow\ & \forall_{t\in[0,\frac{\pi}{2\sqrt{C}}[}\ t\,\mathrm{k}_C(t) \leq 1
\end{aligned}$$

$\forall_{t\in]0,\frac{\pi}{2\sqrt{C}}[}\ \mathrm{k}_C(t) > 0$ ist klar.
Zu (v):
Sei $C < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \tanh(0) = 0 = \mathrm{id}(0),\ \forall_{x\in[0,\infty[}\ \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) \leq 1 = \mathrm{id}'(x)\\
\Longrightarrow\ & \forall_{x\in[0,\infty[}\ \tanh(x) \leq \mathrm{id}(x) = x\\
\Longrightarrow\ & \forall_{x\in\mathbb{R}_+}\ x\ \coth(x) \geq 1\\
\Longrightarrow\ & \forall_{t\in\mathbb{R}_+}\ t\,\mathrm{k}_C(t) \geq 1,
\end{aligned}$$

und man hat für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathrm{k}_C(t)^2 \;=\; |C|\frac{\cosh^2(t\sqrt{|C|})}{\sinh^2(t\sqrt{|C|})} = |C|\frac{1+\sinh^2(t\sqrt{|C|})}{\sinh^2(t\sqrt{|C|})} > |C|\,,$$

also ist auch (v) gezeigt. □

Lemma 3.8. *Es seien M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ eine Geodätische mit $\gamma(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset U$.*
Dann gilt: $\quad \mathrm{hess}\,\phi(\dot\gamma,\dot\gamma) \;=\; (\phi\circ\gamma)''$.

Beweis: Man rechnet nach, daß gilt:

$$\begin{aligned}
(\phi\circ\gamma)'' &= D\cdot\langle(\mathrm{grad}\,\phi)\circ\gamma,\dot\gamma\rangle\\
&= \langle\nabla_D\big((\mathrm{grad}\,\phi)\circ\gamma\big)\,,\,\dot\gamma\rangle + \langle(\mathrm{grad}\,\phi)\circ\gamma\,,\,\underbrace{\nabla_D\dot\gamma}_{=0}\rangle\\
&= \langle\nabla_{\dot\gamma}\mathrm{grad}\,\phi\,,\,\dot\gamma\rangle = \mathrm{hess}\,\phi(\dot\gamma,\dot\gamma).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.9. ***Vor.:*** *Seien M eine zusammenhängende vollständige m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit derart, daß für ihre Schnittkrümmung* $\mathrm{K} \leq C \in \mathbb{R}$ *gelte, $q_0 \in M$, $\psi := \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2$ und $l \in]0, r_{q_0}]$. Im Falle $C > 0$ gelte ferner $l < \frac{\pi}{\sqrt{C}}$.*
Beh.: *Ist $q \in M$ mit $\delta_{q_0}(q) = l$, $\gamma\colon [0,l] \to M$ die nach [7, 10.24(i), 10.14(ii)] eindeutig bestimmte nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische für die gilt $\gamma(0) = q_0$ und $\gamma(l) = q$ sowie $v \in T_qM$ und $Y \in J_\gamma$ das nach 3.1 und [7, 10.2] eindeutig bestimmte Jacobifeld längs γ mit $Y_0 = 0$ und $Y_l = v$, so gilt*

$$\operatorname{hess}\psi(v,v) = l\, I(Y,Y) \tag{3.7}$$

und

$$\begin{gathered} I(Y,Y) \geq \left(\tfrac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l)\right)\langle v, \overbrace{\dot\gamma(l)}^{\overset{(3.3)}{=}\frac{1}{l}\operatorname{grad}_q\psi}\rangle^2 + \mathrm{k}_C(l)\|v\|^2 \\ \textit{und Gleichheit impliziert} \\ \forall_{t\in[0,l]}\, \|Y_t^\perp\|^2 \mathrm{K}(\sigma_t) = \|Y_t^\perp\|^2 C\,, \end{gathered} \tag{3.8}$$

wobei σ_t ein zweidimensionaler Untervektorraum von $T_{\gamma(t)}M$ mit $Y_t, \dot\gamma(t) \in \sigma_t$ und $Y^\perp$ die zu $\dot\gamma$ normale Komponente von Y sei.

Umgekehrt folgt aus $\forall_{t\in[0,l]}\, \mathrm{R}(Y_t, \dot\gamma(t))\dot\gamma(t) = C\, Y_t^\perp$, daß in der Ungleichung in (3.8) Gleichheit gilt.

Beweis: Bezeichne Y^T die zu $\dot\gamma$ tangentiale Komponente von Y.
Zum Nachweis von (3.7) genügt es wegen $v = Y_l$ und der Bilinearität der Hesse- und der Indexform offenbar zu zeigen:

$$\begin{aligned} \operatorname{hess}\psi(Y_l^T, Y_l^T) &= l\, I(Y^T, Y^T) && (3.9)\\ \operatorname{hess}\psi(Y_l^\perp, Y_l^\perp) &= l\, I(Y^\perp, Y^\perp) && (3.10)\\ \operatorname{hess}\psi(Y_l^T, Y_l^\perp) &= l\, I(Y^T, Y^\perp) && (3.11) \end{aligned}$$

Zu (3.9):
Zunächst gilt:

$$\forall_{t\in[0,l]}\, Y_t^T = \pm\frac{t}{l}\|Y_l^T\|\dot\gamma(t) \tag{3.12}$$

[Denn für $X \in \mathfrak{V}_\gamma$ definiert durch $\forall_{t\in[0,l]}\, X_t = \frac{t}{l}\|Y_l^T\|\dot\gamma(t)$ gilt (da γ Geodätische)

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{l}\|Y_l^T\|\left(x\, \nabla_D\dot\gamma + \dot\gamma\right) = \frac{1}{l}\|Y_l^T\|\dot\gamma \\ X'' &= \frac{1}{l}\|Y_l^T\|\nabla_D\dot\gamma = 0 \end{aligned}$$

und somit $\forall_{t\in[0,l]}\, X_t'' + \mathrm{R}\big(X_t, \dot\gamma(t)\big)\dot\gamma(t) = \frac{t}{l}\|Y_l^T\|\mathrm{R}\big(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\dot\gamma(t) = 0$, d.h $X \in J_\gamma$ mit $X_0 = 0 = Y_0^T$ und $X_l = \|Y_l^T\|\dot\gamma(l) = \pm Y_l^T$. Nach [7, Ü 92f)] gilt auch $Y^T \in J_\gamma$,

und es folgt $\pm Y^T = X$ aus [7, 10.2], da γ nach Satz 3.1 keinen konjugierten Punkt besitzt.]
Da Y^T ein Jacobifeld ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{hess}\psi(Y_l^T, Y_l^T) &= \|Y_l^T\|^2 \operatorname{hess}\psi(\dot\gamma(l), \dot\gamma(l)) \\
&\overset{3.8}{=} \|Y_l^T\|^2 (\underbrace{\psi\circ\gamma}_{t\mapsto\frac{1}{2}\delta_{q_0}^2\left(\exp_{q_0}(t\dot\gamma(0))\right)})''(l) \\
&\overset{3.2,[7,\text{Ü}117\text{a})]}{=} \|Y_l^T\|^2 (t\mapsto \frac{1}{2}t^2)''(l) = \|Y_l^T\|^2 \\
&= l\,\langle \|Y_l^T\|\dot\gamma(l), \frac{1}{l}\|Y_l^T\|\dot\gamma(l)\rangle \overset{(3.12)}{=} l\,\langle Y^T, (Y^T)'\rangle|_0^l \\
&\overset{2.5.3}{=} l\, I(Y^T, Y^T)
\end{aligned}$$

Zu (3.10):
Die Beweisidee stammt aus [9, Lemma 2.5].
Sei $\mu\colon \mathbb{R}\to M$ die Geodätische mit $\mu(0) = q$ und $\dot\mu(0) = Y_l^\perp$. Bezeichne r_{q_0} den Injektivitätsradius von M in q_0, welcher wegen der Voraussetzung an l größer als $l = \delta_{q_0}(q)$ ist. Aus Stetigkeitsgründen gilt für hinreichend kleines $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$

$$\delta_{q_0}\circ\mu|_{]-\varepsilon,\varepsilon[} < r_{q_0}, \tag{3.13}$$

und $\widehat{\exp_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}(0_{q_0})}}^{-1}\circ\mu\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to T_{q_0}M$ ist wohldefiniert und differenzierbar. Dann ist auch

$$\begin{aligned}
\nu\colon\quad]-\varepsilon,\varepsilon[&\longrightarrow T_{q_0}M \\
s &\longmapsto \frac{1}{l}\widehat{\exp_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}(0_{q_0})}}^{-1}\circ\mu(s)
\end{aligned}$$

differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}\ \exp_{q_0}\left(l\,\nu(s)\right) = \mu(s)\,. \tag{3.14}$$

Somit hat man eine differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned}
V\colon\quad [0,l]\times]-\varepsilon,\varepsilon[&\longrightarrow M \\
(t,s) &\longmapsto V_s(t) := \exp_{q_0}\left(t\,\nu(s)\right)
\end{aligned}$$

mit $\forall_{t\in[0,l]}\, V_0(t) = \exp_{q_0}\left(\frac{t}{l}\widehat{\exp_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}(0_{q_0})}}^{-1}\circ\mu(0)\right) = \exp_{q_0}\left(\frac{t}{l}\widehat{\exp_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\right)$.
Nach [7, Ü 117a)] gilt $\|\widehat{\exp_{q_0}|_{U_{r_{q_0}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\| = \delta_{q_0}(q) = l$, also ist V_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $V_0(0) = q_0$ und $V_0(l) = q$, also folgt aus der Eindeutigkeit von γ mit diesen Eigenschaften: $V_0 = \gamma$. Daher gilt

$$\begin{array}{c} V \text{ ist eine Variation von } \gamma \text{ mit} \\ \forall_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}\, V_s = \exp_{q_0}\big(\ldots\nu(s)\big) \text{ Geodätische von } V_s(0)=q_0 \\ \text{nach } V_s(l) = \exp_{q_0}\big(l\,\nu(s)\big) \overset{(3.14)}{=} \mu(s). \end{array} \tag{3.15}$$

Wir zeigen als nächstes:

$$Y^{\perp} \text{ ist das Variationsvektorfeld von } V \tag{3.16}$$

[Sei X das Variationsvektorfeld von V. Dann gilt $\forall_{t\in[0,l]}\, X_t = \dot{\widehat{V(t,\ldots)}}(0)$. Wegen (3.15) und Satz 2.5.1(i) gilt $X \in J_\gamma$ und (wiederum wegen (3.15))

$$X_0 = \dot{\widehat{V(0,\ldots)}}(0) = 0, \qquad X_l = \dot{\widehat{V(l,\ldots)}}(0) = \dot\mu(0) \overset{\mathrm{Def}\mu}{=} Y_l^{\perp}.$$

Nach [7, Ü 92f)] ist auch $Y^\perp$ ein Jacobifeld längs γ. Da γ wegen der Voraussetzung an l und Satz 3.1 keinen konjugierten Punkt besitzt, folgt aus [7, 10.2]: $Y^\perp = X$.]
Wir berechnen nun $I(Y^\perp, Y^\perp)$:
Bezeichne L die Längenfunktion der Variation V. Für jedes $s \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ gilt nach (3.15) und (3.13) $\delta_{V_s(0)}(V_s(l)) = \delta_{q_0}(\mu(s)) < r_{q_0}$, also ist die Geodätische V_s nach [7, 10.14(i)] Kürzeste von q_0 nach $\mu(s)$, und es gilt

$$\tfrac{1}{2}\,L^2(s) = \tfrac{1}{2}\,\delta_{q_0}^2(\mu(s)) = (\psi\circ\mu)(s)\,.$$

Hieraus folgt zunächst wegen (3.3) in Satz 3.5 (dort $r = l$) und $\dot\mu(0) = Y_l^\perp$

$$0 \;=\; \langle Y_l^\perp, \dot\gamma(l)\rangle = \frac{1}{l}\,\langle\dot\mu(0), \mathrm{grad}_q\psi\rangle = \frac{1}{l}\,(\psi\circ\mu)'(0) = \frac{1}{l}\,L(0)L'(0) \overset{V_0=\gamma}{=} L'(0)$$

und sodann, da μ Geodätische ist und wegen Lemma 3.8

$$\begin{aligned} \mathrm{hess}\,\psi(Y_l^\perp, Y_l^\perp) \;&=\; (\psi\circ\mu)''(0) = (L'(0))^2 + L(0)L''(0) = l\,L''(0) \\ &\overset{2.5.2,(3.16)}{=}\; l\Big(\int_0^l \big(\|\nabla_D(Y^\perp)\|^2 - \langle \mathrm{R}\big(Y^\perp,\dot\gamma\big)\dot\gamma, Y^\perp\rangle\big)(t)\,dt \\ &\qquad \underbrace{+\langle\nabla_{D_0}\underbrace{\dot{\widehat{V(l,\ldots)}}}_{\overset{(3.15)}{=}\dot\mu}, \dot\gamma(l)\rangle}_{=0} - \langle\nabla_{D_0}\underbrace{\dot{\widehat{V(0,\ldots)}}}_{\overset{(3.15)}{=}0}, \dot\gamma(0)\rangle\Big) \\ &\overset{2.5.3}{=}\; l\,I(Y^\perp, Y^\perp)\,. \end{aligned}$$

Damit ist (3.10) gezeigt.
Zu (3.11):
Wir zeigen, daß beide Seiten von (3.11) Null sind.
Aus (3.3) in Satz 3.5 und der Voraussetzung an l folgt, daß in einer Umgebung

von l $\operatorname{grad}_{\gamma(t)}\psi = t\dot\gamma(t)$ gilt. Weil γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned}\operatorname{hess}\psi(Y_l^T, Y_l^\perp) &= \pm\|Y_l^T\|\langle\nabla_{\dot\gamma(l)}\operatorname{grad}\psi, Y_l^\perp\rangle = \pm\|Y_l^T\|\langle\nabla_{D_l}((\operatorname{grad}\psi)\circ\gamma), Y_l^\perp\rangle \\ &= \pm\|Y_l^T\|\langle l\,\nabla_{D_l}\dot\gamma + \dot\gamma(l), Y_l^\perp\rangle = 0\,.\end{aligned}$$

Andererseits sieht man, indem man Y nach einem orthonormalen parallelen Basisfeld $E_1,\ldots,E_m$ längs γ mit $E_1 = \dot\gamma$ entwickelt, daß $(Y^\perp)' = (Y')^\perp$ gilt, also folgt (weil $Y^\perp$ mit Y ein Jacobifeld ist)

$$I(Y^T, Y^\perp) \overset{2.5.3}{=} \langle Y^T, (Y^\perp)'\rangle|_0^l = \langle Y^T, (Y')^\perp\rangle|_0^l = 0\,,$$

und wir haben auch (3.11) und damit (3.7) gezeigt.
Zu (3.8):
Wir führen den Beweis wie in [11, Lemma 2.1] und gehen ähnlich zu dem des Vergleichssatzes von Rauch vor, indem wir die Indexform in M gegen die des Standard-Raumes konstanter Krümmung C abschätzen, die wir besser beherrschen.
Sei $\widetilde\gamma\colon [0,l]\to M_C^m$ eine von $\widetilde q_0 \in M_C^m$ ausgehende nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Aus der Voraussetzung an l folgt:

$$\widetilde\gamma \text{ besitzt keinen konjugierten Punkt.} \tag{3.17}$$

Seien $E_1,\ldots,E_m$ bzw. $\widetilde E_1,\ldots,\widetilde E_m$ orthonormale parallele Basisfelder längs γ bzw. $\widetilde\gamma$ mit $E_1 = \dot\gamma$ und $\widetilde E_1 = \dot{\widetilde\gamma}$. Wir setzen $\widetilde Y := \sum_{i=1}^m \langle Y, E_i\rangle \widetilde E_i$, also gilt mit $Y_0 = 0$ auch $\widetilde Y_0 = 0$. Ferner sei $\widetilde Z \in J_{\widetilde\gamma}$ das nach (3.17) und [7, 10.2] eindeutig bestimmte Jacobifeld längs $\widetilde\gamma$ mit $\widetilde Z_0 = \widetilde Y_0 = 0$ und $\widetilde Z_l = \widetilde Y_l$. Aus (3.17) und dem Index-Lemma 2.5.4 folgt dann

$$\widetilde I(\widetilde Y, \widetilde Y) \geq \widetilde I(\widetilde Z, \widetilde Z) \quad \text{mit Gleichheit genau dann, wenn} \quad \widetilde Y = \widetilde Z. \tag{3.18}$$

Wir zeigen als nächstes

$$\begin{gathered} I(Y,Y) \geq \widetilde I(\widetilde Y, \widetilde Y) \\ \text{mit Gleichheit genau dann, wenn} \\ \forall_{t\in[0,l]}\ \|Y_t^\perp\|^2 \mathrm{K}(\sigma_t) = \|\widetilde Y_t^\perp\|^2 C\,, \end{gathered} \tag{3.19}$$

wobei σ_t ein zweidimensionaler Untervektorraum von $T_{\gamma(t)}M$ mit $Y_t, \dot\gamma(t) \in \sigma_t$ sei.
[Hierzu:
Nach Definition von $\widetilde Y$ und wegen $E_1 = \dot\gamma, \widetilde E_1 = \dot{\widetilde\gamma}$ gilt

$$\begin{aligned}\forall_{t\in[0,l]}\quad Y_t, \dot\gamma(t) \text{ linear abhängig} \quad &\iff \forall_{i\in\{2,\ldots,m\}}\ \langle Y_t, E_i|_t\rangle = 0 \\ &\iff \widetilde Y_t, \dot{\widetilde\gamma}(t) \text{ linear abhängig}\end{aligned}$$

sowie

$$\langle Y,Y\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^m \langle Y,E_i\rangle^2 = \langle \widetilde{Y},\widetilde{Y}\rangle \tag{3.20}$$

$$\langle Y,\dot\gamma\rangle = \langle \widetilde{Y},\dot{\widetilde{\gamma}}\rangle\,. \tag{3.21}$$

Daher folgt aus $\mathrm{K} \le C = \widetilde{\mathrm{K}}$

$$\begin{aligned}\forall_{t\in[0,l]}\quad \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle(t) \;&= \big(\overbrace{\|\mathrm{Y}_t\|^2 - \langle \mathrm{Y}_t,\dot\gamma(t)\rangle^2}^{=0,\,\text{falls }\mathrm{Y}_t,\dot\gamma(\mathrm{t})\text{ l.a.}}\big)\mathrm{K}(\sigma_t)\\ &\le \big(\overbrace{\|\widetilde{\mathrm{Y}}_t\|^2 - \langle \widetilde{\mathrm{Y}}_t,\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\rangle^2}^{=0,\,\text{falls }\widetilde{\mathrm{Y}}_t,\dot{\widetilde{\gamma}}(\mathrm{t})\text{ l.a.}}\big)\widetilde{\mathrm{K}}(\widetilde{\sigma}_t)\\ &= \langle \widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y},\dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{Y}\rangle(t)\,,\end{aligned}$$

wobei σ_t bzw. $\widetilde{\sigma}_t$ zweidimensionale Untervektorräume von $T_{\gamma(t)}M$ bzw. $T_{\widetilde{\gamma}(t)}M_C^m$ mit $Y_t,\dot\gamma(t)\in\sigma_t$ bzw. $\widetilde{Y}_t,\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\in\widetilde{\sigma}_t$ seien.
Aus der Parallelität der E_i bzw. $\widetilde{E}_i$ längs γ bzw. $\widetilde{\gamma}$ und der Definition von $\widetilde{Y}$ folgt außerdem $\langle Y',Y'\rangle = \sum_{i=1}^m\langle Y',E_i\rangle^2 = \langle \widetilde{Y}',\widetilde{Y}'\rangle$, also ergibt sich

$$\begin{aligned} I(Y,Y) \;&=\; \int_0^l \big(\langle Y',Y'\rangle - \langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle\big)(t)\,dt\\ &\ge\; \int_0^l \big(\langle \widetilde{Y}',\widetilde{Y}'\rangle - \langle \widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y},\dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{Y}\rangle\big)(t)\,dt\\ &=\; \widetilde{I}(\widetilde{Y},\widetilde{Y})\end{aligned}$$

und aus Stetigkeitsgründen gilt hier genau dann Gleichheit, wenn

$$\langle \mathrm{R}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle = \langle \widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y},\dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{Y}\rangle,$$

d.h. (da nach (3.20),(3.21) $\|Y^\perp\|^2 = \|Y\|^2 - \langle Y,\dot\gamma\rangle^2 = \|\widetilde{Y}^\perp\|$ gilt):

$$\forall_{t\in[0,l]}\,\|Y_t^\perp\|^2\mathrm{K}(\sigma_t) = \|\widetilde{Y}_t^\perp\|^2 C.$$

Damit ist (3.19) gezeigt.]
Zum Nachweis der Ungleichung in (3.8) genügt es nun wegen (3.18) und (3.19) zu zeigen, daß gilt:

$$\widetilde{I}(\widetilde{Z},\widetilde{Z}) = \big(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l)\big)\langle v,\dot\gamma(l)\rangle^2 + \mathrm{k}_C(l)\|v\|^2 \tag{3.22}$$

[Hierzu:
Sei $\widetilde{U}\in\mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}}$ parallel mit

$$\widetilde{U}_l = \widetilde{Z}_l - \langle \widetilde{Z}_l,\dot{\widetilde{\gamma}}(l)\rangle\dot{\widetilde{\gamma}}(l). \tag{3.23}$$

Dann folgt aus $D \cdot \langle \widetilde{U}, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle = 0$ (da $\widetilde{\gamma}$ eine Geodätische ist) und $\langle \widetilde{U}_l, \dot{\widetilde{\gamma}}(l) \rangle = 0$

$$\langle \widetilde{U}, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle = 0\,. \tag{3.24}$$

Wir definieren eine differenzierbare Funktion $S\colon\ [0,l] \to \mathbb{R}$ durch

$$S(t) := \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{C})}{\sin(l\sqrt{C})} & : \quad C > 0 \\ \frac{t}{l} & : \quad C = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{|C|})}{\sinh(l\sqrt{|C|})} & : \quad C < 0 \end{cases}$$

(beachte, daß der Nenner wegen der Voraussetzung an l nicht Null ist). Offenbar gilt:

$$S(0) = 0, \quad S(l) = 1, \quad S'(l) = \mathrm{k}_C(l), \quad S'' = -C\,S. \tag{3.25}$$

Wir zeigen als nächstes:

$$\forall_{t\in[0,l]}\, \widetilde{Z}_t = \underbrace{\frac{1}{l} \langle \widetilde{Z}_l, \dot{\widetilde{\gamma}}(l) \rangle}_{:=\lambda}\, t\dot{\widetilde{\gamma}}(t) + S(t)\widetilde{U}_t \tag{3.26}$$

(Da $\widetilde{Z}$ ein Jacobifeld längs $\widetilde{\gamma}$ mit $\widetilde{Z}_0 = 0$ ist, genügt es wegen (3.17) und [7, 10.2] zum Nachweis hiervon zu zeigen, daß $\widetilde{\widetilde{Z}} \in \mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}}$, definiert durch

$$\widetilde{\widetilde{Z}}_t := \underbrace{\frac{1}{l} \langle \widetilde{Z}_l, \dot{\widetilde{\gamma}}(l) \rangle}_{=\lambda}\, t\dot{\widetilde{\gamma}}(t) + S(t)\widetilde{U}_t$$

ein Jacobifeld mit $\widetilde{\widetilde{Z}}_0 = 0$ und $\widetilde{\widetilde{Z}}_l = \widetilde{Z}_l$ ist. Daß $\widetilde{\widetilde{Z}}$ und $\widetilde{Z}$ in 0 und l gleich sind, gilt wegen (3.25) und (3.23). Aus der Parallelität von $\widetilde{U}$ und $\dot{\widetilde{\gamma}}$ längs $\widetilde{\gamma}$ folgt:

$$\forall_{t\in[0,l]}\, \widetilde{\widetilde{Z}}'_t = \lambda\big(t\widetilde{\nabla}_{D_t}\dot{\widetilde{\gamma}} + \dot{\widetilde{\gamma}}(t)\big) + \widetilde{\nabla}_{D_t}(S\widetilde{U}) = \lambda\dot{\widetilde{\gamma}}(t) + S'(t)\widetilde{U}_t$$
$$\widetilde{\widetilde{Z}}'' = \lambda\widetilde{\nabla}_D\dot{\widetilde{\gamma}} + S''\widetilde{U} = S''\widetilde{U}$$

Wegen $\forall_{t\in[0,l]}\widetilde{\mathrm{R}}\big(\lambda t\dot{\gamma}(t) + S(t)\widetilde{U}_t, \dot{\gamma}(t)\big)\dot{\gamma}(t) = \widetilde{\mathrm{R}}\big(S(t)\widetilde{U}_t, \dot{\gamma}(t)\big)\dot{\gamma}(t)$ ergibt sich hieraus

$$\widetilde{\widetilde{Z}}'' + \widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{\widetilde{Z}}, \dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}} = S''\widetilde{U} + \widetilde{\mathrm{R}}(S\widetilde{U}, \dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}} \overset{[7,7.31],\widetilde{\mathrm{K}}=\mathrm{C},(3.24)}{=} S''\widetilde{U} + CS\widetilde{U} \overset{(3.25)}{=} 0,$$

d.h. $\widetilde{\widetilde{Z}}$ ist Jacobifeld.)

Schließlich gilt nach Satz 2.5.3 (da $\widetilde{Z}$ Jacobifeld mit $\widetilde{Z}_0 = 0$)

$$\widetilde{I}(\widetilde{Z}, \widetilde{Z}) \quad = \quad \langle \widetilde{Z}_l, \widetilde{Z}'_l \rangle \overset{(3.26)}{=} \langle \lambda l\dot{\widetilde{\gamma}}(l) + S(l)\widetilde{U}_l, \lambda\dot{\widetilde{\gamma}}(l) + S'(l)\widetilde{U}_l \rangle$$

$$\overset{\text{Def.}\,\lambda,(3.24),(3.25)}{=} \quad \frac{1}{l}\langle \widetilde{Z}_l, \dot{\widetilde{\gamma}}(l)\rangle^2 + \mathrm{k}_C(l)\langle \widetilde{U}_l, \widetilde{U}_l\rangle$$

$$\overset{(3.23)}{=} \quad \frac{1}{l}\langle \widetilde{Z}_l, \dot{\widetilde{\gamma}}(l)\rangle^2 + \mathrm{k}_C(l)\big(\langle \widetilde{Z}_l, \widetilde{Z}_l\rangle - \langle \widetilde{Z}_l, \dot{\widetilde{\gamma}}(l)\rangle^2\big)$$

$$\overset{\widetilde{Z}_l=\widetilde{Y}_l,(3.20),(3.21)}{=} \quad \big(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l)\big)\langle Y_l, \dot{\gamma}(l)\rangle^2 + \mathrm{k}_C(l)\|Y_l\|^2.$$

Wegen $Y_l = v$ ist damit (3.22) gezeigt.]
Zu zeigen bleiben die Gleichheitsaussagen in (3.8):
Gilt in (3.8) Gleichheit, so folgt aus (3.19),(3.18) und (3.22), daß auch in (3.19) Gleichheit gelten muß, also $\forall_{t\in[0,l]}\ \|Y_t^\perp\|^2\mathrm{K}(\sigma_t) = \|\widetilde{Y}_t^\perp\|^2 C = \|Y_t^\perp\|^2 C$.
Gelte nun

$$\forall_{t\in[0,l]}\ \mathrm{R}(Y_t, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = C\,Y_t^\perp, \tag{3.27}$$

also auch $\forall_{t\in[0,l]}\ \underbrace{\|Y_t^\perp\|^2\mathrm{K}(\sigma_t) = \|\widetilde{Y}_t^\perp\|^2 C}_{\text{d.h. } \langle \mathrm{R}(Y,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y\rangle(t) = \|\widetilde{Y}_t^\perp\|^2 C}$. Dann folgt aus (3.19) $I(Y,Y) = \widetilde{I}(\widetilde{Y},\widetilde{Y})$.
Um nachzuweisen, daß in (3.8) Gleichheit gilt, müssen wir wegen (3.22) zeigen, daß gilt $\widetilde{I}(\widetilde{Y},\widetilde{Y}) = \widetilde{I}(\widetilde{Z},\widetilde{Z})$, also nach (3.18) $\widetilde{Y} = \widetilde{Z}$. Da $\widetilde{Z}$ das nach (3.17) und [7, 10.2] eindeutig bestimmte Jacobifeld längs $\widetilde{\gamma}$ mit $\widetilde{Z}_0 = \widetilde{Y}_0 = 0$ und $\widetilde{Z}_l = \widetilde{Y}_l$ ist, genügt es zum Nachweis hiervon zu zeigen, daß $\widetilde{Y}$ ein Jacobifeld ist. Beweis hiervon:
Aus der Definition von $\widetilde{Y}$, der Parallelität der $E_i, \widetilde{E}_i$ und $E_1 = \dot{\gamma}, \widetilde{E}_1 = \dot{\widetilde{\gamma}}$ folgt

$$\widetilde{Y}'' = \textstyle\sum_{i=1}^m \langle Y'', E_i\rangle \widetilde{E}_i$$
$$\widetilde{Y}^\perp = \textstyle\sum_{i=2}^m \langle Y, E_i\rangle \widetilde{E}_i = \sum_{i=1}^m \langle Y^\perp, E_i\rangle \widetilde{E}_i.$$

Da Y ein Jacobifeld längs γ ist, gilt $Y'' = -\mathrm{R}(Y,\dot{\gamma})\dot{\gamma} \overset{(3.27)}{=} -C\,Y^\perp$, und es ergibt sich weiter

$$\langle \widetilde{Y}'', \widetilde{Y}^\perp\rangle = \sum_{i=1}^m \langle -\mathrm{R}(Y,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, E_i\rangle\langle Y^\perp, E_i\rangle = -\langle \mathrm{R}(Y,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y^\perp\rangle = -\|\widetilde{Y}^\perp\|^2 C \tag{3.28}$$

sowie

$$\langle \widetilde{Y}'', \dot{\widetilde{\gamma}}\rangle = \langle Y'', \dot{\gamma}\rangle = -\langle \mathrm{R}(Y,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0\,. \tag{3.29}$$

1. Fall: $Y_l^\perp = 0$
Wegen der Voraussetzung an l und 3.1 besitzt γ keinen konjugierten Punkt, also folgt aus $Y_0 = 0$ und [7, 10,2] (da mit Y auch $Y^\perp$ ein Jacobifeld ist) $Y^\perp = 0$, also auch $\widetilde{Y}^\perp = 0$. Daher folgt aus (3.29) $\widetilde{Y}'' = 0 = -\widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y}^\perp, \dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}} = -\widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}}$, d.h. $\widetilde{Y}$ ist Jacobifeld.
2. Fall: $Y_l^\perp \neq 0$
In diesem Fall gilt $\forall_{t\in]0,l]}\ Y_t^\perp \neq 0$ (denn sonst besäße γ einen konjugierten Punkt,

im Widerspruch zu 3.1). Aus $\|\widetilde{Y}^{\perp}\| = \|Y^{\perp}\|$ sowie (3.27)folgt (da Y ein Jacobifeld längs γ ist)

$$\forall_{t\in]0,l]}\,\|\widetilde{Y}_t''\| = \|Y_t''\| = \|\mathrm{R}(Y,\dot{\gamma})\dot{\gamma}\|(t) = \|\mathrm{R}(Y^{\perp},\dot{\gamma})\dot{\gamma}\|(t) = |C|\|Y_t^{\perp}\| = |C|\|\widetilde{Y}_t^{\perp}\|.$$

Also gilt nach (3.28) $\forall_{t\in]0,l]}\,|\langle\widetilde{Y}_t'',\widetilde{Y}_t^{\perp}\rangle| = \|\widetilde{Y}_t''\|\|\widetilde{Y}_t^{\perp}\|$, und es folgt nach Cauchy-Schwarz sowie [7, 7.31] (angewandt in M_C^m)

$$\begin{aligned}\forall_{t\in]0,l]}\quad \widetilde{Y}_t'' &= \langle\widetilde{Y}_t'',\frac{\widetilde{Y}_t^{\perp}}{\|\widetilde{Y}_t^{\perp}\|}\rangle\frac{\widetilde{Y}_t^{\perp}}{\|\widetilde{Y}_t^{\perp}\|} \overset{(3.28)}{=} -C\widetilde{Y}_t^{\perp} = -\widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y}_t^{\perp},\dot{\widetilde{\gamma}}(t))\dot{\widetilde{\gamma}}(t)\\ &= -\widetilde{\mathrm{R}}(\widetilde{Y}_t,\dot{\widetilde{\gamma}}(t))\dot{\widetilde{\gamma}}(t).\end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch in $t = 0$, und wir haben auch im 2. Fall gezeigt, daß $\widetilde{Y}$ ein Jacobifeld ist. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Kapitel 4

Über die Krümmungsgrößen isometrischer Immersionen, die in normale Bälle nach oben beschränkter Krümmung abbilden

Wir werden im nächsten Kapitel bei den Beweisen der Hauptsätze 5.3.1, 5.4.1 und 5.5.1 eine isometrische Immersion $f\colon M \to \widetilde{M}$ mit $f(M) \subset B_r(q_0)$ betrachten und Eigenschaften der in Kapitel 1 vorgestellten Hauptkrümmungen $\varphi_i^\xi(p_0)$, mittleren Krümmung $\mathrm{H}_\xi(p_0)$ sowie des Richtungsvektorfeldes X_{p_0} und der Stützfunktion $\rho_{q_0,\xi}(p_0)$ in Punkten $p_0 \in M$, die f sogar in $S_r(q_0) \subset B_r(q_0)$ abbildet, ausnutzen. In diesem Kapitel ist unser erstes Ziel, diese Eigenschaften (siehe Satz 4.5) zu beweisen. Das entscheidende Hilfsmittel wird hierbei die in Satz 3.9 erhaltene Abschätzung für die Hesseform des Quadrates der Abstandsfunktion sein. Zusätzlich werden noch zwei vorbereitende Lemmata benötigt.

Definition 4.1. Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit und U Teilmenge von M mit $q_0 \in U$.

U heißt genau dann eine *normale Umgebung von* q_0, wenn es eine sternförmige Umgebung von 0 in $T_{q_0}M$ gibt, die durch $\exp_{q_0}$ diffeomorph auf U abgebildet wird.

Bemerkung. Ist $B_r(q_0)$ eine normaler Ball um q_0 in einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M, so gilt offenbar $r \leq r_{q_0}$, wobei r_{q_0} der Injektivitätsradius von q_0 ist.

Wir setzen in diesem Kapitel stets die folgende Situation voraus, die in manchen Fällen auch noch weiter eingeschränkt wird:

Voraussetzungen 4.2. Seien $m < \widetilde{m}$, M eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $\widetilde{M}$ eine $\widetilde{m}$-dimensionale vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, für deren Schnittkrümmung $\widetilde{\mathrm{K}} \leq C \in \mathbb{R}$ gelte.

$f\colon\ M \to \widetilde{M}$ sei eine isometrische Immersion, $q_0 \in \widetilde{M}$, $B_r(q_0)$ ein normaler Ball (d.h. insbes. $r \in]0, r_{q_0}]$) und $\psi := \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2\colon\ \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ sowie $\Psi := \psi \circ f\colon\ M \to \mathbb{R}$.

Lemma 4.3. *Zusätzlich zu 4.2 gelte $f(M) \subset B_r(q_0)$ und es sei $p \in M$ beliebig. Dann folgt aus Satz 3.4, daß ψ in $f(p)$ und Ψ in p differenzierbar ist, und es gilt*

$$\operatorname{grad}_p \Psi = \big({}^{T_f}(\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi) \circ f\big)|_p \tag{4.1}$$

$$\forall_{v \in T_pM}\ \operatorname{hess}_p \Psi(v,v) = \widetilde{\operatorname{hess}}_{f(p)}\psi(f_*v, f_*v) + \langle \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v,v)\rangle. \tag{4.2}$$

Beweis:
Zu (4.1):
Sei $\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ ein differenzierbarer Weg in M mit $\gamma(0) = p$. Dann folgt (4.1) aus der Beliebigkeit von $\dot\gamma(0) \in T_pM$ und

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}_p \Psi, \dot\gamma(0)\rangle &= (\Psi \circ \gamma)'(0) = \big(\psi \circ (f \circ \gamma)\big)'(0) = \langle \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, f_*\dot\gamma(0)\rangle \\ &= \langle \big({}^{T_f}(\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi) \circ f\big)|_p, \dot\gamma(0)\rangle. \end{aligned}$$

Zu (4.2):
Für alle $p \in M$ und $X, Y \in \mathfrak{V}_M(p)$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{hess}_p \Psi(X_p, Y_p) &= \langle \nabla_X \operatorname{grad}\Psi, Y\rangle_p = X_p \cdot \langle \operatorname{grad}\Psi, Y\rangle - \langle \operatorname{grad}\Psi, \nabla_X Y\rangle_p \\ &\overset{(4.1)}{=} X_p \cdot \langle (\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi) \circ f, f_*Y\rangle - \langle (\widetilde{\operatorname{grad}}\psi) \circ f, \underbrace{f_*\nabla_X Y}_{=\widetilde{\nabla}_X(f_*Y) - \alpha(X,Y)}\rangle_p \\ &= \widetilde{\operatorname{hess}}_{f(p)}\psi(f_*v, f_*v) + \langle \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v,v)\rangle. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. *Zusätzlich zu 4.2 gelte $\widetilde{m} = m + 1$ und $f(M) \subset B_r(q_0) \setminus \{q_0\}$.*
Dann ist das Richtungsvektorfeld $X \in \mathfrak{V}_f(M)$ von f bzgl. q_0 definiert, d.h. genau (vgl. Def. 1.3.2) δ_{q_0} ist in allen Punkten $f(p)$ mit $p \in M$ differenzierbar.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.4. □

Satz 4.5. ***Vor.:*** *Zusätzlich zu 4.2 gelte im Falle $C > 0$: $r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$*
Außerdem seien $f(M) \subset B_r(q_0)$ und $p_0 \in M$ mit $\delta_{q_0}(f(p_0)) = r$.
Beh.:

(i) Es existiert $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p_0)$ mit $\|\xi\| = 1$ derart, daß für alle $i \in \{1,\dots,m\}$ gilt

$$\varphi_i^\xi(p_0) \leq -\mathrm{k}_C(r)\,(<0) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{H}_\xi(p_0) \leq -\mathrm{k}_C(r)\,(<0).$$

(ii) Ist $\widetilde{m} = m+1$, so gilt für alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p_0)$ mit $\|\xi\| = 1$ und $i, j \in \{1,\dots,m\}$

$$\varphi_i^\xi(p_0)\varphi_j^\xi(p_0) > 0$$

$$|\varphi_i^\xi(p_0)| \geq \mathrm{k}_C(r)\,(>0) \quad \textit{und} \quad |\mathrm{H}_\xi(p_0)| \geq \mathrm{k}_C(r)\,(>0). \tag{4.3}$$

Wenn außerdem $q_0 \notin f(M)$ ist, folgt aus Lemma 4.4, daß das Richtungsvektorfeld X von f bzgl. q_0 definiert ist, und es gilt

$$X_{p_0}, \xi_{p_0} \textit{ sind linear abhängig}$$
$$\rho_{q_0,\xi}(p_0)\,\varphi_i^\xi(p_0) = -\|X_{p_0}\||\varphi_i^\xi(p_0)|\,(\leq 0).$$

(iii) Ist zusätzlich $\widetilde{M}$ von konstanter Krümmung $C \in \mathbb{R}$ und existiert $U \in \mathrm{Umg}(p_0, M)$ mit $\delta_{q_0} \circ f|_U = r$, so gilt in (i) und (ii)(4.3) jeweils „=” anstatt „≤” bzw. „≥”.

Beweis: Zu (i) und (ii):
Zunächst folgt aus der Voraussetzung an r und Lemma 3.6 (iii)-(v)

$$\mathrm{k}_C(r) > 0\,. \tag{4.4}$$

Außerdem folgt aus der Voraussetzung an r, der Wahl von p_0 und Satz 3.4, daß $\psi = \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2$ und δ_{q_0} in $f(p_0)$ differenzierbar sind, also gilt

$$\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi = \tfrac{1}{2}\,2\,\delta_{q_0}(f(p_0))\,\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\delta_{q_0} = r\,\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\delta_{q_0}\,. \tag{4.5}$$

Sei $\mu\colon\,]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ eine Geodätische mit $\mu(0) = p_0$, $\dot\mu(0) \neq 0$ und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ so klein, daß $\Psi \circ \mu = \psi \circ f \circ \mu\colon\,]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. (Eine solche Wahl von ε ist möglich, da ψ in $f(p_0)$ differenzierbar ist.) Aus $f(M) \subset B_r(q_0)$ und $\delta_{q_0}(f(p)) = r$ folgt, daß $\Psi = \psi \circ f$ in p_0 maximal wird, und es gilt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; (\psi \circ f \circ \mu)'(0) = \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, f_*\dot\mu(0)\rangle && (4.6)\\ 0 \;&\geq\; (\Psi \circ \mu)''(0) \overset{3.8}{=} \mathrm{hess}_{p_0}\Psi(\dot\mu(0),\dot\mu(0)) && (4.7)\\ &\overset{4.3}{=}\; \widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_0)}\psi(f_*\dot\mu(0), f_*\dot\mu(0)) + \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(\dot\mu(0),\dot\mu(0))\rangle\,. \end{aligned}$$

Aus (4.6) folgt wegen der Beliebigkeit von $\dot\mu(0) \in T_{p_0}M \setminus \{0\}$

$$\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi \in \perp_{p_0}(f)\,, \tag{4.8}$$

und aus Satz 3.9 (dort $M = \widetilde{M}$ und $l = r$) folgt

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_0)}\psi(f_*\dot\mu(0), f_*\dot\mu(0))\\ &\quad\geq r\big((\frac{1}{r} - \mathrm{k}_C(r))\langle f_*\dot\mu(0), \frac{1}{r}\,\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi\rangle^2 + \mathrm{k}_C(r)\|\dot\mu(0)\|^2\big) && (4.9)\\ &\quad\overset{(4.8)}{=} r\,\mathrm{k}_C(r)\|\dot\mu(0)\|^2 \overset{\dot\mu(0)\neq 0,(4.4)}{>} 0\,, \end{aligned}$$

somit gilt nach (4.7)

$$-\langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(\dot\mu(0),\dot\mu(0))\rangle \;\geq\; r\,\mathrm{k}_C(r)\|\dot\mu(0)\|^2 \;> 0\,. \tag{4.10}$$

Nach 3.5(ii)(3.3) (dort $M = \widetilde{M}$) gilt $\|\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi\| = r$ und wegen (4.8) existiert demnach

$$\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p_0) \text{ mit } \|\xi\| = 1 \text{ und } \xi_{p_0} = \frac{\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi}{r} \overset{(4.5)}{=} \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\delta_{q_0}. \tag{4.11}$$

Seien $i \in \{1, \ldots, m\}$ beliebig und fortan $\dot{\mu}(0)$ sogar Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung $\varphi_i^{\xi}(p_0)$, insbesondere gilt dann $\|\dot{\mu}(0)\| = 1$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{\xi}(p_0) &= h_{\xi}(\dot{\mu}(0), \dot{\mu}(0)) = \langle -\widetilde{\nabla}_{\dot{\mu}(0)}\xi, \dot{\widehat{(f \circ \mu)}}(0)\rangle \\
&= D_0 \cdot \underbrace{\langle -\xi \circ \mu, \dot{\widehat{(f \circ \mu)}}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \xi_{p_0}, \widetilde{\nabla}_{D_0}\dot{\widehat{(f \circ \mu)}}\rangle}_{\overset{[7,\text{Ü73b)(2)}]}{=} \langle \xi_{p_0}, \alpha(\dot{\mu}(0), \dot{\mu}(0))\rangle} \\
&\overset{(4.11)}{=} \langle \frac{\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi}{r}, \alpha(\dot{\mu}(0), \dot{\mu}(0)) \rangle \\
&\overset{(4.10)}{\leq} -\mathrm{k}_C(r) \overset{(4.4)}{<} 0\,.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Hieraus und der Definition von $\mathrm{H}_{\xi}(p_0)$ in 1.1.2(ii) folgt (i).
Gelte nun $\widetilde{m} = m + 1$. Dann gilt für jedes Einheitsnormalenfeld $\widetilde{\xi} \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p_0)$

$$\forall_{p \in G\xi \cap G\widetilde{\xi}}\ \xi_p, \widetilde{\xi}_p \text{ sind linear abhängig, d.h. } \xi_p = \pm\widetilde{\xi}_p\,. \tag{4.13}$$

Hieraus und aus (i) folgt die erste Hälfte der Behauptung von (ii).
Ist zusätzlich $q_0 \notin f(M)$, so ist nach Lemma 4.4 das Richtungsvektorfeld X von f bzgl. q_0 definiert. Dann gilt

$$X_{p_0} \overset{1.3.2(i)}{=} \mathrm{s}_C(r)\,\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\delta_{q_0} \overset{(4.11)}{=} \mathrm{s}_C(r)\,\xi_{p_0},$$

d.h. X_{p_0} und ξ_{p_0} sind linear abhängig und $X_{p_0} = \|X_{p_0}\|\xi_{p_0}$. (Beachte, daß wegen der Voraussetzung an r $\mathrm{s}_C(r) > 0$ gilt.) Dann folgt

$$\rho_{q_0,\xi}(p_0)\varphi_i^{\xi}(p_0) \overset{1.3.2(ii)}{=} \langle X_{p_0}, \xi_{p_0}\rangle\,\varphi_i^{\xi}(p_0) = \|X_{p_0}\|\varphi_i^{\xi}(p_0) \overset{(4.12)}{=} -\|X_{p_0}\||\varphi_i^{\xi}(p_0)|\,,$$

und wir haben wegen (4.13), der Beliebigkeit von $i \in \{1, \ldots, m\}$ und

$$\rho_{q_0,-\xi}\,\varphi_i^{-\xi} \overset{1.1.2}{=} \langle X, -\xi\rangle\,(-\varphi_{m-i+1}^{\xi}) = \langle X, \xi\rangle\,\varphi_{m-i+1}^{\xi} = \rho_{q_0,\xi}\,\varphi_{m-i+1}^{\xi}$$

auch die zweite Hälfte der Behauptung von (ii) gezeigt.
Zu (iii):
Der Beweis läuft analog zu dem von (i) und (ii) mit dem Unterschied, daß auf Grund der zusätzlichen Voraussetzungen einige der obigen Abschätzungen zu Gleichungen werden:

Gilt sogar $\delta_{q_0} \circ f|_U = r$ mit $U \in \operatorname{Umg}(p_0, M)$, so folgt, daß in (4.7) „=" statt „≥" gilt. Wenn außerdem auch $\widetilde{\mathrm{K}} = C$ gilt, so folgt aus Satz 3.9, daß in (4.9) „=" statt „≥" gilt. Diese beiden Gleichungen haben zur Folge, daß auch in (4.10) „=" statt „≥" und somit in (4.12) „=" statt „≤" gilt. Hieraus und aus (4.13) folgt (iii). □

Korollar 4.6. ***Vor.:*** *Zusätzlich zu 4.2 gelte im Falle $C > 0$: $r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$.*

Weiter sei M kompakt sowie $f(M) \subset B_r(q_0)$.

Beh.: $\left(H_0 \in \mathbb{R} \wedge \forall_{\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp, \|\xi\|=1} |\mathrm{H}_\xi| \leq H_0\right) \quad \Longrightarrow \quad H_0 \geq \mathrm{k}_C(r) (> 0)$

Beweis: Wegen der Kompaktheit von M, der Stetigkeit von δ_{q_0} (nach 1.2.3(i)) und f sowie $f(M) \subset B_r(q_0)$ existiert ein minimales $\widetilde{r} \in \mathbb{R}_+$ mit $\widetilde{r} \leq r$ und $f(M) \subset B_{\widetilde{r}}(q_0)$ sowie $p_0 \in M$ mit $\delta_{q_0}(f(p_0)) = \widetilde{r}$. Aus Teil (i) des Satzes folgt dann $H_0 \geq \mathrm{k}_C(\widetilde{r})$ und nach Lemma 3.6(ii)-(v) gilt $\mathrm{k}_C(\widetilde{r}) \geq \mathrm{k}_C(r) > 0$. □

Wir zeigen als nächstes Theorem 1 in [10]. Es besagt, daß ein ähnliches Ergebnis wie das letzte Korollar auch für eine vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit M mit nach unten beschränkter Skalarkrümmung (anstelle einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit M) gilt. Im Gegensatz zu allen übrigen Resultaten dieses Kapitels ist dies keine Vorbereitung der Beweise der Kriterien für kompakte sphärische Hyperflächen in Kapitel 5.

Hauptsatz 4.7 ([10, Theorem 1])**.** ***Vor.:*** *Zusätzlich zu 4.2 sei M vollständig und zusammenhängend mit nach unten beschränkter Skalarkrümmung $\mathfrak{s}$. Außerdem gelte $f(M) \subset B_r(q_0)$ sowie im Falle $C > 0$: $r < \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$*

Beh.: $\left(H_0 \in \mathbb{R} \wedge \forall_{\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp, \|\xi\|=1} |\mathrm{H}_\xi| \leq H_0\right) \quad \Longrightarrow \quad H_0 \geq \frac{1}{\widetilde{m}-m} \mathrm{k}_C(r) (> 0)$

Bemerkung. Zu einer isometrischen Immersion wie in der Voraussetzung existiert immer ein Punkt $p \in M$ und ein Einheitsnormalenfeld $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $|\mathrm{H}_\xi(p)| \geq \frac{1}{\widetilde{m}-m} \mathrm{k}_C(r) > 0$, denn anderenfalls folgte aus dem Hauptsatz ein Widerspruch. Im Falle $C < 0$ heißt dies wegen Lemma 3.6(v) insbesondere $|\mathrm{H}_\xi(p)| \geq \frac{1}{\widetilde{m}-m} \sqrt{|C|}$.

Beweis: Wir führen den Beweis wie in [9, Theorem H] und gehen folgendermaßen vor:
Gelte die linke Seite der Behauptung, d.h.

$$\exists_{H_0 \in \mathbb{R}} \forall_{\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp, \|\xi\|=1} |\mathrm{H}_\xi| \leq H_0. \tag{4.14}$$

Als Immersion ist f lokal injektiv, also nicht konstant vom Wert q_0. Wegen $m < \widetilde{m}$ und $f(M) \subset B_r(q_0)$ existieren daher $\widetilde{q} \in B_r(q_0) \setminus \{q_0\}$ und $\widetilde{p} \in M$ mit $f(\widetilde{p}) = \widetilde{q}$. Wir werden mittels des Satzes von Omori zeigen, daß eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ in M existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\delta_{q_0}^2(f(p_n)) = \Psi(p_n) \geq \Psi(\widetilde{p}) = \tfrac{1}{2}\delta_{q_0}^2(\widetilde{q}) \overset{\widetilde{q}\neq q_0}{>} 0 \\ \|\mathrm{grad}_{p_n}\Psi\| < \tfrac{1}{n} \\ \forall_{v\in T_{p_n}M\setminus\{0\}}\, \mathrm{hess}_{p_n}\Psi(v,v) < \tfrac{1}{n}\|v\|^2.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Wir setzen

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, l_n := \delta_{q_0}(f(p_n)) \overset{(4.15),\mathrm{Vor.}}{\in}]0,r] \tag{4.16}$$

und werden weiterhin zeigen:

$$\exists_{n_0\in\mathbb{N}_+}\,\exists_{L\in[0,\infty[}\,\forall_{n\in\mathbb{N}_+,n\geq n_0}\, l_n(\widetilde{m}-m)H_0 > l_n \mathrm{k}_C(l_n)(1-\frac{1}{nl_n})^2 - \frac{3L}{nl_n} - \frac{1}{n} \tag{4.17}$$

Aus (4.17) ergibt sich die Behauptung wie folgt:
Wegen $\delta_{q_0}(\widetilde{q}) \overset{(4.15)}{\leq} \delta_{q_0}(f(p_n)) = l_n \overset{(4.16)}{\leq} r$ ist $(l_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ eine Folge in der kompakten Menge $[\delta_{q_0}(\widetilde{q}), r]$ und besitzt daher eine konvergente Teilfolge. O.B.d.A. konvergiere die Folge selbst gegen $l_0 \in [\underbrace{\delta_{q_0}(\widetilde{q})}_{\overset{(4.15)}{>} 0}, r]$. Dann folgt aus (4.17) und der Stetigkeit von k_C für $n\to\infty$

$$l_0(\widetilde{m}-m)H_0 \geq l_0\mathrm{k}_C(l_0), \quad \text{d.h.} \quad H_0 \geq \frac{1}{\widetilde{m}-m}\,\mathrm{k}_C(l_0).$$

Wegen Lemma 3.6(ii)-(v) und der Voraussetzung an r ist $\mathrm{k}_C|_{]0,r]}$ streng monoton fallend und größer Null, also folgt $\mathrm{k}_C(l_0) \geq \mathrm{k}_C(r) > 0$ und die Behauptung ist gezeigt.
Zu zeigen bleiben die Existenz der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit (4.15) und (4.17).
Zur Existenz der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit (4.15):
M ist eine m-dimensionale vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. $\Psi = \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2 \circ f\colon M \to \mathbb{R}$ ist wegen $f(M) \subset B_r(q_0)$ und Lemma 4.3 eine nach oben beschränkte differenzierbare Funktion. Die Existenz des n-ten Folgengliedes der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ folgt daher aus dem Satz von Omori 2.4 (dort $\varepsilon := \frac{1}{n}$), wenn wir zeigen, daß die Schnittkrümmung von M nach unten beschränkt ist. Wir zeigen sogar :

$$\exists_{D\in\mathbb{R}}\,\forall_{p\in M}\,\forall_{w_1,w_2\in T_pM\, orthonormal}\, |\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{w_1,w_2\})| \leq D \tag{4.18}$$

Beweis hiervon:
$B_r(q_0)$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$, also nach dem Satz von Hopf-Rinow [7, 10.26] kompakt. Wegen $f(M) \subset B_r(q_0)$ gilt daher nach Satz 2.3.2

$$\exists_{E\in\mathbb{R}}\,\forall_{p\in M}\,\forall_{\sigma\, 2-\mathrm{dim.\,UVR\,von}\, T_pM}\, |\widetilde{\mathrm{K}}(f_*\sigma)| \leq E. \tag{4.19}$$

Ferner existiert nach Voraussetzung $F \in \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{s} \geq -F$. Wir setzen:

$$G := m(m-1)C + m^2(\widetilde{m}-m)H_0^2 + m(m-1)F \tag{4.20}$$
$$D := E + G \tag{4.21}$$

und zeigen, daß dieses D (4.18) erfüllt.
Seien p, w_1, w_2 wie in (4.18). Wir können $w_3, \ldots, w_m \in T_pM$ finden derart, daß $w_1, \ldots, w_m$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist. Des weiteren existieren $\xi_1, \ldots, \xi_{\widetilde{m}-m} \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\langle \xi_k, \xi_l \rangle = \delta_{kl}$ für $k, l \in \{1, \ldots, \widetilde{m}-m\}$. Dann gilt $\alpha_p = \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_k|_p} \xi_k|_p$ und aus Definition 1.1.1(iii) sowie der Gauß-Gleichung [7, 8.6(3)] folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}(p) &= \frac{\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{w_i, w_j\})}{m(m-1)} \\
&= \frac{1}{m(m-1)}\Big(\sum_{i\neq j} \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*w_i, f_*w_j\}) + \sum_{i\neq j} \langle \alpha(w_i,w_i), \alpha(w_j,w_j)\rangle \\
&\qquad - \sum_{i\neq j} \langle \alpha(w_i,w_j), \alpha(w_i,w_j)\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{m(m-1)}\Big(\sum_{i\neq j} \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*w_i, f_*w_j\}) \\
&\qquad + \sum_{i\neq j} \langle \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_k}(w_i,w_i)\xi_k|_p, \sum_{l=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_l}(w_j,w_j)\xi_l|_p \rangle \\
&\qquad - \sum_{i\neq j} \langle \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_k}(w_i,w_j)\xi_k|_p, \sum_{l=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_l}(w_i,w_j)\xi_l|_p \rangle\Big) \\
&= \frac{1}{m(m-1)}\Big(\sum_{i\neq j} \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*w_i, f_*w_j\}) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \sum_{i\neq j} h_{\xi_k}(w_i,w_i) h_{\xi_k}(w_j,w_j) - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \sum_{i\neq j} h_{\xi_k}(w_i,w_j)^2\Big) \\
&= \frac{1}{m(m-1)}\Big(\sum_{i\neq j} \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*w_i, f_*w_j\}) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} h_{\xi_k}(w_i,w_i) h_{\xi_k}(w_j,w_j)}_{=m^2 \mathrm{H}_{\xi_k}(p)^2} - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \sum_{i,j=1}^{m} h_{\xi_k}(w_i,w_j)^2\Big).
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\widetilde{\mathrm{K}} \leq C$, $|\mathrm{H}_{\xi_k}| \leq H_0$ gilt und wegen $\mathfrak{s} \geq -F$, also $-\mathfrak{s} \leq F$, folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{h_{\xi_k}(w_i, w_j)^2}_{\geq 0} &= \sum_{i \neq j} \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_* w_i, f_* w_j\}) \\
&\quad + m^2 \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \mathrm{H}_{\xi_k}(p)^2 - m(m-1)\mathfrak{s}(p) \\
&\leq m(m-1)C + m^2(\widetilde{m}-m)H_0^2 + m(m-1)F \stackrel{(4.20)}{=} G,
\end{aligned}$$

also gilt insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \sum_{i,j=1, i<j}^{2} h_{\xi_k}(w_i, w_j)^2 \leq G\,. \tag{4.22}$$

Eine erneute Anwendung der Gauß-Gleichung [7, 8.6(3)] ergibt

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{w_1, w_2\}) &= \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_* w_1, f_* w_2\}) \\
&\quad + \langle \alpha(w_1, w_1), \alpha(w_2, w_2) \rangle - \langle \alpha(w_1, w_2), \alpha(w_1, w_2) \rangle \\
&= \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_* w_1, f_* w_2\}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \big(h_{\xi_k}(w_1, w_1) h_{\xi_k}(w_2, w_2) - h_{\xi_k}(w_1, w_2)^2 \big).
\end{aligned}$$

Da für jedes $k \in \{1, \ldots, \widetilde{m}-m\}$ gilt

$$|h_{\xi_k}(w_1, w_1)||h_{\xi_k}(w_2, w_2)| \leq h_{\xi_k}(w_1, w_1)^2 + h_{\xi_k}(w_2, w_2)^2\,,$$

folgt hieraus und aus (4.19), (4.22)

$$\begin{aligned}
|\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{w_1, w_2\})| &\leq |\widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_* w_1, f_* w_2\})| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \big(|h_{\xi_k}(w_1, w_1)||h_{\xi_k}(w_2, w_2)| + |h_{\xi_k}(w_1, w_2)^2| \big) \\
&\leq |\widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_* w_1, f_* w_2\})| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} \big(h_{\xi_k}(w_1, w_1)^2 + h_{\xi_k}(w_2, w_2)^2 + h_{\xi_k}(w_1, w_2)^2 \big) \\
&\leq E + G \stackrel{(4.21)}{=} D\,,
\end{aligned}$$

also gilt (4.18) und die Existenz der Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit (4.15) ist bewiesen.
Zu (4.17):
Wegen der Voraussetzung an r und $f(M) \subset B_r(q_0)$ existiert nach Satz 3.2 und

[7, 10.24(i), 10.14(ii)] zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ eine eindeutig bestimmte nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma_n\colon [0, \underbrace{l_n}_{=\delta_{q_0}(f(p_n))}] \to \widetilde{M}$ von q_0 nach $f(p_n)$.

Nach Satz 3.5(i)(3.3) (dort $M = \widetilde{M}$) ist ψ in $f(p_n)$ differenzierbar und es gilt:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+} \|\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p_n)}\psi\| = l_n \overset{(4.16)}{>} 0 \tag{4.23}$$

Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $v \in T_{p_n}M \setminus \{0\}$ beliebig. Wegen (4.23) existieren eindeutig bestimmte $w_v^T, w_v^\perp \in T_{f(p_n)}\widetilde{M}$ mit

$$\begin{gathered} f_*v = w_v^T + w_v^\perp \\ w_v^\perp, \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p_n)}\psi \text{ linear abhängig} \\ \langle w_v^T, w_v^\perp\rangle = 0, \end{gathered} \tag{4.24}$$

also gilt

$$\begin{aligned} \|w_v^\perp\| &= \frac{1}{\|\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p_n)}\psi\|}|\langle w_v^\perp, \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p_n)}\psi\rangle| = \frac{1}{l_n}|\langle f_*v, \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p_n)}\psi\rangle| \\ &= \frac{1}{l_n}|\langle v, {}^{T_f}\big((\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi)\circ f\big)|_{p_n}\rangle| \overset{4.3(4.1)}{=} \frac{1}{l_n}|\langle v, \operatorname{grad}_{p_n}\Psi\rangle| \le \frac{\|v\|\|\operatorname{grad}_{p_n}\Psi\|}{l_n} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\|w_v^\perp\|}{\|v\|} \le \frac{\|\operatorname{grad}_{p_n}\Psi\|}{l_n} \overset{(4.15)}{<} \frac{1}{nl_n}. \tag{4.25}$$

Hieraus folgt weiter

$$1 = \tfrac{\|f_*v\|}{\|v\|} = \tfrac{\|w_v^T + w_v^\perp\|}{\|v\|} \le \tfrac{\|w_v^T\| + \|w_v^\perp\|}{\|v\|} < \tfrac{\|w_v^T\|}{\|v\|} + \tfrac{1}{nl_n}\,,$$

d.h.

$$1 - \frac{1}{nl_n} < \frac{\|w_v^T\|}{\|v\|}\,. \tag{4.26}$$

Nun ist nach (4.15) $l_n = \delta_{q_0}(f(p_n)) \ge \delta_{q_0}(\widetilde{q}) > 0$, also folgt $\frac{1}{nl_n} \le \frac{1}{n\delta_{q_0}(\widetilde{q})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Daher existiert $n_0 \in \mathbb{N}_+$ derart, daß die linke Seite von (4.26) für alle $n \ge n_0$ positiv ist, und wir erhalten aus der Beliebigkeit von $n \in \mathbb{N}_+$ und $v \in T_{p_n}M \setminus \{0\}$ bei den obigen Überlegungen:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+, n\ge n_0} \forall_{v\in T_{p_n}M\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{1}{nl_n}\right)^2 < \frac{\|w_v^T\|^2}{\|v\|^2} \tag{4.27}$$

Wegen $f(M) \subset B_r(q_0)$ und Lemma 4.3 ist ψ in jedem Punkt $f(p)$ mit $p \in M$ differenzierbar. Wir können daher für jedes $p \in M$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L_{f(p)}\colon\ T_{f(p)}\widetilde{M} &\longrightarrow T_{f(p)}\widetilde{M} \\ x &\longmapsto \widetilde{\nabla}_x \widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi \end{aligned}$$

definieren und werden zeigen

$$0 \le L := \sup\{\|L_{f(p)}\| \,|\, p \in M\} < \infty\,, \tag{4.28}$$

wobei $\|\ldots\|$ jeweils die Operatornorm von $\mathcal{L}(T_{f(p)}\widetilde{M}, T_{f(p)}\widetilde{M})$ bezeichne.
[Zu (4.28):
$B_r(q_0)$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$, also nach dem Satz von Hopf-Rinow [7, 10.26] kompakt. Aus Satz 2.3.1 ergibt sich die Kompaktheit von $\bigcup_{q\in B_r(q_0)} T^1_q\widetilde{M}$. Ferner existiert wegen der Voraussetzung an r und Satz 3.4 eine offene Obermenge U von $B_r(q_0)$ auf der ψ differenzierbar ist, und wir werden zeigen:

$$\|\widetilde{\nabla}_{\ldots}\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi\| : \bigcup_{q\in U} T_q\widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig.} \tag{4.29}$$

Dann folgt aus der Kompaktheitstreue stetiger Abbildungen

$$\sup\{\|\widetilde{\nabla}_x\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi\| \mid x \in \bigcup_{q\in B_r(q_0)} T^1_q\widetilde{M}\} < \infty.$$

Wegen $\forall_{p\in M}\, \|L_{f(p)}\| = \sup\{\|\widetilde{\nabla}_x\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi\| \mid x \in T^1_{f(p)}\widetilde{M}\}$ und $f(M) \subset B_r(q_0)$ gilt daher $L = \sup\{\|\widetilde{\nabla}_x\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi\| \mid x \in \bigcup_{p\in M} T^1_{f(p)}\widetilde{M}\} < \infty$.
Zu zeigen bleibt (4.29). Beweis hiervon:
Bezeichne $\mathfrak{p} : T\widetilde{M} \to \widetilde{M}$ die (differenzierbare) Fußpunktabbildung. Sei $q_1 \in U$ beliebig und $(E_1, \ldots, E_{\widetilde{m}})$ auf einer Umgebung $G \subset U$ von q_1 definiertes orthonormales differenzierbares m-Beinfeld. Dann gilt für alle $x \in \bigcup_{q\in G} T_q\widetilde{M}$

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{\widetilde{m}} \langle x, E_i|_{\mathfrak{p}(x)}\rangle E_i|_{\mathfrak{p}(x)} \\
\widetilde{\nabla}_x\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi &= \sum_{i=1}^{\widetilde{m}} \langle x, E_i|_{\mathfrak{p}(x)}\rangle \widetilde{\nabla}_{E_i|_{\mathfrak{p}(x)}}\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{\widetilde{m}} \underbrace{\langle id_{T\widetilde{M}}, E_i \circ \mathfrak{p}\rangle}_{\text{differenzierbar}}\, \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{E_i}\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi) \circ \mathfrak{p}}_{\text{differenzierbar}}\Big)(x)\,,
\end{aligned}$$

also ist $\widetilde{\nabla}_{\ldots}\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi : \bigcup_{q\in U} T_q\widetilde{M} \to T\widetilde{M}$ (lokal) differenzierbar. (4.29) folgt dann aus der Stetigkeit von $\|\ldots\| : T\widetilde{M} \to \mathbb{R}$.]
Aus (4.28) folgt für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und $w, \widetilde{w} \in T_{f(p_n)}\widetilde{M}$

$$|\widetilde{\operatorname{hess}}\,\psi(w, \widetilde{w})| = |\langle\widetilde{\nabla}_w\widetilde{\operatorname{grad}}\,\psi, \widetilde{w}\rangle| \le L\|w\|\|\widetilde{w}\|,$$

also $\widetilde{\operatorname{hess}}\,\psi(w, \widetilde{w}) \ge -L\|w\|\|\widetilde{w}\|$. Daher folgt für alle $v \in T_{p_n}M \setminus \{0\}$ aus (4.24)

$$\frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\operatorname{hess}}_{f(p_n)}\psi(f_*v, f_*v)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(w_v^T, w_v^T) + 2\frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(w_v^T, w_v^\perp) \\
&\quad + \frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(w_v^\perp, w_v^\perp) \\
&\geq \frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(w_v^T, w_v^T) - \frac{2L\|w_v^T\|\|w_v^\perp\|}{\|v\|^2} - \frac{L\|w_v^\perp\|^2}{\|v\|^2} \\
&\overset{(4.25)}{>} \frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(w_v^T, w_v^T) - 2L\frac{\|w_v^T\|}{\|v\|}\frac{1}{nl_n} - L\frac{\|w_v^\perp\|}{\|v\|}\frac{1}{nl_n}.
\end{aligned}$$

Nach (4.24) gilt $\|f_*v\|^2 = \langle w_v^T + w_v^\perp, w_v^T + w_v^\perp\rangle = \|w_v^T\|^2 + \|w_v^\perp\|^2$, also $\|w_v^T\|, \|w_v^\perp\| \leq \|f_*v\| = \|v\|$ und $\frac{\|w_v^T\|}{\|v\|}, \frac{\|w_v^\perp\|}{\|v\|} \leq 1$. Somit ergibt sich aus der letzten Ungleichung:

$$\frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(f_*v, f_*v) \quad > \quad \frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(w_v^T, w_v^T) - \frac{3L}{nl_n}$$

Wegen (4.24) gilt $\langle w_v^T, \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_n)}\psi\rangle = 0$. Daher folgt weiter aus Satz 3.9 angewandt auf $\gamma_n\colon [0, l_n] \to \widetilde{M}$ (beachte, daß nach (4.16) und der Voraussetzung des Hauptsatzes die Voraussetzungen von Satz 3.9 erfüllt sind):

$$\frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(f_*v, f_*v) \quad \geq \quad l_n \mathrm{k}_C(l_n)\frac{\|w_v^T\|^2}{\|v\|^2} - \frac{3L}{nl_n}$$

Somit haben wir wegen (4.27) gezeigt:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+, n\geq n_0}\forall_{v\in T_{p_n}M\setminus\{0\}}\frac{1}{\|v\|^2}\widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(f_*v, f_*v) > l_n\mathrm{k}_C(l_n)(1-\frac{1}{nl_n})^2 - \frac{3L}{nl_n} \tag{4.30}$$

Wir beweisen nun, daß für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und alle Orthonormalbasen $v_1, \ldots, v_m$ von $T_{p_n}M$ gilt:

$$\langle\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_n)}\psi, \sum_{i=1}^m \alpha(v_i, v_i)\rangle \geq -l_n m(\widetilde{m} - m)H_0 \tag{4.31}$$

[Seien $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathfrak{V}_f^\perp(p_n)$ mit $\forall_{k,l\in\{1,\ldots,m\}}\ \langle\xi_k, \xi_l\rangle = \delta_{kl}$. Dann gilt nach Bemerkung 4.) und 2.) zu 1.1.2 für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ $\alpha(v_i, v_i) = \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} h_{\xi_k}(v_i, v_i)\xi_k|_{p_n}$ und

$$\sum_{i=1}^m \alpha(v_i, v_i) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m}(\sum_{i=1}^m h_{\xi_k}(v_i, v_i))\xi_k|_{p_n} = \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m} m\mathrm{H}_{\xi_k}(p_n)\xi_k|_{p_n}.$$

Daher folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\langle\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_n)}\psi, \sum_{i=1}^m \alpha(v_i, v_i)\rangle \quad \geq \quad -\underbrace{\|\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_n)}\psi\|}_{\overset{(4.23)}{=} l_n} m \quad \underbrace{\|\sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m}\mathrm{H}_{\xi_k}(p_n)\xi_k|_{p_n}\|}_{\leq \sum_{k=1}^{\widetilde{m}-m}|\mathrm{H}_{\xi_k}(p_n)| \overset{(4.14)}{\leq} (\widetilde{m}-m)H_0}$$

$$\geq \quad -l_n m(\widetilde{m}-m)H_0\,,$$

und (4.31) ist gezeigt.]
Wir zeigen schließlich (4.17):
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq n_0$ und $v_1, \ldots, v_m$ eine Orthonormalbasis von $T_{p_n}M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} \quad &\overset{(4.15)}{>} \quad \sum_{i=1}^{m} \mathrm{hess}_{p_n}\Psi(v_i, v_i) \\
&\overset{\text{Lemma 4.3}}{=} \quad \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_n)}\psi(f_*v_i, f_*v_i) + \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_n)}\psi, \sum_{i=1}^{m}\alpha(v_i, v_i)\rangle \\
&\overset{(4.30),(4.31)}{>} \quad m\big(l_n \mathrm{k}_C(l_n)(1-\frac{1}{nl_n})^2 - \frac{3L}{nl_n}\big) - l_n m(\widetilde{m}-m)H_0,
\end{aligned}$$

also ergibt sich

$$l_n(\widetilde{m}-m)H_0 \quad > \quad l_n \mathrm{k}_C(l_n)(1-\frac{1}{nl_n})^2 - \frac{3L}{nl_n} - \frac{1}{n}$$

und (4.17) ist bewiesen. □

Die weiteren Hauptsätze dieser Arbeit geben hinreichende Kriterien dafür, daß das Bild einer isometrischen Immersion $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ einer m-dimensionalen in eine $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit isometrisch zu einer Sphäre des E^{m+1} ist. Beim Nachweis hiervon genügt es zu zeigen , daß $q_0 \in \widetilde{M}$ mit $f(M) = S_r(q_0)$ existiert, wenn man weiß, daß $S_r(q_0)$ isometrisch zu einer Sphäre des E^{m+1} ist. Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir daher ein Kriterium dafür angeben, daß eine Sphäre in $\widetilde{M}$ isometrisch zu einer Sphäre im E^{m+1} ist. Das entscheidende Hilfsmittel hierfür ist der folgende Satz:

Satz 4.8. *Zusätzlich zu 4.2 sei im Falle $C > 0$: $r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$*
Gelte ferner $\widetilde{m} = m+1$ und $f(M) = S_r(q_0)$. Dann folgt:

(i) $\widetilde{\mathrm{K}} = C \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$

(Beachte, daß $|\mathrm{H}|$ nach Bemerkung 3.) zu 1.1.2 auf ganz M wohldefiniert ist.)

(ii) $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp, \|\xi\|=1} \forall_{i,j \in \{1,\ldots,m\}}\, |\varphi_i^\xi| = \mathrm{k}_C(r) \wedge \varphi_i^\xi \varphi_j^\xi > 0$

(iii) $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$ *impliziert:*

1.) $U_r(q_0)$ ist isometrisch zu einer offenen Vollkugel vom Radius r in M_C^{m+1}.

2.) Für alle $q \in B_r(q_0)$ und alle zwei-dimensionalen Unterverktorräume $\widetilde{\sigma}$ von $T_q\widetilde{M}$: $\widetilde{\mathrm{K}}(\widetilde{\sigma}) = C$.

3.) M ist von konstanter Krümmung $\mathrm{k}_C(r)^2 + C = \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$.

Beweis: (i) ist klar nach 4.5(iii) und (ii)„$\Leftarrow$“ ist trivial.

Wegen $f(M) = S_r(q_0)$ gilt nach 4.5(ii) für alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ und alle $i,j \in \{1,\dots,m\}$ $|\varphi_i^\xi| \geq \mathrm{k}_C(r)$ und $\varphi_i^\xi \varphi_j^\xi > 0$. Wegen letzterem folgt zunächst aus der linken Seite von (ii)

$$\mathrm{k}_C(r) = |\mathrm{H}_\xi| = \frac{1}{m}|\sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi| = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m |\varphi_i^\xi|$$

und sodann wegen ersterem $\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} |\varphi_i^\xi| = \mathrm{k}_C(r)$, also gilt (ii).
Zu (iii) 1.):
Wie im Beweis von [4, Theorem 4(iii)] skizziert, geben wir die Isometrie explizit an und gehen folgendermaßen vor:
Seien $e_1,\dots,e_{m+1}$ eine Orthonormalbasis von $T_{q_0}\widetilde{M}$ und $\mathfrak{e}_1,\dots,\mathfrak{e}_{m+1}$ eine Orthonormalbasis von E^{m+1}. Wir zeigen zunächst

$$\begin{array}{llcl} u\colon & U_r^{\widetilde{M}}(q_0) & \longrightarrow & U_r(0_{E^{m+1}}) \\ & q & \longmapsto & \sum_{i=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_i\rangle\, \mathfrak{e}_i \\ & \exp_{q_0}\left(\sum_{i=1}^m \langle x, \mathfrak{e}_i\rangle e_i\right) & \longleftarrow\!\!\shortmid & x \end{array} \tag{4.32}$$

ist ein Diffeomorphismus mit $\delta_{0_{E^{m+1}}} \circ u = \delta_{q_0}$.
[Zu (4.32):
$\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})} : U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0}) \to U_r^{\widetilde{M}}(q_0)$ ist wegen Satz 3.2, der Voraussetzung an r und [7, 10.24(i)] ein Diffeomorphismus, also ist

$$\begin{array}{lcl} U_r^{\widetilde{M}}(q_0) & \longrightarrow & E^{m+1} \\ q & \longmapsto & \sum_{i=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_i\rangle\, \mathfrak{e}_i \end{array}$$

eine differenzierbare Abbildung. Da für alle $q \in U_r^{\widetilde{M}}(q_0)$ gilt

$$\begin{aligned} &\delta^2_{0_{E^{m+1}}}\Big(\sum_{i=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_i\rangle\, \mathfrak{e}_i\Big) \\ &\quad \overset{1.2.4}{=} \sum_{i,j=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_i\rangle \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_j\rangle \underbrace{\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j\rangle}_{=\langle e_i, e_j\rangle} \\ &\quad = \|\widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\|^2 \overset{[7,\text{Ü}117\text{a})]}{=} \delta^2_{q_0}(q), \end{aligned}$$

genügt es offenbar, zum Nachweis von (4.32) zu zeigen:

a) u ist injektiv
b) u ist surjektiv
c) $\forall_{x\in U_r(0_{E^{m+1}})}\, u^{-1}(x) = \exp_{q_0}\left(\sum_{i=1}^m \langle x, \mathfrak{e}_i\rangle e_i\right)$
d) u^{-1} ist differenzierbar
Zu a):
Seien $q, \widetilde{q} \in U_r^{\widetilde{M}}(q_0)$ mit $u(q) = u(\widetilde{q})$. Da $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{m+1}$ eine Basis von E^{m+1} ist, folgt aus der Definition von u für alle $i \in \{1, \ldots, m+1\}$

$$\langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_i\rangle = \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(\widetilde{q})\,,\, e_i\rangle,$$

also

$$\begin{aligned}
\widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q) &= \sum_{i=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(q)\,,\, e_i\rangle\, e_i \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(\widetilde{q})\,,\, e_i\rangle\, e_i \\
&= \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(\widetilde{q}) \\
\Longrightarrow \qquad q = \widetilde{q}.
\end{aligned}$$

Zu b) und c):
Sei $\mathfrak{x} \in U_r(0_{E^{m+1}})$ beliebig, also $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m+1}\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_i\rangle \mathfrak{e}_i$ und $r \geq \|\mathfrak{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{m+1}\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_i\rangle^2$. Wir setzen $x := \sum_{i=1}^{m}\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_i\rangle e_i \in T_{q_0}\widetilde{M}$. Dann gilt

$$\delta_{q_0}^2(\exp_{q_0}(x)) \overset{[7,\text{Ü}117\text{a})]}{=} \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_i\rangle^2 \leq r^2,$$

d.h. $\exp_{q_0}(x) \in U_r^{\widetilde{M}}(q_0)$ und

$$u(\exp_{q_0}(x)) \overset{\text{Def. u}}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \langle x, e_j\rangle \mathfrak{e}_j = \sum_{i,j=1}^{m+1} \big\langle \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_i\rangle e_i, e_j\big\rangle \mathfrak{e}_j = \sum_{i=1}^{m+1} \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_i\rangle \mathfrak{e}_i = \mathfrak{x}.$$

Damit sind b) und (wegen a) auch) c) klar.
d) folgt sofort aus c)]
Sei $\widetilde{q}_0 \in M_C^{m+1}$ beliebig und $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_m$ eine Orthonormalbasis von $T_{\widetilde{q}_0}M_C^{m+1}$. Völlig analog zu (4.32) sieht man ein, daß

$$\begin{array}{llcl}
\widetilde{u}: & U_r^{M_C^{m+1}}(\widetilde{q}_0) & \longrightarrow & U_r(0_{E^{m+1}}) \\
& \widetilde{q} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{m+1} \langle \widehat{\exp_{\widetilde{q}_0}|_{U_r^{T_{\widetilde{q}_0}M_C^{m+1}}(0_{\widetilde{q}_0})}}^{-1}(\widetilde{q})\,,\, \widetilde{e}_i\rangle\, \mathfrak{e}_i \\
& \exp_{\widetilde{q}_0}\left(\sum_{i=1}^m \langle x, \mathfrak{e}_i\rangle \widetilde{e}_i\right) & \longleftarrow & x
\end{array} \tag{4.33}$$

ein Diffeomorphismus mit $\delta_{0_{E^{m+1}}} \circ \widetilde{u} = \delta_{\widetilde{q}_0}$ ist.

(iii) 1.) ist bewiesen, wenn gilt

$$\widetilde{u}^{-1} \circ u : U_r^{\widetilde{M}}(q_0) \longrightarrow U_r^{M_C^{m+1}}(\widetilde{q}_0) \text{ ist eine Isometrie.}$$

Zum Nachweis hiervon genügt es offenbar zu zeigen:

$$\forall_{q \in U_r^{\widetilde{M}}(q_0)} \forall_{\mathfrak{v} \in T_q\widetilde{M}} \, \|\widetilde{u}_*^{-1} u_* \mathfrak{v}\| = \|\mathfrak{v}\| \tag{4.34}$$

Beweis hiervon:
Seien $q \in U_r^{\widetilde{M}}(q_0)$ und $\mathfrak{v} \in T_q\widetilde{M}$ beliebig.
1. Fall: $q = q_0$
Wir setzen $\widetilde{\mathfrak{v}} = \sum_{i=1}^{m+1} \langle \mathfrak{v}, e_i\rangle \widetilde{e}_i \in T_{\widetilde{q}_0} M_C^{m+1}$. Dann gilt nach (4.32) und (4.33)

$$\begin{aligned} u_*\mathfrak{v} \quad &= \quad \sum_{i=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle \left(\widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}\right)^{-1}_{*q_0} \mathfrak{v} \, , \, e_i\rangle} \, \mathfrak{e}_i \overset{[7, 9.4(\mathrm{iv})]}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \underbrace{\langle \mathfrak{v}, e_i\rangle}_{=\langle \widetilde{\mathfrak{v}}, \widetilde{e}_i\rangle} \mathfrak{e}_i \\ &\overset{[7, 9.4(\mathrm{iv})]}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle \left(\widehat{\exp_{\widetilde{q}_0}|_{U_r^{T_{\widetilde{q}_0}M_C^{m+1}}(0_{\widetilde{q}_0})}}\right)^{-1}_{*\widetilde{q}_0} \widetilde{\mathfrak{v}} \, , \, \widetilde{e}_i\rangle} \, \mathfrak{e}_i = \widetilde{u}_* \widetilde{\mathfrak{v}}, \end{aligned}$$

also $\|\widetilde{u}_*^{-1} u_* \mathfrak{v}\|^2 = \|\widetilde{\mathfrak{v}}\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle \widetilde{\mathfrak{v}}, \widetilde{e}_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathfrak{v}, e_i\rangle^2 = \|\mathfrak{v}\|^2$.
2. Fall: $q \neq q_0$
Für $\mathfrak{v} = 0_q$ ist (4.34) klar. Daher können wir im folgenden o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{v} \neq 0$ ist.
Sei $l := \delta_{q_0}(q) > 0$. Wegen der Voraussetzung an r, Satz 3.2 und [7, 10.24(i), 10.14(ii)] existiert eine eindeutig bestimmte nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma\colon [0, r] \to \widetilde{M}$ mit $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(l) = q$ und $\gamma(r) \in S_r(q_0)$. Nach Voraussetzung gilt $f(M) = S_r(q_0)$, also existiert $p \in M$ mit $f(p) = \gamma(r)$. Seien ferner $\mathfrak{v}^T$ bzw. $\mathfrak{v}^\perp$ die zu $\dot\gamma(l)$ tangentiale bzw. normale Komponente von $\mathfrak{v}$ und $Y \in J_\gamma$ das nach 3.1 und [7, 10.2] eindeutig bestimmte Jacobifeld längs γ mit $Y_0 = 0$ und $Y_l = \mathfrak{v}^\perp$. Dann gilt also $\langle Y_0, \dot\gamma(0)\rangle = \langle Y_r, \dot\gamma(r)\rangle = 0$ und aus [7, Ü 92e)] folgt

$$\langle Y, \dot\gamma\rangle = 0. \tag{4.35}$$

Bezeichne $i : S_r(q_0) \to \widetilde{M}$ die Inklusion der m-dimensionalen regulären riemannschen Untermannigfaltigkeit $S_r(q_0)$ von $\widetilde{M}$ (vgl. Satz 3.5(i), dort $M = \widetilde{M}$). Aus Dimensionsgründen gilt dann wegen $f(M) = S_r(q_0)$ auch $f_{*p}T_pM = i_{*f(p)}S_r(q_0)$. Da nach Satz 3.5(ii) (3.3), (3.4) (dort $M = \widetilde{M}$ und $q = f(p)$) außerdem $\dot\gamma(r) \perp i_{*f(p)}S_r(q_0)$ gilt, folgt aus $\widetilde{m} = m + 1$:

$$T_{f(p)}\widetilde{M} \text{ ist die orthogonale Summe von } f_*T_pM \text{ und } \mathbb{R}\dot\gamma(r). \tag{4.36}$$

Wegen (4.35) existiert dann $v \in T_pM$ mit $Y_r = f_*v$. Wir behaupten:

$$\widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{Y, \dot\gamma\})|_{]0,r]} = C \tag{4.37}$$

[Hierzu:
Bezeichne I die Indexform von γ. Wegen Satz 3.9(3.8) genügt es zu zeigen

$$Y^{\perp} = 0 \quad \text{oder} \quad I(Y,Y) = (\frac{1}{r} - \mathrm{k}_C(r))\langle f_* v, \dot\gamma(r)\rangle^2 + \|v\|^2 \mathrm{k}_C(r).$$

Im Falle $Y^{\perp} \overset{(4.35)}{=} Y \neq 0$ folgt aus $Y_0 = 0$, Satz 3.1 und [7, 10.2]: $0 \neq Y_r = f_* v$, also $v \neq 0$.
Wegen $f(M) = S_r(q_0)$ ist $\Psi = \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2 \circ f$ konstant vom Wert $\frac{1}{2} r^2$. Daher ergibt sich aus Satz 3.9(3.7) (dort $M = \widetilde{M}$, $l = r$ und $v = f_* v$) und Satz 3.5(3.3) (dort $M = \widetilde{M}$ und $q = f(p)$)

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{hess}\Psi(v,v) \overset{\text{Lemma 4.3(4.2)}}{=} \widetilde{\operatorname{hess}}\,\psi(f_* v, f_* v) + \langle \widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v,v)\rangle \\ &= rI(Y,Y) + r\langle \dot\gamma(r), \alpha(v,v)\rangle\,, \end{aligned}$$

also folgt aus Satz 3.9(3.8) (dort $M = \widetilde{M}$, $l = r$ und $v = f_* v$), $v \neq 0$, der Voraussetzung an r und Lemma 3.6

$$-\langle \dot\gamma(r), \alpha(v,v)\rangle = I(Y,Y) \geq (\frac{1}{r} - \mathrm{k}_C(r)) \underbrace{\langle f_* v, \dot\gamma(r)\rangle}_{=\langle Y_r, \dot\gamma(r)\rangle \overset{(4.35)}{=} 0} + \|v\|^2 \mathrm{k}_C(r) > 0.$$

Da γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, existiert wegen (4.36) $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$ und $\xi_p = \dot\gamma(r)$, also gilt nach der letzten Ungleichung

$$I(Y,Y) = -\langle \dot\gamma(r), \alpha(v,v)\rangle = -h_\xi(v,v) > 0.$$

Hieraus folgt, da wegen $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$ (nach Voraussetzung von (iii)) und (ii) $A_{\xi_p} = \mathrm{k}_C(r)\,\mathrm{id}_{T_pM}$ oder $A_{\xi_p} = -\mathrm{k}_C(r)\,\mathrm{id}_{T_pM}$ gilt

$$I(Y,Y) = -h_\xi(v,v) = \mathrm{k}_C(r)\|v\|^2 = (\frac{1}{r} - \mathrm{k}_C(r)) \underbrace{\langle f_* v, \dot\gamma(r)\rangle^2}_{=\langle Y_r, \dot\gamma(r)\rangle^2 \overset{(4.35)}{=} 0} + \|v\|^2 \mathrm{k}_C(r),$$

und (4.37) ist bewiesen.]
Beachte, daß beim Nachweis von (4.37) $q \in U_r^{\widetilde{M}} \setminus \{q_0\}$ und $\mathfrak{v} \in T_q\widetilde{M} \setminus \{0_q\}$ beliebig waren. Daher haben wir gezeigt

$$\forall_{t \in]0,r]}\, \forall_{\mathfrak{w} \in T_{\gamma(t)}\widetilde{M}} \big(\mathfrak{w}^{\perp} \neq 0 \Longrightarrow \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{\mathfrak{w}^{\perp}, \dot\gamma(t)\}) = C\big). \tag{4.38}$$

Seien $E_1, \ldots, E_{m+1} \in \mathfrak{V}_\gamma$ parallel längs γ mit $\forall_{i \in \{1,\ldots,m+1\}}\, E_i|_0 = e_i$, d.h. (da $e_1, \ldots, e_{m+1}$ eine Orthonormalbasis von $T_{q_0}\widetilde{M}$ ist) $E_1, \ldots, E_{m+1}$ ist ein orthonormales paralleles Basisfeld längs γ. Dann gilt

$$Y = \mathrm{s}_C|_{[0,r]} \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0\rangle E_i. \tag{4.39}$$

[Hierzu:
Analog zum Nachweis von Formel (2) im Beweis von [7, 7.31] sieht man ein, daß aus (4.38) für alle $X \in \mathfrak{V}_\gamma$ folgt

$$k_{\dot\gamma}(X) := \langle \mathrm{R}_{\widetilde{M}}(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle = C\,(\langle X,X\rangle - \langle X,\dot\gamma\rangle^2).$$

Für alle $X \in \mathfrak{V}_\gamma$ setzen wir nun $\widehat{R}(X,\dot\gamma)\dot\gamma := C\,X^\perp$. Da für alle solchen X gilt

$$\widehat{k}(X) := \langle \widehat{R}(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle = C\,(\langle X,X\rangle - \langle X,\dot\gamma\rangle^2) = k_{\dot\gamma}(X),$$

folgt aus der Tatsache, daß $\mathrm{R}_{\widetilde{M}}(\ldots,\dot\gamma)\dot\gamma$ nach Formel (9) im Beweis von [7, 7.30] durch $k_{\dot\gamma}$ eindeutig bestimmt ist:

$$\mathrm{R}_{\widetilde{M}}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = C\,Y^\perp \overset{(4.35)}{=} C\,Y$$

Weil Y ein Jacobifeld längs γ ist, d.h. $Y'' + \mathrm{R}_{\widetilde{M}}(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$, bedeutet dies

$$\sum_{i=1}^{m+1}\big(\langle Y,E_i\rangle'' + C\langle Y,E_i\rangle\big)E_i = 0,$$

also $\forall_{i\in\{1,\ldots,m+1\}}\ \langle Y,E_i\rangle'' + C\langle Y,E_i\rangle = 0$. Hieraus und aus $\langle \underbrace{Y_0}_{=0}, E_i|_0\rangle = 0$, $\langle Y,E_i\rangle'(0) = \langle Y_0', E_i|_0\rangle$ sowie der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (vgl. z.B. [6, 9.11, 9.12]) und Definition 1.3.1 folgt

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,m+1\}}\ \langle Y,E_i\rangle = \langle Y_0', E_i|_0\rangle\,\mathrm{s}_C|_{[0,r]},$$

also gilt $Y = \sum_{i=1}^{m+1}\langle Y,E_i\rangle E_i = \mathrm{s}_C|_{[0,r]}\sum_{i=1}^{m+1}\langle Y_0',E_i|_0\rangle E_i$, d.h. (4.39) ist gezeigt.]
Nach (4.32), (4.33) gilt $\delta_{\widetilde{q}_0}(\widetilde{u}^{-1}(u(\gamma(l)))) = l < r$. Daher existiert nach Satz 3.2 und [7, 10.24(i), 10,14(ii)] eine eindeutig bestimmte nach der Bogenlänge parametrisiere Geodätische $\widetilde\gamma\colon [0,r]\to M_C^{m+1}$ mit $\widetilde\gamma(0) = \widetilde{q}_0$ und $\widetilde\gamma(l) = \widetilde{u}^{-1}(u(\gamma(l)))$. Dann gilt:

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,m+1\}}\ \langle\dot\gamma(0), e_i\rangle = \langle\dot{\widetilde\gamma}(0), \widetilde{e}_i\rangle \tag{4.40}$$

[Denn wegen $u(\gamma(l)) = \widetilde{u}(\widetilde\gamma(l))$ folgt zunächst aus (4.32) und (4.33)

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m+1}\langle \widehat{\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}(\gamma(l))\,,\ e_i\rangle\,\mathfrak{e}_i\\ &\quad = \sum_{i=1}^{m+1}\langle \widehat{\exp_{\widetilde{q}_0}|_{U_r^{T_{\widetilde{q}_0}M_C^{m+1}}(0_{\widetilde{q}_0})}}^{-1}(\widetilde\gamma(l))\,,\ \widetilde{e}_i\rangle\,\mathfrak{e}_i.\end{aligned}$$

Da γ und $\widetilde\gamma$ Geodätische mit $\gamma(0) = q_0$ und $\widetilde\gamma(0) = \widetilde{q}_0$ sind, gilt $\gamma(l) = \exp_{q_0}(l\dot\gamma(0))$ und $\widetilde\gamma(l) = \exp_{\widetilde{q}_0}(l\dot{\widetilde\gamma}(0))$, also ergibt sich sodann

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m+1}\langle l\dot\gamma(0)\,,\ e_i\rangle\,\mathfrak{e}_i = \sum_{i=1}^{m+1}\langle l\dot{\widetilde\gamma}(0)\,,\ \widetilde{e}_i\rangle\,\mathfrak{e}_i,$$

und weil $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{m+1}$ eine Basis von E^{m+1} ist, gilt (4.40).]
Seien $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_{m+1} \in \mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}}$ parallel längs $\widetilde{\gamma}$ mit $\forall_{i\in\{1,\ldots,m+1\}}\ \widetilde{E}_i|_0 = \widetilde{e}_i$, d.h. (da $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{m+1}$ eine Orthonormalbasis von $T_{\widetilde{q}_0} M_C^{m+1}$ ist) $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_{m+1}$ ist ein orthonormales paralleles Basisfeld längs $\widetilde{\gamma}$. Wir definieren

$$\widetilde{Y} := \mathrm{s}_C|_{[0,r]} \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0 \rangle \widetilde{E}_i \in \mathfrak{V}_{\widetilde{\gamma}}$$

und zeigen, daß gilt

$$\langle \widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle = 0. \tag{4.41}$$

[Denn aus der Parallelität der $\widetilde{E}_i$ längs $\widetilde{\gamma}$ und der Tatsache, daß $\widetilde{\gamma}$ eine Geodätische ist, folgt für alle $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ $D \cdot \langle \widetilde{E}_i, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle = 0$, also ist $\langle \widetilde{E}_i, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle$ konstant vom Wert $\langle \widetilde{E}_i|_0, \dot{\widetilde{\gamma}}(0) \rangle = \langle \widetilde{e}_i, \dot{\widetilde{\gamma}}(0) \rangle \overset{(4.40)}{=} \langle e_i, \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle E_i|_0, \dot{\gamma}(0) \rangle$. Daher folgt aus der Definition von $\widetilde{Y}$

$$\langle \widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}} \rangle \;=\; \mathrm{s}_C|_{[0,r]} \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0 \rangle \langle E_i|_0, \dot{\gamma}(0) \rangle \overset{(4.39)}{=} \langle Y_0, \dot{\gamma}(0) \rangle \overset{(4.35)}{=} 0. \quad]$$

Aus der Definition von $\widetilde{Y}$ sowie der Parallelität der $\widetilde{E}_i$ längs $\widetilde{\gamma}$ folgt zum einen

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_0' &= \mathrm{s}_C'(0) \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0 \rangle \widetilde{E}_i|_0 = \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', e_i \rangle \widetilde{e}_i \\ \widetilde{Y}'' &= \mathrm{s}_C''|_{[0,r]} \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0 \rangle \widetilde{E}_i \end{aligned} \tag{4.42}$$

und zum anderen aus [7, 7.31] sowie der Tatsache, daß M_C^{m+1} von konstanter Krümmung C ist

$$\mathrm{R}_{M_C^{m+1}}(\widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}} = C\,\widetilde{Y}^{\perp} \overset{(4.41)}{=} C\,\widetilde{Y} = C\,\mathrm{s}_C|_{[0,r]} \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0 \rangle \widetilde{E}_i,$$

also gilt $\widetilde{Y}'' + \mathrm{R}_{M_C^{m+1}}(\widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}})\dot{\widetilde{\gamma}} = \underbrace{\left(\mathrm{s}_C''|_{[0,r]} + C\mathrm{s}_C|_{[0,r]}\right)}_{\overset{\text{Def. 1.3.1}}{=} 0} \sum_{i=1}^{m+1} \langle Y_0', E_i|_0 \rangle \widetilde{E}_i = 0$, und $\widetilde{Y}$ ist ein Jacobifeld längs $\widetilde{\gamma}$. Da auch Y ein Jacobifeld (längs γ) ist, ergibt sich aus [7, 9.12]

$$\forall_{t\in[0,r]} \quad Y_t = \exp_{q_0 * t\dot{\gamma}(0)}(t I_{t\dot{\gamma}(0)} Y_0') \quad \widetilde{Y}_t = \exp_{\widetilde{q}_0 * t\dot{\widetilde{\gamma}}(0)}(t \widetilde{I}_{t\dot{\widetilde{\gamma}}(0)} \widetilde{Y}_0'), \tag{4.43}$$

wobei $I_{t\dot{\gamma}(0)} : T_{q_0} M \to T_{t\dot{\gamma}(0)} T_{q_0} M$ und $\widetilde{I}_{t\dot{\widetilde{\gamma}}(0)} : T_{\widetilde{q}_0} M_C^{m+1} \to T_{t\dot{\widetilde{\gamma}}(0)} T_{q_0} M_C^{m+1}$ wie in [7, 9.12] seien.

Wir zeigen als nächstes:

$$\begin{aligned} u_* Y_l &= \widetilde{u}_* \widetilde{Y}_l && (4.44)\\ u_* \dot{\gamma}(l) &= \widetilde{u}_* \dot{\widetilde{\gamma}}(l) && (4.45) \end{aligned}$$

[Zu (4.44):

$$\begin{aligned} u_* Y_l &\overset{(4.32)}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle {\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}_{*\gamma(l)} Y_l \, , \, e_j\rangle} \, \mathfrak{e}_j \\ &\overset{(4.43)}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle {\exp_{q_0}|_{U_r^{T_{q_0}\widetilde{M}}(0_{q_0})}}^{-1}_{*\gamma(l)} \exp_{q_0 * l\dot{\gamma}(0)}(l I_{t\dot{\gamma}(0)} Y_0') \, , \, e_j\rangle} \, \mathfrak{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle l I_{l\dot{\gamma}(0)} Y_0'} \, , \, e_j\rangle \, \mathfrak{e}_j \overset{[7,2.12]}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \langle l Y_0' \, , \, e_j\rangle \, \mathfrak{e}_j \\ &\overset{(4.42)}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \langle l \widetilde{Y}_0', \widetilde{e}_j\rangle \mathfrak{e}_j \overset{[7,2.12]}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle l \widetilde{I}_{l\dot{\widetilde{\gamma}}(0)} \widetilde{Y}_0'} \, , \, \widetilde{e}_j\rangle \, \mathfrak{e}_j \\ &\overset{(4.43)}{=} \sum_{j=1}^{m+1} \overrightarrow{\langle {\exp_{\widetilde{q}_0}|_{U_r^{T_{\widetilde{q}_0} M_C^{m+1}}(0_{\widetilde{q}_0})}}^{-1}_{*\widetilde{\gamma}(l)} \widetilde{Y}_l \, , \, \widetilde{e}_j\rangle} \, \mathfrak{e}_j \\ &\overset{(4.33)}{=} \widetilde{u}_* \widetilde{Y}_l \end{aligned}$$

Zu (4.45):
Da γ und $\widetilde{\gamma}$ Geodätische mit $\gamma(0) = q_0$ und $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{q}_0$ sind, gilt für alle $t \in [0, r]$ $\gamma(t) = \exp_{q_0}(t\dot{\gamma}(0))$ und $\widetilde{\gamma}(t) = \exp_{\widetilde{q}_0}(t\dot{\widetilde{\gamma}}(0))$. Daher folgt aus (4.32) und (4.33)

$$u \circ \gamma(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \langle t\dot{\gamma}(0), e_i\rangle \mathfrak{e}_i \qquad \widetilde{u} \circ \widetilde{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \langle t\dot{\widetilde{\gamma}}(0), \widetilde{e}_i\rangle \mathfrak{e}_i$$

$$\overrightarrow{u_* \dot{\gamma}(l)} = (u \circ \gamma)'(l) = \sum_{i=1}^{m+1} \langle \dot{\gamma}(0), e_i\rangle \mathfrak{e}_i \overset{(4.40)}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \langle \dot{\widetilde{\gamma}}(0), \widetilde{e}_i\rangle \mathfrak{e}_i = (\widetilde{u} \circ \widetilde{\gamma})'(l) = \overrightarrow{\widetilde{u}_* \dot{\widetilde{\gamma}}(l)},$$

und (4.45) ist gezeigt.]
Jetzt folgt

$$\begin{aligned} u_* \mathfrak{v} &= u_* \mathfrak{v}^T + u_* \mathfrak{v}^\perp = \langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle u_* \dot{\gamma}(l) + u_* Y_l \overset{(4.44),(4.45)}{=} \langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle \widetilde{u}_* \dot{\widetilde{\gamma}}(l) + \widetilde{u}_* \widetilde{Y}_l \\ &= \widetilde{u}_*(\langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle \dot{\widetilde{\gamma}}(l) + \widetilde{Y}_l), \end{aligned}$$

also gilt $\widetilde{u}_*^{-1} u_* \mathfrak{v} = \langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle \dot{\widetilde{\gamma}}(l) + \widetilde{Y}_l$. Hieraus, der Tatsache, daß γ und $\widetilde{\gamma}$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind, und $\langle Y, \dot{\gamma}\rangle = \langle \widetilde{Y}, \dot{\widetilde{\gamma}}\rangle = 0$ (nach (4.35),(4.41)) ergibt sich

$$\|\widetilde{u}_*^{-1} u_* \mathfrak{v}\|^2 = \Big\langle \langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle \dot{\widetilde{\gamma}}(l), \langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle \dot{\widetilde{\gamma}}(l) \Big\rangle + 2\Big\langle \langle \mathfrak{v}, \dot{\gamma}(l)\rangle \dot{\widetilde{\gamma}}(l), \widetilde{Y}_l \Big\rangle + \langle \widetilde{Y}_l, \widetilde{Y}_l\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \Big\langle \langle \mathfrak{v}, \dot\gamma(l)\rangle \dot\gamma(l), \langle \mathfrak{v}, \dot\gamma(l)\rangle \dot\gamma(l)\Big\rangle + 2\Big\langle \langle \mathfrak{v}, \dot\gamma(l)\rangle \dot\gamma(l), Y_l\Big\rangle + \langle \widetilde{Y}_l, \widetilde{Y}_l\rangle \\
&\overset{\text{Def.}\,\widetilde{\mathrm{Y}}}{=} \langle \mathfrak{v}^T, \mathfrak{v}^T\rangle + 2\langle \mathfrak{v}^T, Y_l\rangle + \mathrm{s}_C^2(l)\sum_{i=1}^{m+1}\langle Y_0', E_i|_0\rangle^2 \\
&\overset{(4.39)}{=} \langle \mathfrak{v}^T, \mathfrak{v}^T\rangle + 2\langle \mathfrak{v}^T, Y_l\rangle + \langle Y_l, Y_l\rangle \\
&\overset{\text{Def.}\,\mathrm{Y}}{=} \langle \mathfrak{v}^T, \mathfrak{v}^T\rangle + 2\langle \mathfrak{v}^T, \mathfrak{v}^\perp\rangle + \langle \mathfrak{v}^\perp, \mathfrak{v}^\perp\rangle = \|\mathfrak{v}\|^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (4.34) und (iii) 1.) ist gezeigt.
Zu (iii) 2.):
Aus (iii) 1.) folgt, daß $U_r(q_0)$ von konstanter Krümmung C ist. Zu zeigen bleibt

$$\forall_{q\in S_r(q_0)} \quad \forall_{\widetilde\sigma\,2-\text{dim. UVR von}\,\mathrm{T_q}\widetilde{\mathrm{M}}} \quad \widetilde{\mathrm{K}}(\widetilde\sigma) = C \tag{4.46}$$

Beweis hiervon:
Seien $q, \widetilde\sigma$ wie in (4.46), $\gamma\colon\ [0,r] \to \widetilde{M}$ die (wegen der Voraussetzung an r, Satz 3.2 und [7, 10.24(i)] existierende) nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\gamma(0) = q_0$ und $\gamma(r) = q$ und $E_1, \ldots, E_{m+1}$ ein orthonormales differenzierbares Basisfeld längs γ mit $\mathrm{Spann}\{E_1|_r, E_2|_r\} = \widetilde\sigma$. Dann ergibt sich aus Stetigkeitsgründen

$$\widetilde{\mathrm{K}}(\widetilde\sigma) \;=\; \langle \mathrm{R}_{\widetilde M}(E_1|_r, E_2|_r)E_2|_r, E_1|_r\rangle = \lim_{t\to r-} \underbrace{\langle \mathrm{R}_{\widetilde M}(E_1|_t, E_2|_t)E_2|_t, E_1|_t\rangle}_{=C} = C,$$

d.h. (4.46) gilt.
Zu (iii) 3.):
Seien $p \in M$, σ ein zwei-dimensionaler Untervektorraum von T_pM, v, w eine Orthonormalbasis von σ und $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$. Aus $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$ (nach Voraussetzung von (iii)) und (ii) folgt

$$A_{\xi_p} = \mathrm{k}_C(r)\, id_{T_pM} \quad \text{oder} \quad A_{\xi_p} = -\mathrm{k}_C(r)\, id_{T_pM}.$$

Daher liefert die Gauß-Gleichung [7, 8.6(2) incl. Zusatz b)] wegen $f(p) \in S_r(q_0)$ und 2.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\sigma) &= \widetilde{\mathrm{K}}(f_*\sigma) + \langle A_{\xi_p}(v), v\rangle\langle A_{\xi_p}(w), w\rangle - \langle A_{\xi_p}(v), w\rangle^2 \\
&= C + \mathrm{k}_C(r)^2\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \mathrm{k}_C(r)^2\langle v, w\rangle^2 \\
&\overset{v,w\ \text{ONB}}{=} C + \mathrm{k}_C(r)^2.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von p und σ folgt, daß die Krümmung von M konstant vom Wert $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2} = C + \mathrm{k}_C(r)^2$ ist, und der Satz ist vollständig bewiesen. □

Satz 4.9. *Seien $\widetilde m \geq 3$, $C \in \mathbb{R}$ und $\widetilde M$ eine vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, für deren Schnittkrümmungsfunktion $\widetilde{\mathrm{K}} \leq C$*

gelte. Ferner sei $q_0 \in \widetilde{M}$ *und* $r \in]0, r_{q_0}]$. *Im Falle* $C > 0$ *fordern wir zusätzlich* $r < \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$. *Nach Satz 3.5 (i) ist dann* $S_r(q_0)$ *eine* $(\widetilde{m} - 1)$*-dimensionale einfach-zusammenhängende kompakte reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von* $\widetilde{M}$, *und somit ist* $i : S_r(q_0) \hookrightarrow \widetilde{M}$ *eine isometrische Einbettung. Es gilt:*

Falls für den Betrag der mittleren Krümmung von i gilt $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$ *(nach Satz 4.8(i) z.B. erfüllt wenn* $\widetilde{M}$ *von konstanter Krümmung C ist), so ist* $S_r(q_0)$ *isometrisch zur Sphäre vom Radius* $\mathrm{s}_C(r)$ *um* $0_{E^{m+1}}$ *in* E^{m+1}, *und* $S_r(q_0)$ *ist von konstanter Krümmung* $\mathrm{k}_C(r)^2 + C = \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$.

Beweis: Nach 4.8(iii) (dort $f = i$) ist $S_r(q_0)$ wegen $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$ von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$. Da $S_r(q_0)$ einfach-zusammenhängend und als kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit vollständig ist (vgl. Satz 2.3.3), folgt aus [7, 12.20], daß $S_r(q_0)$ isometrisch zum Standard-Raum konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$ ist, und das ist die Sphäre vom Radius $\mathrm{s}_C(r)$ um $0_{E^{m+1}}$ in E^{m+1}. $\square$

Kapitel 5

Kriterien für kompakte Hyperflächen, sphärisch zu sein

Wir betrachten in diesem Kapitel stets eine isometrische Immersion einer m-dimensionalen in eine $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und untersuchen, wann sie gemäß der folgenden Definition sphärisch ist:

Definition 5.1 (sphärische Immersionen)**.** Sei $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion einer m-dimensionalen in eine $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit.

f heißt sphärisch (mit Radius $r \in \mathbb{R}_+$), falls $f(M)$ eine m-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\widetilde{M}$ ist und $f(M)$ isometrisch zu $S_r(0_{E^{m+1}})(\subset E^{m+1})$ ist.

Bemerkung.

1.) Ist $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ eine sphärische isometrische Immersion wie in der Definition, so ist f – aufgefaßt als Abbildung $M \to f(M)$ – nach [7, 2.23] eine isometrische Immersion zwischen gleichdimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeiten, also eine lokale Isometrie. Aus der Isometrie von $f(M)$ zu $S_r(0_{E^{m+1}})$ und der Tatsache, daß $S_r(0_{E^{m+1}})$ von konstanter Krümmung $\frac{1}{r^2}$ ist, ergibt sich daher, daß auch M von konstanter Krümmung $\frac{1}{r^2}$ ist.

2.) Im Spezialfall, daß M eine m-dimensionale reguläre riemannsche Untermanngfaltigkeit der $(m+1)$-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$ und f gleich der Inklusionsabbildung $i\colon\ M \hookrightarrow \widetilde{M}$ ist, so gilt wegen $i(M) = M$:

$$i \text{ ist sphärisch (mit Radius } r) \iff M \text{ ist isometrisch zu } S_r(0_{E^{m+1}})$$

Beispiel 5.2 (Abstands-Sphären der Standard-Räume sind sphärisch)**.** *Seien* $C \in \mathbb{R}$ *und* $r \in \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C \leq 0 \end{array} \right\}$. *Dann ist für jedes* $q_0 \in M_C^{m+1}$ *die* *(nach Satz 3.5) reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit $S_r(q_0)$ von M_C^{m+1} sphärisch (mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$, falls $C \leq 0$ oder $C > 0$ und $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}]$ bzw. mit Radius $\mathrm{s}_C(\frac{\pi}{\sqrt{C}} - r)$, falls $C > 0$ und $r \in]\frac{\pi}{2\sqrt{C}}, \frac{\pi}{\sqrt{C}}[$).*

Beweis: Laut Generalvoraussetzung gilt $m \geq 2$, also $m + 1 \geq 3$. Daher folgt die Behauptung in den Fällen $C \leq 0$ bzw. $C > 0$ und $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[$ sofort aus Satz 4.9. Hieraus ergibt sich die Behauptung im Falle $C > 0$ und $r \in]\frac{\pi}{2\sqrt{C}}, \frac{\pi}{\sqrt{C}}[$ durch Übergang von q_0 zum antipodischen Punkt $-q_0$ wegen $S_r(q_0) = S_{\frac{\pi}{\sqrt{C}}-r}(-q_0)$ und $\frac{\pi}{\sqrt{C}} - r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[$. Zu zeigen bleibt die Behauptung im Falle $C > 0$ und $r = \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$.
Beweis hiervon:
Nach Satz 3.5(i) ist $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)$ eine einfach-zusammenhängende kompakte und damit nach Satz 2.3.3 vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit. Wegen [7, 12.20] bleibt zu zeigen, daß $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)$ von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(\frac{\pi}{2\sqrt{C}})^2} = C$ ist:
Seien $i : S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0) \hookrightarrow M_C^{m+1}$ und $\iota\colon\ M_C^{m+1} \hookrightarrow E^{m+2}$ die isometrischen Einbettungen. Es genügt zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{p \in S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)} \quad \forall_{\tilde{\xi} \in \mathfrak{V}_i(p), \|\tilde{\xi}\|=1} \quad A_{\tilde{\xi}_p} = 0_{End\left(T_p S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)\right)}, \tag{5.1}$$

denn dann folgt zunächst $\forall_{p \in S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)} \forall_{v,w \in T_p M} \alpha_p(v, w) = 0$ und sodann aus der Gauß-Gleichnung [7, 8.6(2)], daß $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)$ ebenso wie M_C^{m+1} von konstanter Krümmung C ist.
Zu (5.1):
Sei $Y \in \mathfrak{V}_{E^{m+2}}(E^{m+2})$ mit $\overrightarrow{Y} = \iota(q_0)$. Dann gilt:

$$\xi := \sqrt{C}\ {}^{T_\iota}Y \circ i \in \mathfrak{V}_i^{\perp}(S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)) \quad \text{und} \quad \|\xi\| = 1 \tag{5.2}$$

[Denn ist $\delta_{q_0}\colon\ M_C^{m+1} \to \mathbb{R}$ die Abstandsfunktion von q_0 in M_C^{m+1}, so gilt für jeden differenzierbaren Weg $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)$

$$\begin{array}{rcl} & \delta_{q_0} \circ i \circ \gamma & = \dfrac{\pi}{2\sqrt{C}} \\ \overset{\text{Bsp. 1.2.4}}{\Longrightarrow} & \frac{1}{\sqrt{C}} \arccos(C \langle \iota \circ i \circ \gamma, \iota(q_0) \rangle) & = \dfrac{\pi}{2\sqrt{C}} \\ \Longrightarrow & \langle \iota \circ i \circ \gamma, \iota(q_0) \rangle & = 0 \\ \Longrightarrow & \langle \iota \circ i \circ \gamma, \iota(q_0) \rangle'(0) = \langle \overrightarrow{\iota_* i_* \dot{\gamma}(0)}, \overrightarrow{Y_{\iota \circ i \circ \gamma(0)}} \rangle & = 0 \\ \Longrightarrow & \langle i_* \dot{\gamma}(0),\ {}^{T_\iota}Y \circ i(\gamma(0)) \rangle & = 0, \end{array} \tag{5.3}$$

also ist ${}^{T_\iota}Y \circ i$ ein Normalenfeld längs i. Außerdem existiert nach Satz 1.2.1 ein Einheitsnormalenfeld $N \in \mathfrak{V}_\iota(M_C^{m+1})$ mit $\overrightarrow{N} = \sqrt{C}\,\iota$. Daher gilt

$$\langle {}^{T_\iota}Y, {}^{T_\iota}Y \rangle \;=\; \langle Y^{T_\iota}, Y^{T_\iota} \rangle = \big\langle Y \circ \iota - \langle Y \circ \iota, N \rangle N, Y \circ \iota - \langle Y \circ \iota, N \rangle N \big\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle Y \circ \iota, Y \circ \iota \rangle - 2\langle Y \circ \iota, N \rangle^2 + \langle Y \circ \iota, N \rangle^2 \underbrace{\langle N, N \rangle}_{=1} \\
&= \langle \overrightarrow{Y \circ \iota}, \overrightarrow{Y \circ \iota} \rangle - \langle \overrightarrow{Y \circ \iota}, \overrightarrow{N} \rangle^2 = \langle \iota(q_0), \iota(q_0) \rangle - \langle \iota(q_0), \sqrt{C}\, \iota \rangle^2,
\end{aligned}
$$

und aus (5.3) folgt

$$
\| {}^{T_\iota}Y \circ i \|^2 \;=\; \langle {}^{T_\iota}Y \circ i, {}^{T_\iota}Y \circ i \rangle = \langle \iota(q_0), \iota(q_0) \rangle \overset{q_0 \in M_C^{m+1}}{=} \frac{1}{C}.
$$

Somit ist ξ wie in (5.2) ein Einheitsnormalenfeld längs i.]
Bezeichne $\widetilde{\nabla}$ bzw. $\widetilde{\widetilde{\nabla}}$ die Levi-Civita kovariante Ableitung von M_C^{m+1} bzw. E^{m+2}. Dann ergibt sich für alle $p \in S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)$ und $v \in T_p S_{\frac{\pi}{2\sqrt{C}}}(q_0)$

$$
\begin{aligned}
i_* A_{\xi_p}(v) &= -(\widetilde{\nabla}_v \xi)^{T_i} = -\sqrt{C}\big(\widetilde{\nabla}_v({}^{T_\iota}Y \circ i)\big)^{T_i} \\
\widetilde{\nabla}_v({}^{T_\iota}Y \circ i) &= \widetilde{\nabla}_{i_* v}\, {}^{T_\iota}Y \\
\overrightarrow{\iota_* \widetilde{\nabla}_{i_* v}\, {}^{T_\iota}Y} &= \overrightarrow{(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{i_* v} \iota_*\, {}^{T_\iota}Y)^{T_\iota}} = \overrightarrow{(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{i_* v} Y^{T_\iota})^{T_\iota}} \\
\overrightarrow{(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{i_* v} Y^{T_\iota})} &= i_* v \cdot \overrightarrow{Y^{T_\iota}} = i_* v \cdot \big(\overrightarrow{Y \circ \iota} - \langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{Y \circ \iota} \rangle \overrightarrow{N}\big) \\
&= i_* v \cdot \big(\iota(q_0) - \langle \sqrt{C}\iota, \iota(q_0) \rangle \sqrt{C}\iota\big) \\
&= -C\Big(v \cdot \big(\underbrace{\langle \iota \circ i, \iota(q_0) \rangle}_{\overset{(5.3)}{=} 0}\, \iota \circ i\big)\Big) = 0,
\end{aligned}
$$

also folgt $\overrightarrow{(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{i_* v} Y^{T_\iota})^{T_\iota}} = 0$, $\widetilde{\nabla}_{i_* v}\, {}^{T_\iota}Y = 0$ und $A_{\xi_p}(v) = 0$. Wegen $\dim \perp_p (i) = 1$ und der Beliebigkeit von p und v ist daher (5.1) gezeigt. $\square$

5.3 Kriterien für die Skalarkrümmung

In [5] beweisen Fontenele und Silva, daß eine kompakte und zusammenhängende Hyperfläche im $(m+1)$-dimensionalen Standard-Raum konstanter Krümmung Null bereits eine Sphäre vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$ ist, falls sie im zugehörigen abgeschlossenen Ball vom Radius r enthalten und ihre Skalarkrümmung stets kleiner oder gleich Eins ist (siehe 5.3.6). Die Autoren folgern dieses Resultat aus einem stärkeren (siehe 5.3.2), das sie auch nur für den Standard-Raum konstanter Krümmung Null formulieren und beweisen. Fontenele und Silva erwähnen jedoch, daß sich ihr Ergebnis durch einige Abänderungen auf die Standard-Räume konstanter Krümmung kleiner oder gleich Null ausweiten läßt. Dieses ist der Inhalt des folgenden Hauptsatzes:

Hauptsatz 5.3.1. *Seien $C \in \mathbb{R}$ mit $C \leq 0$, M eine kompakte und zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to M_C^{m+1}$*

eine isometrische Immersion. Ferner seien $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$, $\rho_{q_0}^2\colon M \to \mathbb{R}$ *das nach 1.3.2 Bemerkung 2.) auf ganz* M *definierte Quadrat der Stützfunktion von* f *bzgl.* q_0, $\mathrm{H}_2\colon M \to \mathbb{R}$ *die nach 1.1.2 Bemerkung 3.) auf ganz* M *definierte zweite mittlere Krümmung von* f*, und es gelte*

$$\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}_2 \leq (\mathrm{s}_C')^2 \circ \delta_{q_0} \circ f. \tag{5.4}$$

Dann existiert $r \in \mathbb{R}_+$ *mit* $f(M) = S_r(q_0)$, *(d.h. nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1:* f *ist sphärisch mit Radius* $\mathrm{s}_C(r)$*, und* M *ist von konstanter Krümmung* $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$*).*

Ist f *darüber hinaus injektiv, so ist* M *isometrisch zur Sphäre vom Radius* $\mathrm{s}_C(r)$ *um* $0_{E^{m+1}}$ *in* E^{m+1}*.*

Bemerkung. Im Falle $f(M) = S_r(q_0)$ gilt für alle $p \in M$ und $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$ nach Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\rho_{q_0}(p)^2\mathrm{H}_2(p) &\overset{\text{Def.}}{=} \langle X_p, \xi_p\rangle^2 \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i\neq j} \varphi_i^\xi(p)\varphi_j^\xi(p) \\
&\overset{\text{Satz 4.5(ii),(iii)}}{=} \|X_p\|^2 \mathrm{k}_C(r)^2 \overset{\text{Bsp. 1.3.3(iii)}}{=} \mathrm{s}_C(r)^2\mathrm{k}_C(r)^2 \\
&\overset{\text{Def. 3.6}}{=} \left(\mathrm{s}_C'(r)\right)^2 = (\mathrm{s}_C')^2 \circ \delta_{q_0}(f(p)).
\end{aligned}$$

Daher ist (5.4) auch eine notwendige Bedingung für $f(M) = S_r(q_0)$.

Beweis: Wegen $q_0 \notin f(M)$ gilt $\delta_{q_0}(f(M)) \subset \mathbb{R}_+$, also folgt aus der Kompaktheit von M und der Stetigkeit von $\delta_{q_0} \circ f\colon M \to \mathbb{R}$ die Existenz eines minimalen $r \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta_{q_0} \circ f \leq r$, d.h.

$$f(M) \subset B_r(q_0) \setminus \{q_0\} \quad \text{und} \quad f(M) \cap S_r(q_0) \neq \emptyset. \tag{5.5}$$

Wir haben zu zeigen, daß sogar $f(M) = S_r(q_0)$ gilt und gehen folgendermaßen vor:
Nach Lemma 4.4 ist das Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0 $X \in \mathfrak{V}_f(M)$ definiert und somit ist auch

$$\begin{aligned}
\Phi\colon \quad M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto \|X_p\|^2
\end{aligned}$$

eine differenzierbare Abbildung, für die wegen (5.5) und Beispiel 1.3.3(iii) gilt

$$\Phi(M) \subset]0, \mathrm{s}_C(r)^2]. \tag{5.6}$$

Wir setzen

$$S := \{p \in M | \Phi(p) = \mathrm{s}_C(r)^2\} \overset{\text{Bsp. 1.3.3(iii)}}{=} \{p \in M | \delta_{q_0}(f(p)) = r\} \overset{(5.5)}{\neq} \emptyset \tag{5.7}$$

sowie für alle $\varepsilon \in]0, \mathrm{s}_C(r)^2]$

$$
\begin{aligned}
R_\varepsilon &:= \overline{\Phi}^1([\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon, \mathrm{s}_C(r)^2]) && (5.8)\\
S_\varepsilon &:= \overline{\Phi}^1(\{\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon\}) && (5.9)
\end{aligned}
$$

und wollen nachweisen, daß gilt

$$\forall_{\varepsilon \in]0,\mathrm{s}_C(r)^2]} \quad S_\varepsilon = \emptyset, \tag{5.10}$$

d.h. wegen (5.6) und (5.7) $f(M) \subset S_r(q_0)$. Hieraus ergibt sich die Behauptung folgendermaßen: Da $S_r(q_0)$ nach Satz 3.5(i) eine m-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von M_C^{m+1} ist, ist nach [7, 2.23] $f\colon\, M \to S_r(q_0)$ eine isometrische Immersion zwischen gleichdimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeiten, insbesondere ein lokaler Homöomorphismus. Folglich ist $f(M)$ offen in $S_r(q_0)$. Wegen der Kompaktheit von M ist $f(M)$ auch eine kompakte und damit abgeschlossene Teilmenge von $S_r(q_0)$. Aus dem Zusammenhang von $S_r(q_0)$ (vgl. Satz 3.5(i)) folgt daher $f(M) = S_r(q_0)$, d.h. nach Beispiel 5.2 $f(M)$ ist isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$. Ist f sogar injektiv, so ist $f\colon\, M \to f(M)$ sogar eine Isometrie, also ist auch M isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$.
Zum Nachweis des Hauptsatzes bleibt daher (5.10) zu zeigen:
Angenommen es existiert $\varepsilon_0 \in]0, \mathrm{s}_C(r)^2]$ mit $S_{\varepsilon_0} \neq \emptyset$. Aus dem Zusammenhang von M, der Stetigkeit von Φ und (5.7) folgt dann

$$\forall_{\widetilde{\varepsilon} \in]0,\varepsilon_0]}\, S_{\widetilde{\varepsilon}} \neq \emptyset. \tag{5.11}$$

Für jedes $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$ seien $\varphi_1^\xi, \dots, \varphi_m^\xi$ die (stetigen) Hauptkrümmungen von f bzgl. ξ, H_ξ die mittlere Krümmung von f bzgl. ξ und $\rho_{q_0,\xi}$ die Stützfunktion von f bzgl. q_0 in Richtung ξ. Dann ist offenbar für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ und jedes $p \in M$

$$\zeta_j^\xi(p) := -(m-1)\mathrm{s}_C^{'}(\delta_{q_0}(f(p))) + m\rho_{q_0,\xi}(p)\mathrm{H}_\xi(p) - \rho_{q_0,\xi}(p)\varphi_j^\xi(p) \tag{5.12}$$

unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$. Daher hat man auf ganz M wohldefinierte stetige Funktionen

$$\zeta_1, \dots, \zeta_m\colon\, M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wir werden zunächst nachweisen, daß eine offene Menge $V_0 \subset M$ mit $S \subset V_0$ existiert derart, daß gilt

$$
\begin{aligned}
&\forall_{p \in V_0}\, \forall_{\sigma\, 2-\mathrm{dim.\,UVR\,von\,T_pM}}\, \mathrm{K}(\sigma) > 0 && (5.13)\\
&\forall_{j \in \{1,\dots,m\}}\, \forall_{p \in V_0}\, \zeta_j(p) < 0 && (5.14)\\
&\exists_{\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_0]}\, \forall_{\varepsilon \in]0,\varepsilon_1]}\, V_0 \supset R_\varepsilon, && (5.15)
\end{aligned}
$$

wobei K die Schnittkrümmungsfunktion von M bezeichne.
Sodann begründen wir die Existenz von $\varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1]$ derart, daß R_{ε_2} ein regulärer Bereich in M ist und daß gilt

$$\int_{R_{\varepsilon_2}} \operatorname{div}\big((m-1)(\mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f)\,{}^T X - m\rho_{q_0,\xi}\mathrm{H}_\xi\,{}^T X + \rho_{q_0,\xi} A_\xi({}^T X)\big) < 0 \tag{5.16}$$

(beachte, daß für jedes $p \in M$ $\rho_{q_0,\xi}(p)\mathrm{H}_\xi(p)\,{}^T X_p + \rho_{q_0,\xi}(p) A_\xi({}^T X_p)$ unabhängig von der Wahl von $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$ ist, und daher obiges Integral wohldefiniert ist).
Aus Satz 1.3.6(iii) und (5.16) folgt dann weiter

$$\begin{aligned} \int_{R_{\varepsilon_2}} \operatorname{Ric}({}^T X, {}^T X) &< 2(m-1)C \int_{R_{\varepsilon_2}} \|{}^T X\|^2 \\ &\quad + m(m-1) \int_{R_{\varepsilon_2}} (\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}_2 - (\mathrm{s}_C')^2 \circ \delta_{q_0} \circ f), \end{aligned}$$

d.h. wegen $C \leq 0$ nach Voraussetzung und (5.4)

$$\int_{R_{\varepsilon_2}} \operatorname{Ric}({}^T X, {}^T X) < 0,$$

im Widerspruch zu

$$\int_{R_{\varepsilon_2}} \operatorname{Ric}({}^T X, {}^T X) \geq 0. \tag{5.17}$$

[Zu (5.17):
Sei $p \in R_{\varepsilon_2}$ beliebig. Entweder ist ${}^T X_p = 0$ und somit auch $\operatorname{Ric}({}^T X_p, {}^T X_p) = 0$. Oder es ist ${}^T X_p \neq 0$ und es existiert eine Orthonormalbasis $w_1, w_2, \ldots, w_m$ von $T_p M$ mit $\frac{{}^T X_p}{\|{}^T X_p\|} = w_1$. Wegen $\varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1]$, (5.15) und (5.13) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}({}^T X_p, {}^T X_p) &= \operatorname{Spur}\big(\mathrm{R}(\ldots, {}^T X_p)\,{}^T X_p\big) = \sum_{j=1}^m \langle \mathrm{R}(w_j, {}^T X_p)\,{}^T X_p, w_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|{}^T X_p\|^2} \sum_{j=2}^m \mathrm{K}(\operatorname{Spann}\{w_j, {}^T X_p\}) > 0. \end{aligned}$$

In jedem Fall gilt daher $\operatorname{Ric}({}^T X_p, {}^T X_p) \geq 0$, und (5.17) ist gezeigt.]
Zum Nachweis von (5.10) und damit des Hauptsatzes bleibt daher zu zeigen, daß unter der Annahme, daß (5.11) gilt, auch (5.13) - (5.16) gelten.
Beweis von (5.13) und (5.14):
Wir zeigen zunächst, daß die beiden Aussagen für $p \in S$ richtig sind, nämlich daß gilt

$$\forall_{p \in S} \forall_{\sigma\ 2-\mathrm{dim.\ UVR\ von\ T_pM}} \mathrm{K}(\sigma) = \tfrac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2} > 0 \tag{5.18}$$

$$\forall_{j\in\{1,\dots,m\}}\,\forall_{p\in S}\,\zeta_j(p)<0. \tag{5.19}$$

[Zu (5.18) und (5.19):
Seien $p\in S$ und $\xi\in\mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\|=1$ beliebig. Aus $f(M)\subset B_r(q_0)\setminus\{q_0\}$ (nach (5.5)), $\delta_{q_0}(f(p))=r$ (nach (5.7)) und Satz 4.5(ii) folgt

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,m\}}\,|\varphi_i^\xi(p)|\geq \mathrm{k}_C(r)\;\wedge\;\varphi_i^\xi(p)\varphi_j^\xi(p)>0 \tag{5.20}$$
$$X_p,\xi_p \text{ sind linear abhängig} \tag{5.21}$$
$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}}\,\rho_{q_0,\xi}(p)\,\varphi_i^\xi(p)\leq 0, \tag{5.22}$$

also gilt

$$|\rho_{q_0,\xi}(p)| \overset{\text{Def. 1.3.2}}{=} |\langle X_p,\xi_p\rangle| \overset{(5.21)}{=} \|X_p\|\|\xi_p\| = \sqrt{\Phi(p)} \overset{(5.7)}{=} \mathrm{s}_C(r) \tag{5.23}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathrm{k}_C(r)^2 &\overset{\text{Def. 3.6}}{=} \frac{(\mathrm{s}_C'(r))^2}{\mathrm{s}_C(r)^2} = \frac{\left(\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p)))\right)^2}{\rho_{q_0,\xi}(p)^2} \overset{(5.4)}{\geq} \mathrm{H}_2(p)\\ &\overset{\text{Def. 1.1.2}}{=} \frac{2}{m(m-1)}\sum_{i,j=1,\,i<j}^{m}\varphi_i^\xi(p)\varphi_j^\xi(p) \overset{(5.20)}{\geq} \mathrm{k}_C(r)^2.\end{aligned}$$

Folglich muß in den letzten beiden Zeilen stets Gleichheit gelten, insbesondere in (5.20), also gilt

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,m\}}\,|\varphi_i^\xi(p)|=\mathrm{k}_C(r)\wedge\varphi_i^\xi(p)\varphi_j^\xi(p)>0 \tag{5.24}$$
$$A_{\xi_p}=\mathrm{k}_C(r)\,\mathrm{id}_{T_pM}\vee A_{\xi_p}=-\mathrm{k}_C(r)\,\mathrm{id}_{T_pM}.$$

Hieraus und aus der Gauß-Gleichung [7, 8.6(2) incl. Zusätze] folgt dann für je zwei zueinander orthonormale $v,w\in T_pM$

$$\mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v,w\}) = C+\mathrm{k}_C(r)^2 \overset{\text{Lemma 3.6}}{=} \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}>0,$$

und (5.18) ist gezeigt.
Wegen $C\leq 0$ sind $\mathrm{s}_C(r)$ und $\mathrm{k}_C(r)$ echt größer als Null. Daher folgt aus (5.22), (5.23) und (5.24)

$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}}\,\rho_{q_0,\xi}(p)\varphi_i^\xi(p)=-\mathrm{s}_C(r)\mathrm{k}_C(r)\overset{\text{Def. 3.6}}{=}-\mathrm{s}_C'(r)<0.$$

Hieraus, der Definition von ζ_j (vgl. (5.12)) und $\delta_{q_0}(f(p))=r$ ergibt sich für jedes $j\in\{1,\dots,m\}$

$$\zeta_j(p) = -(m-1)\mathrm{s}_C'(r)+m\rho_{q_0,\xi}(p)\frac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^\xi(p)\Big)-\rho_{q_0,\xi}(p)\varphi_j^\xi(p)$$

$$= \quad -(m-1)s_C'(r) - ms_C'(r) + s_C'(r) = -2(m-1)s_C'(r) < 0,$$

d.h. wir haben auch (5.19) gezeigt.]
Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist $\zeta_j : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Daher existieren zu jedem $p \in S$ wegen (5.19) $V_{1p}^{(1)}, \ldots, V_{1p}^{(m)} \in \mathrm{Umg}(p, M)$ mit $\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}}\, \zeta_i|_{V_{1p}^{(i)}} < 0$. Dann ist auch $V_{1p} := \bigcap_{i=1}^m V_{1p}^{(i)}$ eine Umgebung von p in M mit

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}}\, \zeta_i|_{V_{1p}} \quad < \quad 0. \tag{5.25}$$

Ferner existiert zu jedem $p \in S$ eine Umgebung V_{2p} von p in M mit

$$\forall_{q\in V_{2p}} \quad \forall_{\sigma\, 2-\mathrm{dim.\,UVR\,von\,T_qM}} \quad \mathrm{K}(\sigma) > 0. \tag{5.26}$$

Vor dem Nachweis von (5.26) zeigen wir zunächst, wie hieraus (5.13) und (5.14) folgen.
Für jedes $p \in S$ setzen wir $V_p := V_{1p} \cap V_{2p} \in \mathrm{Umg}(p, M)$. Aus der Stetigkeit von Φ und (5.7) folgt, daß S eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten (hausdorffschen) Mannigfaltigkeit M ist, also selbst kompakt ist. Da $\bigcup_{p\in S} V_p$ eine Überdeckung von S durch offene Mengen von M ist, folgt die Existenz von endlich vielen $p_1, \ldots, p_l \in S$ mit $\bigcup_{i=1}^l V_{p_i} \supset S$. Dann ist $V_0 := \bigcup_{i=1}^l V_{p_i}$ eine in M offene Menge mit $S \subset V_0$, die wegen (5.25), (5.26) die in (5.13), (5.14) geforderten Eigenschaften hat.
Zum Nachweis von (5.13), (5.14) bleibt daher zu zeigen, daß zu jedem $p \in S$ eine Umgebung V_{2p} von p in M existiert derart, daß (5.26) gilt.
Beweis hiervon:
Sei also $p \in S$ beliebig. Angenommen

$$\forall_{U\in\mathrm{Umg}(p,M)}\, \exists_{q\in U}\, \exists_{\sigma\, 2-\mathrm{dim.\,UVR\,von\,T_qM}}\, \mathrm{K}(\sigma) \leq 0. \tag{5.27}$$

Da (5.27) insbesondere für $U = U_{\frac{1}{n}}(p)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$ gilt, existieren eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit $\lim_{n\to\infty} q_n = p$ und zueinander orthonormale $v_n, w_n \in T_{q_n}M$ derart, daß gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{K}(\underbrace{\mathrm{Spann}\{v_n, w_n\}}_{:=\sigma_n}) \leq 0. \tag{5.28}$$

Sei $E_1, \ldots, E_m$ ein auf einer Umgebung U_0 von p in M definiertes stetiges orthonormales m-Beinfeld. O.B.d.A. gelte $\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, q_n \in U_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_+$

$$v_n = \sum_{k=1}^m \langle v_n, E_k|_{q_n}\rangle E_k|_{q_n} \qquad w_n = \sum_{k=1}^m \langle w_n, E_k|_{q_n}\rangle E_k|_{q_n}$$

und folglich

$$1 \quad = \quad \langle v_n, v_n\rangle = \sum_{k,l=1}^m \langle v_n, E_k|_{q_n}\rangle\langle v_n, E_l|_{q_n}\rangle\delta_{kl} = \sum_{k=1}^m \langle v_n, E_k|_{q_n}\rangle^2$$

$$1 = \langle w_n, w_n\rangle = \sum_{k,l=1}^{m} \langle w_n, E_k|_{q_n}\rangle\langle w_n, E_l|_{q_n}\rangle\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\langle w_n, E_k|_{q_n}\rangle^2.$$

Daher wird durch

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+} \quad a_n := \big((\langle v_n, E_1|_{q_n}\rangle, \ldots, \langle v_n, E_m|_{q_n}\rangle)\,,\,(\langle w_n, E_1|_{q_n}\rangle, \ldots, \langle w_n, E_m|_{q_n}\rangle)\big)$$

eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ in der kompakten – und damit folgenkompakten – Menge $S_1(0_{E^m}) \times S_1(0_{E^m})$ definiert, die demnach eine konvergente Teilfolge besitzt. O.B.d.A. konvergiere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ selbst gegen $\big((\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\,,\,(\beta_1, \ldots, \beta_m)\big)$ in $S_1(0_{E^m}) \times S_1(0_{E^m})$.
Seien $v := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k E_k|_p$, $w := \sum_{k=1}^{m} \beta_k E_k|_p \in T_pM$. Da v_n, w_n jeweils zueinander orthonormal sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle v, v\rangle &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\langle v_n, E_k|_{q_n}\rangle^2 = \lim_{n\to\infty}\langle v_n, v_n\rangle = 1\\
\langle w, w\rangle &= \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\langle w_n, E_k|_{q_n}\rangle^2 = \lim_{n\to\infty}\langle w_n, w_n\rangle = 1\\
\langle v, w\rangle &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\beta_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\langle v_n, E_k|_{q_n}\rangle\langle w_n, E_k|_{q_n}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle v_n, w_n\rangle = 0,
\end{aligned}$$

also bilden v und w eine Orthonormalbasis des zwei-dimensionalen Untervektorraumes $\sigma := \mathrm{Spann}\{v, w\}$ von T_pM. Aus der Stetigkeit von $\langle \mathrm{R}(E_i, E_j)E_k, E_l\rangle$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\sigma) &= \langle \mathrm{R}(v, w)w, v\rangle\\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \langle v, E_i|_p\rangle\langle w, E_j|_p\rangle\langle w, E_k|_p\rangle\langle v, E_l|_p\rangle\langle \mathrm{R}(E_i|_p, E_j|_p)E_k|_p, E_l|_p\rangle\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} \langle v_n, E_i|_{q_n}\rangle\langle w_n, E_j|_{q_n}\rangle\langle w_n, E_k|_{q_n}\rangle\langle v_n, E_l|_{q_n}\rangle\\
&\qquad\qquad \langle \mathrm{R}(E_i|_{q_n}, E_j|_{q_n})E_k|_{q_n}, E_l|_{q_n}\rangle\\
&= \lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{R}(v_n, w_n)w_n, v_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\mathrm{K}(\sigma_n) \overset{(5.28)}{\leq} 0,
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu (5.18) und $p \in S$. Somit ist (5.27) widerlegt, d.h. (5.26) gilt, und wir haben (5.13) und (5.14) vollständig bewiesen.
Beweis von (5.15):
Nach Definition von R_ε in (5.8) gilt offenbar für alle $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ und alle $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$ $R_{\varepsilon_1} \supset R_\varepsilon$. Daher genügt es zum Nachweis von (5.15) zu zeigen, daß gilt

$$\exists_{\varepsilon_1\in]0,\varepsilon_0]}\, V_0 \supset R_{\varepsilon_1} = \overline{\Phi}^1([\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon_1, \mathrm{s}_C(r)^2]),$$

d.h. wir haben zu zeigen

$$\exists_{\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_0]} \forall_{p \in M} \quad (\Phi(p) \in [\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon_1, \mathrm{s}_C(r)^2] \Rightarrow p \in V_0) \quad .$$

Angenommen es gilt $\forall_{\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_0]} \exists_{p \in M} \Phi(p) \in [\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon_1, \mathrm{s}_C(r)^2] \wedge p \notin V_0$. Dann existieren $n_0 \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{n_0} \in]0, \varepsilon_0]$ und eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ in M mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} \quad \Phi(p_n) \in [\mathrm{s}_C(r)^2 - \tfrac{1}{n}, \mathrm{s}_C(r)^2] \wedge p_n \notin V_0.$$

Da M kompakt und damit folgenkompakt ist, besitzt $(p_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ eine in M konvergente Teilfolge. O.B.d.A. konvergiere $(p_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ selbst gegen $p \in M$.
Dann folgt einerseits aus der Stetigkeit von Φ, daß auch $(\Phi(p_n))_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ gegen $\Phi(p)$ konvergiert und wegen $\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} \Phi(p_n) \in [\mathrm{s}_C(r)^2 - \frac{1}{n}, \mathrm{s}_C(r)^2]$ gilt $\Phi(p) = \mathrm{s}_C(r)^2$, d.h. nach (5.7) $p \in S$.
Andererseits ist V_0 in M offen, also ist $M \setminus V_0$ abgeschlossen in M, und aus $\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} p_n \in M \setminus V_0$ folgt auch $p \in M \setminus V_0$, d.h. $p \notin V_0 \stackrel{\text{s.o.}}{\supset} S$, Widerspruch!
Damit ist die Annahme falsch und (5.15) gezeigt.
Beweis von (5.16):
Wir bereiten den Beweis von (5.16) durch die folgende Aussage vor:

$$\begin{aligned} &\forall_{\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]} \quad \mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon \in \Phi(M) \text{ regulärer Wert von } \Phi \\ &\quad \Longrightarrow \quad R_\varepsilon \text{ ist regulärer Bereich in} M, \\ &\qquad\quad S_\varepsilon \text{ ist } (m-1) - \text{dimensionale reguläre riemannsche} \\ &\qquad\quad \text{Untermannigfaltigkeit von } M \text{ und es gilt } \partial R_\varepsilon = S_\varepsilon \end{aligned} \tag{5.29}$$

[Zu (5.29):
Sei $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ derart, daß $\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon \in \Phi(M)$ ein regulärer Wert von Φ ist. Dann folgt aus [7, 2.28] offenbar, daß S_ε eine $(m-1)$-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von M ist. Wir zeigen zunächst:

$$\partial R_\varepsilon = \overline{R_\varepsilon} \setminus \mathring{R}_\varepsilon = S_\varepsilon \tag{5.30}$$

Wegen (5.8), (5.9) und der Stetigkeit von Φ ist R_ε offenbar abgeschlossen, und es genügt zum Nachweis von (5.30) zu zeigen, daß gilt

$$\mathring{R}_\varepsilon \quad = \quad \overline{\Phi}^1(]\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon, \mathrm{s}_C(r)^2]). \tag{5.31}$$

Beweis hiervon:
1. Sei $p \in R_\varepsilon$ mit $\Phi(p) = \mathrm{s}_C^2(r)$.
Wegen der Stetigkeit von Φ existiert eine Umgebung V von p in M mit $\Phi(V) \subset]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r) + \varepsilon[$ und wegen (5.6) gilt sogar $\Phi(V) \subset]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)]$, d.h.

$$\mathrm{Umg}(p, M) \ni V \subset \overline{\Phi}^1(]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)]) \stackrel{\text{Def.}}{\subset} R_\varepsilon.$$

Daher ist p innerer Punkt von R_ε.
2.) Sei $p \in R_\varepsilon$ mit $\Phi(p) \in]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)[$.
Wegen der Stetigkeit von Φ existiert eine Umgebung V von p in M mit $\Phi(V) \subset]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)[$, also

$$\mathrm{Umg}(p, M) \ni V \subset \overline{\Phi}^1(]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)[) \overset{\text{Def.}}{\subset} R_\varepsilon.$$

Daher ist p innerer Punkt von R_ε.
Wegen 1.), 2) und der Definition von R_ε (in (5.8)) bleibt zum Nachweis von (5.31) zu zeigen, daß jedes $p \in M$ mit $\Phi(p) = \mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon$ kein innerer Punkt von R_ε ist:
Angenommen es existiert $p \in R_\varepsilon$ mit $\Phi(p) = \mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon$ und $p \in \overset{\circ}{R}_\varepsilon$, d.h. es existiert eine Umgebung V von p in M mit $V \subset R_\varepsilon \overset{\text{Def.}}{=} \overline{\Phi}^1([\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, S_C^2(r)])$, also

$$\Phi(V) \subset [\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)]. \tag{5.32}$$

Da $\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon$ nach Voraussetzung von (5.29) ein regulärer Wert von Φ ist, ist $\Phi_{*p}\colon T_pM \to T_{\Phi(p)}\mathbb{R}$ surjektiv. Daher existiert $v \in T_pM$ mit $\overrightarrow{\Phi_{*p}v} \neq 0$. Aus der Stetigkeit von $\overrightarrow{\Phi_*} = d\Phi\colon TM \to \mathbb{R}$ folgt die Existenz einer Umgebung $\widetilde{U}$ von (p, v) in TM mit

$$\forall_{(\widetilde{p},\widetilde{v})\in\widetilde{U}} \quad \overrightarrow{\Phi_{*\widetilde{p}}\widetilde{v}} \neq 0.$$

Hieraus folgt (weil die Fußpunktabbildung $\mathfrak{p}\colon TM \to M$ nach [7, Ü 27b)] eine Submersion und damit eine offene Abbildung ist), daß eine Umgebung U von p in M existiert derart, daß

$$\forall_{\widetilde{p}\in U} \quad \exists_{\widetilde{v}\in T_{\widetilde{p}}M} \quad \overrightarrow{\Phi_{*\widetilde{p}}\widetilde{v}} \neq 0,$$

d.h. $\forall_{\widetilde{p}\in U}\, \Phi_{*\widetilde{p}} : T_{\widetilde{p}}M \to T_{\Phi(\widetilde{p})}\mathbb{R}$ ist surjektiv. Somit ist $\Phi|_U : U \to \mathbb{R}$ eine Submersion. O.B.d.A. gelte $V \subset U$ (sonst von V zu $U \cap V \in \mathrm{Umg}(p, M)$ übergehen). Da $\Phi|_U$ als Submersion eine offene Abbildung ist, folgt dann aus (5.32)

$$\Phi|_U(V) = \Phi(V) \subset \overset{\circ}{\overbrace{[\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)]}} =]\mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon, \mathrm{s}_C^2(r)[,$$

im Widerspruch zu $V \in \mathrm{Umg}(p, M)$ und $\Phi(p) = \mathrm{s}_C^2(r) - \varepsilon$.
Daher gilt (5.31), und (5.30) ist gezeigt.
Zum Nachweis von (5.29) bleibt zu zeigen, daß R_ε ein regulärer Bereich in M ist. Wegen $\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon \in \Phi(M)$ (vgl. die Voraussetzung von (5.29)) ist $R_\varepsilon \neq \emptyset$, und nach [8, Integration auf Mannigfaltigkeiten 2.1(i)] ist zu zeigen, daß für alle $p \in M$ gilt

$$\text{entweder: } p \in \overset{\circ}{R}_\varepsilon$$

$$\text{oder: } p \in \widehat{M \setminus R_\varepsilon}^{\circ}$$
$$\text{oder: } \exists u \in \mathfrak{A}_M \text{ mit } p \in Gu \text{ und } u(Gu \cap R_\varepsilon) = u(Gu) \cap \{a \in \mathbb{R}^m | a_m \geq 0\}$$
$$\text{und } u(p) = 0$$

also, daß zu jedem $p \in M \setminus \big(\overset{\circ}{R_\varepsilon} \cup (\widehat{M \setminus R_\varepsilon}^{\circ})\big)$ eine Karte $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$ existiert derart, daß $u(Gu \cap R_\varepsilon) = u(Gu) \cap \{a \in \mathbb{R}^m | a_m \geq 0\}$ ist. Beweis hiervon: R_ε ist wegen der Stetigkeit von Φ und (5.8) abgeschlossen. Hieraus folgt zunächst, daß $M \setminus R_\varepsilon$ offen ist und sodann zusammen mit der de Morgan'schen Regel, daß gilt

$$M \setminus \big(\overset{\circ}{R_\varepsilon} \cup (\widehat{M \setminus R_\varepsilon}^{\circ}) \big) \;=\; (M \setminus \overset{\circ}{R_\varepsilon}) \cap R_\varepsilon \overset{\overset{\circ}{R_\varepsilon} \subset R_\varepsilon}{=} R_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{R_\varepsilon} \overset{(5.30)}{=} S_\varepsilon.$$

Da wir bereits gezeigt haben, daß S_ε eine $(m-1)$-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von M ist, existiert nach [7, 2.26] zu jedem $p \in S_\varepsilon$ eine Karte $u \in \mathfrak{A}_M$ mit $p \in Gu$ sowie Gu zusammenhängend und $Gu \cap S_\varepsilon = \{q \in Gu | u_m(q) = 0\}$, also gilt $u(Gu \cap S_\varepsilon) = u(Gu) \cap \{a \in \mathbb{R}^m | a_m = 0\}$. Wegen (5.30) folgt hieraus aus Stetigkeitsgründen, daß entweder $u(Gu \cap R_\varepsilon) = u(Gu) \cap \{a \in \mathbb{R}^m | a_m \geq 0\}$ oder $u(Gu \cap R_\varepsilon) = u(Gu) \cap \{a \in \mathbb{R}^m | a_m \leq 0\}$ gelten muß. Im ersten Fall ist man fertig, und im zweiten Fall leistet die Karte $\widetilde{u} \in \mathfrak{A}_M$, definiert durch $\forall_{q \in Gu} \widetilde{u}(q) := -u(q) \in \mathbb{R}^m$ das Gewünschte.
Damit haben wir (5.29) gezeigt.]
Aus dem Satz von Sard 2.2, der Differenzierbarkeit von $\Phi\colon M \to \mathbb{R}$ und (5.6) folgt, daß $\Phi(\{p \in M \,|\, \operatorname{Rang} \Phi_{*p} < 1\}) \subset]0, \mathrm{s}_C(r)^2]$ eine μ_1-Nullmenge ist. Wegen (5.9) und (5.11) existiert folglich

$$\varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1] \subset]0, \varepsilon_0] \subset]0, \mathrm{s}_C(r)^2] \tag{5.33}$$

derart, daß $\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon_2 \in \Phi(M)$ ein regulärer Wert von Φ ist. Wegen (5.29) ist R_{ε_2} ein regulärer Bereich in M und besitzt S_{ε_2} als Rand. Es bezeichne $i : S_{\varepsilon_2} \hookrightarrow R_{\varepsilon_2}$ die Inklusion. Wir zeigen als nächstes:

$$\Xi := \frac{(\operatorname{grad} \Phi) \circ i}{\|(\operatorname{grad} \Phi) \circ i\|} \text{ ist das innere Einheitsnormalenfeld längs } i. \tag{5.34}$$

[Zu (5.34):
Da $\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon_2$ ein regulärer Wert von Φ ist, gilt

$$\forall_{p \in S_{\varepsilon_2}} \operatorname{grad}_p \Phi \neq 0, \tag{5.35}$$

also ist Ξ wohldefiniert. Sei $\gamma\colon\,]-\beta, \beta[\to S_{\varepsilon_2} = \overline{\Phi}^1(\{\mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon_2\})$ ein differenzierbarer Weg. Dann gilt

$$\langle \operatorname{grad}_{i \circ \gamma(0)} \Phi, i_* \dot{\gamma}(0) \rangle \;=\; \dot{\widehat{(i \circ \gamma)}}(0) \cdot \Phi = (\underbrace{\Phi \circ i \circ \gamma}_{= \mathrm{s}_C(r)^2 - \varepsilon})'(0) = 0,$$

also ist $(\operatorname{grad}\Phi)\circ i$ ein Normalenfeld längs i und Ξ ein Einheitsnormalenfeld längs i. Um nachzuweisen, daß es sich hierbei um das innere Einheitsnormalenfeld längs i handelt, genügt es zu zeigen, daß $(\operatorname{grad}\Phi)\circ i$ ein inneres Normalenfeld ist. Dafür muß man nach [8, Integration auf Mannigfaltigkeiten 2.2d)] zeigen, daß zu jedem $p\in S_{\varepsilon_2}$ ein differenzierbarer Weg $\gamma\colon\ ]-\beta,\beta[\to M$ mit $\gamma(0)=p$ und $\dot\gamma(0)=\operatorname{grad}_p\Phi$ existiert derart, daß für alle $t\in]0,\beta[$ gilt $\gamma(t)\in\overset{\circ}{R}_{\varepsilon_2}$.
Beweis hiervon:
Sei $\gamma\colon\ J_p\to M$ die maximale Integralkurve von $\operatorname{grad}\Phi$ mit $\gamma(0)=p$. Dann gilt

$$0\overset{(5.35)}{<}\langle\operatorname{grad}_p\Phi,\operatorname{grad}_p\Phi\rangle=\langle\dot\gamma(0),\dot\gamma(0)\rangle,$$

also existiert aus Stetigkeitsgründen $\beta\in\mathbb{R}_+$ mit

$$0\ <\ \langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle|_{]-\beta,\beta[}=\langle(\operatorname{grad}\Phi)\circ\gamma,\dot\gamma\rangle|_{]-\beta,\beta[}=(\Phi\circ\gamma)'|_{]-\beta,\beta[}.$$

Daher ist $\Phi\circ\gamma$ auf $]-\beta,\beta[$ streng monoton wachsend, d.h.

$$\forall_{t\in]0,\beta[}\quad\Phi(\gamma(t))>\Phi(\gamma(0))=\Phi(p)\overset{p\in S_{\varepsilon_2}}{=}\mathrm{s}_C(r)^2-\varepsilon_2,$$

also gilt nach (5.6)

$$\forall_{t\in]0,\beta[}\gamma(t)\in\overset{-1}{\Phi}(]\mathrm{s}_C(r)^2-\varepsilon_2,\mathrm{s}_C(r)^2]).$$

Da $\mathrm{s}_C(r)^2-\varepsilon_2$ ein regulärer Wert von Φ ist, folgt aus (5.31) im Beweis von (5.29), daß

$$\overset{-1}{\Phi}(]\mathrm{s}_C(r)^2-\varepsilon_2,\mathrm{s}_C(r)^2])=\overset{\circ}{R}_{\varepsilon_2}$$

gilt, und wir haben $\forall_{t\in]0,\beta[}\,\gamma(t)\in\overset{\circ}{R}_{\varepsilon_2}$ und damit (5.34) gezeigt.]
Für jedes $p\in M$ und jedes $\xi\in\mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\|=1$ definieren wir

$$Y_p\ :=\ (m-1)\mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p)))\,{}^TX_p-m\rho_{q_0,\xi}(p)\mathrm{H}_\xi(p)\,{}^TX_p+\rho_{q_0,\xi}(p)A_\xi({}^TX_p).$$

Dann ist Y_p offenbar unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi\in\mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\|=1$, und daher stellt Y ein auf ganz M wohldefiniertes Vektorfeld dar. Nach (5.34) ist $-\Xi$ das äußere Einheitsnormalenfeld längs $i:S_{\varepsilon_2}\hookrightarrow R_{\varepsilon_2}$. Daher folgt aus dem Divergenz-Satz [8, Integration auf Mannigfaltigkeiten 2.15] und der Kompaktheit von M

$$\int_{R_{\varepsilon_2}}\operatorname{div}Y\ =\ \int_{S_{\varepsilon_2}}\langle Y\circ i,-\Xi\rangle.$$

Nach Definition von Y genügt es daher zum Nachweis von (5.16) zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{p\in S_{\varepsilon_2}}\quad\langle Y_p,-\Xi_p\rangle<0. \tag{5.36}$$

[Zu (5.36):
Sei $p \in S_{\varepsilon_2}$ beliebig. Dann gilt

$$\Xi_p \overset{(5.34)}{=} \frac{\mathrm{grad}_p \Phi}{\|\mathrm{grad}_p \Phi\|} \overset{\mathrm{Def.}\,\Phi}{=} \frac{\mathrm{grad}_p \|X\|^2}{\|\mathrm{grad}_p \|X\|^2\|} \overset{1.3.5(1.32)}{=} \frac{{}^T X_p}{\|{}^T X_p\|},$$

also folgt aus der Definition von Y, wobei $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$ beliebig sei, und wir zur Abkürzung $\theta_C := \mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f$ setzen

$$\begin{aligned}
&\langle Y_p, -\Xi_p \rangle \\
&\quad = \langle (m-1)\theta_C\, {}^T X - m\rho_{q_0,\xi} \mathrm{H}_\xi\, {}^T X + \rho_{q_0,\xi} A_\xi({}^T X), -\frac{{}^T X}{\|{}^T X\|} \rangle(p) \\
&\quad = \frac{1}{\|{}^T X\|}(-(m-1)\theta_C \|{}^T X\|^2 + m\rho_{q_0,\xi} \mathrm{H}_\xi \|{}^T X\|^2 - \rho_{q_0,\xi} \langle A_\xi({}^T X), {}^T X \rangle)(p).
\end{aligned}$$

Um (5.36) zu zeigen, genügt es daher nachzuweisen, daß gilt

$$(-(m-1)\theta_C \|{}^T X\|^2 + m\rho_{q_0,\xi} \mathrm{H}_\xi \|{}^T X\|^2 - \rho_{q_0,\xi} \langle A_\xi({}^T X), {}^T X \rangle)(p) < 0.$$

Beweis hiervon:
Seien $v_1, \ldots, v_m$ die Hauptkrümmungsrichtungen von f bzgl. ξ_p zu den Hauptkrümmungen $\varphi_1^\xi(p), \ldots, \varphi_m^\xi(p)$. Wegen (5.35) und Lemma 1.3.5(1.32) gilt dann $0 \neq \mathrm{grad}_p \Phi = 2\theta_C(p)^T X_p$, also folgt

$$\|{}^T X_p\|^2 = \sum_{j=1}^m \langle {}^T X_p, v_j \rangle^2 > 0. \tag{5.37}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\langle A_\xi({}^T X_p), {}^T X_p \rangle &= \sum_{j,k=1}^m \langle {}^T X_p, v_j \rangle \langle {}^T X_p, v_k \rangle \langle \underbrace{A_\xi(v_j)}_{=\varphi_j^\xi(p) v_j}, v_k \rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \varphi_j^\xi(p) \langle {}^T X_p, v_j \rangle^2,
\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\big(-(m-1)\theta_C \|{}^T X\|^2 + m\rho_{q_0,\xi} \mathrm{H}_\xi \|{}^T X\|^2 - \rho_{q_0,\xi} \langle A_\xi({}^T X), {}^T X \rangle\big)(p) \\
&\quad = \sum_{j=1}^m \big(-(m-1)\theta_C(p) + m\rho_{q_0,\xi}(p) \mathrm{H}_\xi(p) - \rho_{q_0,\xi}(p) \varphi_j^\xi(p)\big) \langle {}^T X_p, v_j \rangle^2 \\
&\quad \overset{(5.12)}{=} \sum_{j=1}^m \zeta_j(p) \langle {}^T X_p, v_j \rangle^2.
\end{aligned}$$

Wegen $p \in S_{\varepsilon_2}$, (5.33), (5.15) und (5.14) ist in der letzten Summe der erste Faktor eines jeden Summanden negativ. Der zweite Faktor eines jeden Summanden ist trivialerweise stets größer oder gleich Null, und wegen (5.37) ist der zweite Faktor in mindestens einem Summanden echt größer als Null. Damit ist die ganze Summe echt kleiner als Null, und dies benötigten wir zum Nachweis von (5.36) (und damit von (5.16)).]
Damit haben wir (5.13) - (5.16), unter der Annahme, daß (5.11) gilt, bewiesen. Hierauf hatten wir die Behauptung des Hauptsatzes zurückgeführt, welcher damit vollständig bewiesen ist. □

Bemerkung. Falls die Krümmung C von M_C^{m+1} größer als Null ist, kann man einen zum letzten Beweis analogen Beweis nicht führen, da auf Seite 88 für den Nachweis von $\int_{R_{\varepsilon_2}} \mathrm{Ric}({}^T X, {}^T X) < 0$ benötigt wurde, daß $C \leq 0$ gilt.

Der folgende Satz 5.3.2 ist im Falle $C = 0$ die genaue Formulierung von Theorem B in [5]. Im Falle $C = 0$ stimmt der Satz wegen $\mathrm{s}_0' = 1$ und $\mathfrak{s} = \mathrm{H}_2$ (nach Lemma 1.1.6 (i)) mit dem letzten Hauptsatz 5.3.1 überein.

Satz 5.3.2. *Seien $C \in \mathbb{R}$ mit $C \leq 0$, M eine kompakte und zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion. Ferner seien $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$, $\rho_{q_0}^2\colon M \to \mathbb{R}$ das nach 1.3.2 Bemerkung 2.) auf ganz M definierte Quadrat der Stützfunktion von f bzgl. q_0, und es gelte*

$$\rho_{q_0}^2 \mathfrak{s} \leq 1. \tag{5.38}$$

Dann existiert $r \in \mathbb{R}_+$ mit $f(M) = S_r(q_0)$, (d.h. nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1: f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$, und M ist von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$).

Ist f darüber hinaus injektiv, so ist M isometrisch zur Sphäre vom Radius $\mathrm{s}_C(r)$ um $0_{E^{m+1}}$ in E^{m+1}.

Bemerkung. Im Falle $f(M) = S_r(q_0)$ gilt für alle $p \in M$, jede Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_m$ von T_pM und jedes $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\begin{aligned}
\rho_{q_0,\xi}^2(p) &\overset{\text{Def. 1.3.2}}{=} \langle X_p, \xi_p \rangle^2 \overset{\text{Satz 4.5(ii)}}{=} \|X_p\|^2 \overset{\text{Bsp. 1.3.3(iii)}}{=} \mathrm{s}_C(r)^2 \\
\mathfrak{s}(p) &\overset{\text{Def. 1.1.1}}{=} \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{m} \mathrm{K}(\mathrm{Spann}\{v_i, v_j\}) \overset{\text{Bsp. 5.2}}{=} \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2},
\end{aligned}$$

wobei X das Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0 und K die Schnittkrümmung von M bezeichne. Daher folgt

$$\rho_{q_0}^2 \mathfrak{s} \;=\; 1,$$

d.h. (5.38) ist auch eine notwendige Bedingung für $f(M) = S_r(q_0)$.

Beweis: Wie unmittelbar vor der Formulierung des Satzes erwähnt, ist im Falle $C = 0$ nichts zu zeigen. Sei also $C < 0$. Wir haben zu zeigen, daß aus (5.38) folgt:

$$\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}_2 \leq (\mathrm{s}_C')^2 \circ \delta_{q_0} \circ f \tag{5.39}$$

Denn dann ergibt sich die Behauptung aus Hauptsatz 5.3.1.
Gelte also (5.38). Bezeichne $X \in \mathfrak{V}_f(M)$ das wegen $q_0 \notin f(M)$ und Lemma 4.4 existierende Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0. Zunächst folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Beispiel 1.3.3(iii) für alle $p \in M$ und jedes $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\rho_{q_0,\xi}^2(p) \quad = \quad \langle X_p, \xi_p \rangle^2 \leq \|X_p\|^2 = \mathrm{s}_C(\delta_{q_0}(f(p)))^2.$$

Aus Lemma 1.1.6(i), der letzten Ungleichung und $C < 0$ ergibt sich sodann

$$\rho_{q_0,\xi}^2(p)\mathrm{H}_2(p) \quad = \quad \rho_{q_0,\xi}^2(p)(\mathfrak{s}(p) - C) \overset{(5.38)}{\leq} 1 - C\rho_{q_0,\xi}^2(p) \leq 1 + |C|\mathrm{s}_C(\delta_{q_0}(f(p)))^2,$$

und da $C < 0$ ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}_+$ $\mathrm{s}_C(x) = \frac{\sinh(x\sqrt{|C|})}{\sqrt{|C|}}$ sowie

$$1 + |C|\mathrm{s}_C(x)^2 \quad = \quad 1 + |C|\frac{\sinh(x\sqrt{|C|})^2}{|C|} = \cosh(x\sqrt{|C|})^2 = \mathrm{s}_C'(x)^2,$$

also haben wir gezeigt

$$\rho_{q_0,\xi}^2(p)\mathrm{H}_2(p) \quad \leq \quad 1 + |C|\mathrm{s}_C(\delta_{q_0}(f(p)))^2 = \mathrm{s}_C'(\delta_{q_0}(f(p)))^2.$$

Hieraus und aus der Beliebigkeit von p folgt (5.39), und hierauf hatten wir den Satz zurückgeführt. □

Aus dem letzten Satz ergeben sich die drei folgenden Korollare:

Korollar 5.3.3.

(i) Ersetzt man in der Voraussetzung des Satzes (5.38) durch

$$\rho_{q_0}^2 \|\alpha\|^2 \quad \leq \quad m, \tag{5.40}$$

(wobei $\|\alpha\|$ wie in Definition 1.1.4 zu verstehen ist) so folgt ebenfalls die Behauptung des Satzes.

(ii) Im Falle $C < 0$ existiert keine isometrische Immersion $f\colon M \to M_C^{m+1}$ einer kompakten und zusammenhängenden m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M in M_C^{m+1} derart, daß für ein $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$ gilt

$$\rho_{q_0}^2 \|\alpha\|^2 \quad \leq \quad m.$$

Beweis:
Zu (i):
Wir haben zu zeigen, daß aus (5.40) bereits (5.38) folgt:

$$\rho_{q_0}^2 \mathfrak{s} \overset{\text{Lemma 1.1.6(i)}}{=} \rho_{q_0}^2 (C + \mathrm{H}_2) \overset{C \leq 0}{\leq} \rho_{q_0}^2 \mathrm{H}_2 \overset{\text{Lemma 1.1.5}}{\leq} \rho_{q_0}^2 \frac{\|\alpha\|^2}{m} \overset{(5.40)}{\leq} 1$$

Zu (ii):
Gäbe es eine isometrische Immersion $f\colon M \to M_C^{m+1}$ wie in (ii), so folgte aus (i) die Existenz von $r \in \mathbb{R}_+$ mit $f(M) = S_r(q_0)$, also gälte für alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\begin{aligned} \rho_{q_0}^2 \|\alpha\|^2 &\overset{\text{Def. 1.1.4(1.2)}}{=} \langle X, \xi \rangle^2 \sum_{i=1}^m (\varphi_i^\xi)^2 \overset{\text{Satz 4.5(ii),(iii)}}{=} \|X\|^2 m \,\mathrm{k}_C(r)^2 \\ &\overset{\text{Bsp. 1.3.3(iii)}}{=} m \,\mathrm{s}_C(r)^2 \mathrm{k}_C(r)^2 \overset{C \leq 0}{=} m \cosh^2(r\sqrt{|C|}) \overset{r>0}{>} m, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme $\rho_{q_0}^2 \|\alpha\|^2 \leq m$. □

Korollar 5.3.4.

(i) Ersetzt man in der Voraussetzung des Satzes (5.38) durch

$$\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}^2 \leq 1, \tag{5.41}$$

(beachte, daß H^2 nach Bemerkung 2.) zu 1.1.2 eine auf ganz M wohldefinierte Funktion ist) so folgt ebenfalls die Behauptung des Satzes.

(ii) Im Falle $C < 0$ existiert keine isometrische Immersion $f\colon M \to M_C^{m+1}$ einer kompakten und zusammenhängenden m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M in M_C^{m+1} derart, daß für ein $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$ gilt

$$\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}^2 \leq 1.$$

Beweis:
Zu (i):
Wir haben zu zeigen, daß aus (5.41) bereits (5.38) folgt:

$$\rho_{q_0}^2 \mathfrak{s} \overset{\text{Lemma 1.1.6(i)}}{=} \rho_{q_0}^2 (C + \mathrm{H}_2) \overset{C \leq 0}{\leq} \rho_{q_0}^2 \mathrm{H}_2 \overset{\text{Lemma 1.1.5}}{\leq} \rho_{q_0}^2 \mathrm{H}^2 \overset{(5.41)}{\leq} 1$$

Zu (ii):
Gäbe es eine isometrische Immersion $f\colon M \to M_C^{m+1}$ wie in (ii), so folgte aus (i) die Existenz von $r \in \mathbb{R}_+$ mit $f(M) = S_r(q_0)$, also gälte für alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\begin{aligned} \rho_{q_0}^2 \mathrm{H}^2 &\overset{\text{Satz 4.5(ii),(iii)}}{=} \|X\|^2 \mathrm{k}_C(r)^2 \overset{\text{Bsp. 1.3.3(iii)}}{=} \mathrm{s}_C(r)^2 \mathrm{k}_C(r)^2 \\ &\overset{C \leq 0}{=} \cosh^2(r\sqrt{|C|}) \overset{r>0}{>} 1, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme $\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}^2 \leq 1$. □

Korollar 5.3.5.

(i) *Seien $C \in \mathbb{R}$ mit $C \leq 0$, M eine kompakte und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion. Ferner existierten $r \in \mathbb{R}_+$ und $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$ mit*

$$f(M) \subset B_r(q_0) \quad \textit{und} \quad |\mathrm{H}| \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)}. \tag{5.42}$$

Dann gilt $f(M) = S_r(q_0)$, (d.h. nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1: f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$, und M ist von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$).

Ist f darüber hinaus injektiv, so ist M isometrisch zur Sphäre vom Radius $\mathrm{s}_C(r)$ um $0_{E^{m+1}}$ in E^{m+1}.

(ii) *Im Falle $C < 0$ existiert keine isometrische Immersion $f\colon M \to M_C^{m+1}$ einer kompakten und zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit M in M_C^{m+1} derart, daß $r \in \mathbb{R}_+$ und $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$ mit $f(M) \subset B_r(q_0)$ und $|\mathrm{H}| \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)}$ existieren.*

Bemerkung. Das letzte Korollar wird in Hauptsatz 5.5.1 erheblich verallgemeinert.

Beweis: (i) ergibt sich aus Teil (i) des vorherigen Korollares. Denn da s_C wegen $C \leq 0$ monoton wachsend ist, folgt für alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\rho_{q_0}^2 \mathrm{H}^2 \overset{(5.42)}{\leq} \langle X, \xi \rangle^2 \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2} \leq \|X\|^2 \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2} \overset{\text{Bsp. 1.3.3(iii),(5.42)}}{\leq} \frac{\mathrm{s}_C(r)^2}{\mathrm{s}_C(r)^2} = 1,$$

wobei X das (wegen $q_0 \notin f(M)$ und Lemma 4.4 existierende) Richtungsvektorfeld von f bzgl. q_0 bezeichne.
zu (ii):
Gäbe es eine isometrische Immersion $f\colon M \to M_C^{m+1}$ wie in (ii), so folgte aus (i) $f(M) = S_r(q_0)$, also gälte wegen Satz 4.5(iii) und der Annahme $|\mathrm{H}| \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)}$

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{\mathrm{s}_C(r)} \geq |\mathrm{H}| \geq \mathrm{k}_C(r) \\ \overset{C<0}{\Longrightarrow} \quad & \frac{\sqrt{|C|}}{\sinh(r\sqrt{|C|})} \geq \sqrt{|C|}\,\coth(r\sqrt{|C|}) \\ \overset{r>0,\sinh(r\sqrt{|C|})>0}{\Longrightarrow} \quad & 1 \geq \cosh(r\sqrt{|C|}), \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, daß wegen $r, |C| > 0$ gilt: $1 < \cosh(r\sqrt{|C|})$. □

Wir formulieren und beweisen nun das zu Beginn von Abschnitt 5.3 angekündigte Resultat:

Hauptsatz 5.3.6. *Seien $C \in \mathbb{R}$ mit $C \leq 0$, M eine kompakte und zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion. Ferner sei $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$, und es existiere $r \in \mathbb{R}_+$ mit*

$$f(M) \subset B_r(q_0) \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}. \tag{5.43}$$

Dann gilt $f(M) = S_r(q_0)$, (d.h. nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1: f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$, und M ist von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$).

Ist f darüber hinaus injektiv, so ist M isometrisch zur Sphäre vom Radius $\mathrm{s}_C(r)$ um $0_{E^{m+1}}$ in E^{m+1}.

Bemerkung. Im Falle $f(M) = S_r(q_0)$ ist M nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1 von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$. Aus der Definition von $\mathfrak{s}$ (vgl. Definition 1.1.1(iii)) folgt dann auch $\mathfrak{s} = \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$, d.h. (5.43) ist auch eine notwendige Bedingung für $f(M) = S_r(q_0)$.

Beweis: Wegen $q_0 \notin f(M)$ und Lemma 4.4 existiert das Richtungsvektorfeld $X \in \mathfrak{V}_f(M)$ von f bzgl. q_0. Da s_C wegen $C \leq 0$ monoton wachsend ist, folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Beispiel 1.3.3(iii) und $f(M) \subset B_r(q_0)$ (nach (5.43)) für alle $p \in M$ und jedes $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp(p)$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\rho_{q_0,\xi}^2(p) \quad = \quad \langle X_p, \xi_p\rangle^2 \leq \|X_p\|^2 \leq \mathrm{s}_C(r)^2,$$

also folgt aus (5.43) $\rho_{q_0}^2\mathfrak{s} \leq 1$.
Daher existiert nach Satz 5.3.2 $\widetilde{r} \in \mathbb{R}_+$ mit:

$$\widetilde{r} \text{ (statt } r\text{) erfüllt die Behauptung des Hauptsatzes.} \tag{5.44}$$

Zu zeigen bleibt $r = \widetilde{r}$.
Beweis hiervon:
Wäre $r < \widetilde{r}$, so gälte $\emptyset \neq f(M) \overset{(5.43),(5.44)}{\subset} B_r(q_0) \cap S_{\widetilde{r}}(q_0) = \emptyset$, Widerspruch!
Wäre $r > \widetilde{r}$, so folgte aus der Tatsache, daß s_C (vgl. Definition 1.3.1) wegen $C \leq 0$ streng monoton wachsend ist $\frac{1}{\mathrm{s}_C(\widetilde{r})^2} > \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$, im Widerspruch zu

$$\frac{1}{\mathrm{s}_C(\widetilde{r})^2} \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}. \tag{5.45}$$

[Zu (5.45):
Wegen (5.44) gilt $f(M) = S_{\widetilde{r}}(q_0)$, also folgt aus Satz 4.5(iii) für alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$ mit $\|\xi\| = 1$

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,m\}} \quad \varphi_i^\xi\varphi_j^\xi > 0 \ \wedge \ |\varphi_i^\xi| = \mathrm{k}_C(\widetilde{r}),$$

wobei $\varphi_1^\xi, \dots, \varphi_m^\xi$ die Hauptkrümmungen von f bzgl. ξ seien.
Hieraus und aus der Gauß-Gleichung [7, 8.6(2) incl. Zusätze] ergibt sich für die Schnittkrümmung K von M

$$\mathrm{K} \;=\; C + \mathrm{k}_C(\widetilde{r})^2 \overset{\text{Lemma 3.6(i)}}{=} \frac{1}{\mathrm{s}_C(\widetilde{r})^2},$$

also gilt offenbar auch $\mathfrak{s} = \frac{1}{\mathrm{s}_C(\widetilde{r})^2}$, d.h. nach (5.43)

$$\frac{1}{\mathrm{s}_C(\widetilde{r})^2} \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2},$$

also gilt (5.45).]
Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen. □

5.4 Kriterien für die Ricci-Krümmung

Es ist nun interessant zu fragen, ob ein zu Hauptsatz 5.3.6 analoges Resultat auch für die Standard-Räume konstanter Krümmung größer Null gilt.

Wir haben Hauptsatz 5.3.6 letztendlich auf Hauptsatz 5.3.1 zurückgeführt, und in dessen Beweis war entscheidend, daß die Krümmung C kleiner oder gleich Null war (vgl. die Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Hauptsatz 5.3.1).

Falls die Mannigfaltigkeit M mindestens drei-dimensional ist, hat Veeravalli die Frage in [15], zumindest für den Fall, daß man in der Voraussetzung von 5.3.6 statt der nach oben durch $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$ beschränkten Skalarkrümmung stärker nach oben durch $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$ beschränkten Ricci-Krümmung und $r \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[$ mit $r \leq r_{q_0}$ fordert, mit ja beantwortet. Dieses Ergebnis werden wir in 5.4.2 nachweisen, indem wir es auf den folgenden, erheblich allgemeineren Hauptsatz zurückführen. Im wesentlichen handelt es sich hierbei um [15, Theorem 2]. Der Unterschied besteht darin, daß in [15] eine Voraussetzung fehlt.

Hauptsatz 5.4.1. ***Vor.:*** *Seien $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $C \geq 0$. Seien M eine m-dimensionale kompakte und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, $\widetilde{M}$ eine $(m+1)$-dimensionale vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit für deren Schnittkrümmung $\widetilde{\mathrm{K}} \leq C$ gelte, $q_0 \in \widetilde{M}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ derart, daß $B_r(q_0)$ ein normaler Ball ist. Im Falle $C > 0$ gelte zusätlich $r < \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$.*

Sei weiter $f\colon M \to \widetilde{M}$ eine isometrische Immersion mit $f(M) \subset B_r(q_0)$, und es gelte für alle $p \in M$, $v \in T_p^1 M$ und $\xi_0 \in \perp_p^1(f)$

$$\mathrm{Ric}(v,v) \;\leq\; \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v, f_*v) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v, \xi_0\}) + (m-1)\mathrm{k}_C(r)^2, \quad (5.46)$$

wobei Ric *bzw.* $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ *das Ricci-Tensorfeld vom Typ* $(2,0)$ *von* M *bzw.* $\widetilde{M}$ *bezeichne.*

Beh.: *Es gilt $f(M) = S_r(q_0)$, f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$ (d.h. nach Definition 5.1 $S_r(q_0)$ ist isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$, und M ist von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$), und $U_r(q_0)$ ist isometrisch zu einer offenen Vollkugel vom Radius r in M_C^{m+1}.*

f ist darüber hinaus injektiv, und M ist isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$.

Bemerkung. Zumindest wenn gilt $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$, so ist (5.46) auch notwendig für $f(M) = S_r(q_0)$, (und daher ist nach Satz 4.8(i) $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$ z.B. erfüllt, wenn $\widetilde{M}$ sogar von konstanter Krümmung C ist.) Denn aus $f(M) = S_r(q_0)$ und Satz 4.8(ii) folgt für alle $p \in M$ und alle $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p)$ mit $\|\xi\| = 1$, daß gilt $A_{\xi_p} = \pm\mathrm{k}_C(r)\mathrm{id}_{T_pM}$, also ergibt die Gauß-Gleichung [7, 8.6(2)] für alle $v \in T_p^1M$ und jede Orthonormalbasis $v = v_1, \ldots, v_m$ von T_pM

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(v,v) &= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\langle \mathrm{R}(v_i,v)v, v_i\rangle}_{=0\,\text{für}\,\mathrm{i}=1} \\
&= \sum_{i=2}^{m} \underbrace{\langle \widetilde{\mathrm{R}}(f_*v_i, f_*v)f_*v, f_*v_i\rangle}_{=0\,\text{für}\,\mathrm{i}=1} + \sum_{i=2}^{m} \langle A_\xi(v_i), v_i\rangle\langle A_\xi(v), v\rangle - \langle A_\xi v, v_i\rangle^2 \\
&= \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v, f_*v) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v, \xi_p\}) + (m-1)\mathrm{k}_C(r)^2.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen $\psi := \frac{1}{2}\,\delta_{q_0}^2 : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ und $\Psi := \psi \circ f \colon M \to \mathbb{R}$. Nach Lemma 4.3 ist Ψ differenzierbar. Wir werden mittels (5.46) nachweisen, daß für alle $p_0 \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Psi \text{ besitzt in } p_0 \text{ ein globales Maximum} \\
&\Rightarrow\ \Psi(p_0) = \frac{1}{2}r^2 \wedge \exists_{\xi\in\mathfrak{V}_f^{\perp}(p_0),\|\xi\|=1} \forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} \varphi_i^{\xi}(p_0) = \mathrm{k}_C(r) \qquad (5.47)\\
&\quad \wedge \exists_{U\in\mathrm{Umg}(p_0,M)} \forall_{p\in U} \triangle\Psi(p) \geq 0, \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

wobei $\varphi_1^{\xi} \leq \ldots \leq \varphi_m^{\xi} \colon G\xi \to \mathbb{R}$ die Hauptkrümmungen von f bzgl. ξ seien.
Hieraus ergibt sich die Behauptung des Hauptsatzes folgendermaßen:
Die Menge $V := \{p \in M | \Psi \text{ besitzt in } p \text{ ein globales Maximum}\}$ ist wegen der Kompaktheit von M und der Stetigkeit von Ψ nicht leer, und nach (5.47) gilt

$$V = \{p \in M | \Psi(p) = \frac{1}{2}\,r^2\},$$

also ist V (erneut wegen der Stetigkeit von Ψ) abgeschlossen in M. Aus (5.48) und dem Hopf-Lemma 2.7 (angewandt auf die offene reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit U wie in (5.48)) folgt, daß zu jedem $p \in V$ eine Umgebung $\widetilde{U} \in \mathrm{Umg}(p, M)$ existiert derart, daß gilt

$$\Psi|_{\widetilde{U}} = \Psi(p) = \frac{1}{2}\,r^2,$$

also ist V auch offen in M. Aus dem Zusammenhang von M und der Definition von Ψ ergibt sich daher $\forall_{p \in M} \delta_{q_0}(f(p)) = r$, d.h. $f(M) \subset S_r(q_0)$. Da $S_r(q_0)$ nach Satz 3.5(i) (dort $M = \widetilde{M}$) eine m-dimensionale reguläre riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\widetilde{M}$ ist, ist nach [7, 2.23] $f\colon\ M \to S_r(q_0)$ eine isometrische Immersion zwischen gleichdimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeiten, insbesondere ein lokaler Homöomorphismus. Folglich ist $f(M)$ offen in $S_r(q_0)$. Wegen der Kompaktheit von M ist $f(M)$ auch eine kompakte und damit abgeschlossene Teilmenge von $S_r(q_0)$. Aus dem Zusammenhang von $S_r(q_0)$ (vgl. Satz 3.5(i)) folgt daher $f(M) = S_r(q_0)$. Somit folgt aus (5.47)

$$\forall_{\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}, \|\xi\|=1} \quad \forall_{i,j \in \{1,\ldots,m\}} \quad |\varphi_i^{\xi}| = \mathrm{k}_C(r) \wedge \varphi_i^{\xi}\varphi_j^{\xi} > 0.$$

Aus Satz 4.8(ii) ergibt sich $|\mathrm{H}| = \mathrm{k}_C(r)$, also folgt aus Satz 4.8(iii)1.), daß $U_r(q_0)$ isometrisch zu einer offenen Vollkugel vom Radius r in M_C^{m+1} ist, und aus Satz 4.9, daß $f(M) = S_r(q_0)$ isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$ ist, d.h. f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$.
Da M kompakt und $S_r(q_0)$ einfach-zusammenhängend ist, ergibt [7, 12.17, 11.29 (iv)], daß $f\colon\ M \to f(M)$ eine Isometrie ist. Folglich ist M isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$.
Zum Nachweis des Hauptsatzes bleiben daher (5.47) und (5.48) zu zeigen:
Sei also $p_0 \in M$ derart, daß Ψ in p_0 maximal wird. Dann folgt $l := \delta_{q_0}(f(p_0)) > 0$, da f andernfalls konstant vom Wert q_0 ist, im Widerspruch dazu, daß f eine Immersion ist. Sei $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p_0)$ mit $\|\xi\| = 1$ so gewählt, daß gilt

$$\varphi_m^{\xi}(p_0) \geq 0. \tag{5.49}$$

[Dies ist möglich, da $\varphi_m^{\xi}(p_0)$ die größte Hauptkrümmung von f bzgl. ξ in p_0 ist (vgl. Definition 1.1.2). Ist diese kleiner als Null, so gilt $\forall_{i \in \{1,\ldots,m\}} \varphi_i^{-\xi}(p_0) > 0$ und insbes. $\varphi_m^{-\xi}(p_0) \geq 0$.]
Da Ψ in p_0 maximal wird, gilt für alle $v \in T_{p_0}M$ $v \cdot \Phi = \langle v, \mathrm{grad}_{p_0}\Psi\rangle = 0$ und

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \mathrm{hess}_{p_0}\Psi(v,v) \overset{\text{Satz 4.3(4.2)}}{=} \widetilde{\mathrm{hess}}_{f(p_0)}\psi(f_*v, f_*v) + \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(v,v)\rangle \\
&\overset{\text{Satz 3.9}}{\geq} \quad \Big(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l)\Big) \underbrace{\langle f_*v, \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi\rangle^2}_{\overset{\text{Satz 4.3(4.1)}}{=} \langle v, \mathrm{grad}_{p_0}\Psi\rangle^2 = 0} + l\|f_*v\|^2\mathrm{k}_C(l) + \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(v,v)\rangle \\
&= \quad l\|v\|^2\mathrm{k}_C(l) + \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(v,v)\rangle,
\end{aligned}$$

also ergibt die Voraussetzung an r

$$\forall_{v \in T_{p_0}M\setminus\{0\}} \quad 0 \overset{0<l\leq r, \text{Lemma 3.6}}{<} l\|v\|^2\mathrm{k}_C(l) \leq -\langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(v,v)\rangle. \tag{5.50}$$

Hieraus und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für $v \in T_{p_0}M \setminus \{0\}$

$$-\langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(v,v)\rangle = |\langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(v,v)\rangle| \leq \|\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi\|\|\alpha(v,v)\|,$$

und nach Satz 3.5(ii) (dort $M = \widetilde{M}$ und $r = l$) gilt $\|\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi\| = l$. Daher folgt aus (5.50) und $l \leq r$ (wegen $f(M) \subset B_r(q_0)$) sowie der Tatsache, daß k_C nach Lemma 3.6(ii) streng monoton fallend ist

$$\forall_{v \in T_{p_0}M\setminus\{0\}} \quad (0 <)\, \|v\|^2 \mathrm{k}_C(r) \leq \|v\|^2 \mathrm{k}_C(l) \leq \|\alpha(v,v)\|. \tag{5.51}$$

Sei $u_1 \in T^1_{p_0}M$ so gewählt, daß die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon\ T_{p_0}M &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|\alpha(x,x)\|^2 \end{aligned}$$

auf der kompakten Menge $T^1_{p_0}M$ in u_1 ein Minimum annimmt. Wegen (5.51) gilt $\|\alpha(u_1,u_1)\| > 0$, und folglich ist

$$\alpha_{p_0}(u_1,\ldots) \ \ : \ \ T_{p_0}M \longrightarrow \perp_{p_0}(f)$$

eine lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist, eines m-dimensionalen in einen 1-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und besitzt daher einen $(m-1)$-dimensionalen Kern. Wir beweisen als nächstes die Existenz von $u_2,\ldots,u_m \in T^1_{p_0}M$ mit

$$\begin{array}{l} u_1,\ldots,u_m \text{ ist Orthonormalbasis von } T_{p_0}M, \text{ bestehend} \\ \text{aus Eigenvektoren von } A_{\xi_{p_0}} \text{ mit } \forall_{i\in\{2,\ldots,m\}}\, \alpha(u_1,u_i) = 0. \end{array} \tag{5.52}$$

[Zu (5.52):
Da $\alpha_{p_0} : T_{p_0}M \times T_{p_0}M \to \perp_{p_0}(f)$ bekanntlich eine symmetrische bilineare Abbildung ist und $g|_{T^1_{p_0}M}$ in u_1 minimal wird, folgt aus Lemma 2.1(i)

$$\forall_{v\in T_{p_0}M} \quad (\langle u_1, v\rangle = 0 \Longrightarrow \langle \alpha(u_1,u_1), \alpha(u_1,v)\rangle = 0),$$

also ergibt die lineare Abhängigkeit von $\alpha(u_1,u_1), \alpha(u_1,v)$ (wegen $\dim \perp_{p_0}(f) = 1$) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned} \forall_{v\in T^1_{p_0}M} \quad (\langle u_1, v\rangle = 0 \ &\Longrightarrow \underbrace{\|\alpha(u_1,u_1)\|}_{\overset{(5.51)}{\neq}\ 0}\, \|\alpha(u_1,v)\| = 0 \\ &\Longrightarrow |\langle A_\xi(u_1), v\rangle| \overset{1.1.2\,\text{Bem. 4.)}}{=} \|\alpha(u_1,v)\| = 0.) \end{aligned}$$

Daher gilt für jede Orthonormalbasis $v_1,\ldots,v_m$ mit $u_1 = v_1$

$$A_\xi(u_1) \ = \ \sum_{i=1}^m \underbrace{\langle A_\xi(v_1), v_i\rangle}_{=0\,\text{für i}\neq 1} v_i = \langle A_\xi(u_1), u_1\rangle u_1, \tag{5.53}$$

d.h. $u_1 \in T^1_{p_0}M$ ist Eigenvektor von $A_{\xi_{p_0}}$.

Ferner gilt $A_\xi\big(\operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)\big) \subset \operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)$, da für $w \in \operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)$ wegen 1.1.2 Bemerkung 4.) und der Selbstadjungiertheit von $A_{\xi_{p_0}}$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \langle A_\xi(u_1), u_1\rangle \alpha(u_1, w) = \langle A_\xi(u_1), u_1\rangle \langle A_\xi(u_1), w\rangle \xi_{p_0} \\
&= \langle A_\xi(u_1), u_1\rangle \langle u_1, A_\xi(w)\rangle \xi_{p_0} = \big\langle \langle A_\xi(u_1), u_1\rangle u_1, A_\xi(w)\big\rangle \xi_{p_0} \stackrel{(5.53)}{=} \alpha(u_1, A_\xi(w)).
\end{aligned}$$

Mit $A_{\xi_{p_0}}$ ist daher auch

$$A_{\xi_{p_0}}|_{\operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)} \quad : \quad \operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots) \longrightarrow \operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus (des $(m-1)$-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $\operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)$) und besitzt daher nach linearer Algebra eine Orthonormalbasis $u_2,\ldots,u_m \in \operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots) \subset T_{p_0}M$, bestehend aus Eigenvektoren von $A_{\xi_{p_0}}$.
Zum Nachweis von (5.52) bleibt daher zu zeigen, daß u_1 zu allen $u_2,\ldots,u_m$ orthogonal ist:
Da $g|_{T^1_{p_0}M}$ in u_1 minimal wird und $u_2,\ldots,u_m \in \operatorname{Kern}\alpha_{p_0}(u_1,\ldots)$ liegen, folgt aus Lemma 2.1(ii)

$$\forall_{i\in\{2,\ldots,m\}} \quad \langle u_1, u_i\rangle = 0,$$

und wir haben (5.52) gezeigt.]
Da $g|_{T^1_{p_0}M}$ in u_1 minimal wird und wegen (5.52) ergibt Lemma 2.1(iii), daß gilt

$$\forall_{i\in\{2,\ldots,m\}} \quad \langle \alpha(u_1,u_1), \alpha(u_i,u_i)\rangle \geq \|\alpha(u_1,u_1)\|^2. \tag{5.54}$$

Aus der Gauß-Gleichung [7, 8.6(2)] folgt nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(u_1,u_1) &= \sum_{i=1}^m \underbrace{\langle \mathrm{R}(u_i,u_1)u_1, u_i\rangle}_{=0\, für\, i=1} \\
&= \sum_{i=2}^m \Big(\underbrace{\langle \widetilde{\mathrm{R}}(f_*u_i, f_*u_1)f_*u_1, f_*u_i\rangle}_{=0\, für\, i=1} + \langle \alpha(u_1,u_1), \alpha(u_i,u_i)\rangle \\
&\qquad - \underbrace{\|\alpha(u_1,u_i)\|^2}_{\stackrel{(5.52)}{=} 0} \Big) \\
&\stackrel{(5.54)}{\geq} \underbrace{\sum_{i=1}^m \langle \widetilde{\mathrm{R}}(f_*u_i, f_*u_1)f_*u_1, f_*u_i\rangle}_{=\widetilde{\operatorname{Ric}}(f_*u_1,f_*u_1) - \widetilde{\mathrm{K}}(\operatorname{Spann}\{f_*u_1,\xi_{p_0}\})} + \sum_{i=2}^m \|\alpha(u_1,u_1)\|^2 \\
&\stackrel{(5.51)}{\geq} \widetilde{\operatorname{Ric}}(f_*u_1, f_*u_1) - \widetilde{\mathrm{K}}(\operatorname{Spann}\{f_*u_1, \xi_{p_0}\}) + (m-1)\mathrm{k}_C(r)^2 \\
&\stackrel{(5.46)}{\geq} \operatorname{Ric}(u_1,u_1).
\end{aligned}$$

Daher muß in der letzten Abschätzung stets Gleichheit gelten, insbes. in (5.51) für $v = u_1$ und in (5.54) für alle $i \in \{2, \dots, m\}$. Ersteres bedeutet

$$\|\alpha(u_1, u_1)\| = \mathrm{k}_C(l) = \mathrm{k}_C(r)(> 0), \quad \text{also auch} \quad l = r,$$

also folgt aus letzterem und der linearen Abhängigkeit von $\alpha(u_1, u_1)$ und $\alpha(u_i, u_i)$ für $i \in \{2, \dots, m\}$

$$\forall_{i\in\{2,\dots,m\}} \quad \|\alpha(u_1, u_1)\|\|\alpha(u_i, u_i)\| = \|\alpha(u_1, u_1)\|^2 = \mathrm{k}_C(r)^2(> 0).$$

Daher haben wir gezeigt

$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} \quad |h_\xi(u_i, u_i)| = \|\alpha(u_i, u_i)\| = \mathrm{k}_C(r) \ \wedge \ \delta_{q_0}(f(p_0)) = l = r.$$

Aus $\delta_{q_0}(f(p_0)) = r$, $f(M) \subset B_r(q_0)$ und Satz 4.5(ii) folgt, daß alle Hauptkrümmungen von f bzgl. ξ in p_0 ungleich Null sind und dasselbe Vorzeichen haben, d.h. wegen (5.49), (5.52) und $\forall_{i\in\{1,\dots,m\}}|h_\xi(u_i, u_i)| = \mathrm{k}_C(r)$:

$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} \quad \varphi_i^\xi(p_0) = \mathrm{k}_C(r)$$

Wegen $\delta_{q_0}(f(p_0)) = r$ gilt außerdem $\Psi(p_0) = \frac{1}{2}\, r^2$, und (5.47) ist gezeigt.
Zu zeigen bleibt (5.48):
Aus der Stetigkeit von $\varphi_1^\xi, \dots, \varphi_m^\xi\colon\ G\xi \to \mathbb{R}$, $\forall_{i\in\{1,\dots,m\}}\, \varphi_i^\xi(p_0) = \mathrm{k}_C(r) > 0$ und $m \geq 3$ folgt die Existenz einer Umgebung $\widetilde{U}$ von p_0 in $G\xi$ mit

$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} \quad 0 < \varphi_i^\xi|_{\widetilde{U}} < (m-1)\mathrm{k}_C(r). \tag{5.55}$$

Durch Umnummerierung der u_i erreicht man, daß $\varphi_i^\xi(p_0)$ die Hauptkrümmung zur Hauptkrümmungsrichtung u_i von f bzgl. ξ in p_0 ist, also gilt (vgl. Bemerkung 4.) zu 1.1.2)

$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} \quad \alpha(u_i, u_i) = \varphi_i^\xi(p_0)\xi_{p_0}.$$

Daher folgt aus (5.50) für alle $i \in \{1, \dots, m\}$: $0 > \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \varphi_i^\xi(p_0)\xi_{p_0}\rangle$ Aus Stetigkeitsgründen existiert eine Umgebung $\widetilde{\widetilde{U}}$ von p_0 in $G\xi$ mit

$$\forall_{i\in\{1,\dots,m\}} \quad 0 > \langle(\widetilde{\mathrm{grad}}\,\psi)\circ f, \varphi_i^\xi\xi\rangle|_{\widetilde{\widetilde{U}}}. \tag{5.56}$$

Wir beweisen, daß (5.48) mit $U := \widetilde{U} \cap \widetilde{\widetilde{U}} \in \mathrm{Umg}(p_0, G\xi)$ gilt:
Angenommen es existiert $p \in U$ mit $\triangle\Psi(p) < 0$.
Wir können wegen $\delta_{q_0}(f(p_0)) = r > 0$ o.B.d.A. annehmen, daß $\widetilde{l} := \delta_{q_0}(f(p)) > 0$ gilt (sonst U entsprechend verkleinern). Seien $v_1, \dots, v_m$ die Hauptkrümmungsrichtungen zu den Hauptkrümmungen $\varphi_1^\xi(p) \leq \dots \leq \varphi_m^\xi(p)$ von f bzgl. ξ in p. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi(p) \quad > \quad m\,\mathrm{k}_C(r). \tag{5.57}$$

[Zu (5.57):
Für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ gilt nach Satz 3.9 (dort $M = \widetilde{M}$ und $l = \widetilde{l}$)

$$\widetilde{\operatorname{hess}}\,\psi(f_*v_i, f_*v_i) \;\geq\; (\frac{1}{\widetilde{l}} - \mathrm{k}_C(\widetilde{l}))\langle f_*v_i, \operatorname{grad}_{f(p)}\psi\rangle^2 + \widetilde{l}\,\underbrace{\|v_i\|^2}_{=1}\mathrm{k}_C(\widetilde{l}),$$

und aus Lemma 3.6(iii),(iv) folgt wegen $C \geq 0$, daß gilt $(\frac{1}{\widetilde{l}} - \mathrm{k}_C(\widetilde{l})) \geq 0$, d.h.

$$\widetilde{\operatorname{hess}}\,\psi(f_*v_i, f_*v_i) \;\geq\; \widetilde{l}\mathrm{k}_C(\widetilde{l}). \tag{5.58}$$

Außerdem gilt für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$

$$\langle\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v_i,v_i)\rangle \;=\; \langle\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \varphi_i^\xi(p)\xi_p\rangle \overset{(5.56)}{\geq} -\|\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi\||\varphi_i^\xi(p)|,$$

also folgt aus Satz 3.5(ii)(3.3) (dort $M = \widetilde{M}$ und $r = \widetilde{l}$) und (5.55)

$$\langle\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v_i,v_i)\rangle \;\geq\; -\widetilde{l}\,\varphi_i^\xi(p). \tag{5.59}$$

Nun ergibt sich aus der Annahme und Lemma 4.3(ii)(4.2)

$$\begin{aligned} 0 \quad &> \quad \triangle\Psi(p) = \operatorname{Spur}\operatorname{hess}_p\Psi = \sum_{i=1}^m \operatorname{hess}_p\Psi(v_i,v_i) \\ &= \quad \sum_{i=1}^m \widetilde{\operatorname{hess}}_{f(p)}\,\psi(f_*v_i, f_*v_i) + \langle\widetilde{\operatorname{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v_i,v_i)\rangle \\ &\overset{(5.58),(5.59)}{\geq} \quad \widetilde{l}\,(m\,\mathrm{k}_C(\widetilde{l}) - \sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi(p)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $0 < \widetilde{l} \leq r$ (beachte $f(M) \subset B_r(q_0)$) und der Tatsache, daß k_C nach Lemma 3.6(ii) streng monoton fallend ist

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi(p) \;>\; m\,\mathrm{k}_C(\widetilde{l}) \geq m\,\mathrm{k}_C(r),$$

d.h. (5.57) ist bewiesen.]
Aus (5.57) folgt

$$\varphi_m^\xi(p) \;>\; \mathrm{k}_C(r), \tag{5.60}$$

denn $\varphi_m^\xi(p)$ ist die größte Hauptkrümmung von f bzgl. ξ in p; wäre (5.60) falsch, so folgte daher $\sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi(p) \leq m\,\varphi_m^\xi(p) \leq m\,\mathrm{k}_C(r)$, im Widerspruch zu (5.57).
Nun ergibt die Gauß-Gleichung [7, 8.6(2)]

$$\operatorname{Ric}(v_m,v_m) \quad = \quad \sum_{i=1}^m \underbrace{\langle\mathrm{R}(v_i,v_m)v_m,v_i\rangle}_{=0\,f\ddot{u}r\,i=m}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1}(\underbrace{\langle\widetilde{\mathrm{R}}(f_*v_i, f_*v_m)f_*v_m, f_*v_i\rangle}_{=0\, f\ddot{u}r\, i=m} + \varphi_m^\xi(p)\varphi_i^\xi(p)) \\
&= \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v_m, f_*v_m) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v_m, \xi_p\}) + \varphi_m^\xi(p)\sum_{i=1}^{m-1}\varphi_i^\xi(p) \\
&\overset{(5.57)}{>} \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v_m, f_*v_m) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v_m, \xi_p\}) \\
&\quad +\varphi_m^\xi(p)(m\,\mathrm{k}_C(r) - \varphi_m^\xi(p)) \\
&= \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v_m, f_*v_m) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v_m, \xi_p\}) \\
&\quad +(m-1)\mathrm{k}_C(r)^2 + \underbrace{\big(\varphi_m^\xi(p) - \mathrm{k}_C(r)\big)}_{\overset{(5.60)}{>} 0}\underbrace{\big((m-1)\mathrm{k}_C(r) - \varphi_m^\xi(p)\big)}_{\overset{(5.55)}{>} 0} \\
&> \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v_m, f_*v_m) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v_m, \xi_p\}) + (m-1)\mathrm{k}_C(r)^2,
\end{aligned}
$$

im Widerspruch zu (5.46), also ist die Annahme falsch, und (5.48) ist bewiesen. Damit haben wir (5.47) und (5.48) gezeigt. Hierauf hatten wir die Behauptung zurückgefüht, also ist der Hauptsatz vollständig bewiesen. □

Bemerkung. Veeravalli behauptet in [15], der soeben geführte Beweis funktioniere auch im Falle $C \in \mathbb{R}_-$. Beim Nachweis von (5.57) haben wir jedoch benötigt, daß $C \geq 0$ gilt. Denn damit (5.57) gilt, mußten wir (5.58) zeigen, und hierbei haben wir ausgenutzt , daß wegen $C \geq 0$ auch $(\frac{1}{\tilde{l}} - \mathrm{k}_C(\tilde{l})) \geq 0$ gilt. Nach Lemma 3.6 ist im Falle $C < 0$ aber gerade $(\frac{1}{\tilde{l}} - \mathrm{k}_C(\tilde{l})) \leq 0$.

Wir beweisen nun das zu Beginn dieses Abschnittes angekündigte Resultat.

Hauptsatz 5.4.2. ***Vor.:*** *Seien $C \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \left\{\begin{array}{ccc} 3 & : & C > 0 \\ 2 & : & C \leq 0 \end{array}\right\}$, M eine kompakte und zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to M_C^{m+1}$ eine isometrische Immersion. Ferner seien $q_0 \in M_C^{m+1} \setminus f(M)$ und es existiere $r \in \left\{\begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C \leq 0 \end{array}\right\}$ derart, daß $B_r(q_0)$ ein normaler Ball ist, und es gelte*

$$
f(M) \subset B_r(q_0) \quad \text{und} \quad \mathfrak{r} \leq \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}. \tag{5.61}
$$

Beh.: *$f(M) = S_r(q_0)$, d.h. nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1: f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$ und M ist von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$.*

Ist f darüber hinaus injektiv, so ist M isometrisch zur Sphäre vom Radius $\mathrm{s}_C(r)$ um $0_{E^{m+1}}$ in E^{m+1}.

Bemerkung. Im Falle $f(M) = S_r(q_0)$ ist M nach Beispiel 5.2 und den Bemerkungen zu Definition 5.1 von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$. Aus der Definition von $\mathfrak{r}$ (vgl. Definition 1.1.1(ii)) folgt dann auch $\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$, d.h. (5.61) ist auch eine notwendige Bedingung für $f(M) = S_r(q_0)$.

Beweis: Im Falle $C \leq 0$ folgt für alle $p \in M$ und jede Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_m$

$$\mathfrak{s}(p) \overset{1.1.1(ii)}{=} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}(v_i) \overset{(5.61)}{\leq} \frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2},$$

also folgt die Behauptung aus Hauptsatz 5.3.6.
Im Falle $C > 0$ gilt für alle $p \in M$, alle $v \in T_p^1 M$ und alle $\xi_0 \in \perp_{p_0}^1 (f)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(v,v) &\overset{1.1.1(ii)}{=} (m-1)\mathfrak{r}(v) \overset{(5.61)}{\leq} (m-1)\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2} \\ &\overset{\text{Lemma } 3.6}{=} m\,C - C + (m-1)\,\mathrm{k}_C(r)^2 \\ &\overset{\widetilde{\mathrm{K}}=C}{=} \widetilde{\mathrm{Ric}}(f_*v, f_*v) - \widetilde{\mathrm{K}}(\mathrm{Spann}\{f_*v, \xi_0\}) + (m-1)\mathrm{k}_C(r)^2, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung aus Hauptsatz 5.4.1.
Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen. □

5.5 Kriterien für die mittlere Krümmung

Wir hatten im letzten Korollar zu Satz 5.3.2 eine Bedingung für eine sphärische Hyperfläche in den Standard-Räumen konstanter Krümmung kleiner oder gleich Null erhalten. Markvorsen hat in [11] ein erheblich allgemeineres Resultat bewiesen, nämlich den folgenden Hauptsatz:

Hauptsatz 5.5.1 ([11, Theorem 2]). ***Vor.:*** *Sei $C \in \mathbb{R}$. Seien M eine kompakte und zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $\widetilde{M}$ eine vollständige und zusammenhängende $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, für deren Schnittkrümmung $\widetilde{\mathrm{K}} \leq C$ gelte. Ferner seien $q_0 \in \widetilde{M}$ und $r \in \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C \leq 0 \end{array} \right\}$ derart, daß $B_r(q_0)$ ein normaler Ball ist und daß gilt*

$$f(M) \subset B_r(q_0) \quad \textit{und} \quad |\mathrm{H}| \leq \mathrm{k}_C(r), \tag{5.62}$$

(beachte, daß $|\mathrm{H}|$ nach Bemerkung 3.) zu 1.1.2 eine auf ganz M wohldefinierte Funktion ist).
Beh.: *Es gilt $f(M) = S_r(q_0)$, f ist sphärisch mit Radius $\mathrm{s}_C(r)$ (d.h. nach Definition 5.1 $S_r(q_0)$ ist isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$, und M ist von konstanter Krümmung $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$), und $U_r(q_0)$ ist isometrisch zu einer offenen Vollkugel vom Radius r in M_C^{m+1}.*
Ist f darüber hinaus injektiv, so ist M isometrisch zu $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$.

Bemerkung.

1.) Der Hauptsatz ist tatsächlich eine Verallgemeinerung des dritten Korollares zu Satz 5.3.2, da die Bedingung (5.62) im Falle $C = 0$ (wegen $k_0(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{si_0(r)}$) mit der Bedingung (5.42) übereinstimmt, und im Falle $C < 0$ kann (5.42) nach Teil (ii) des Korollares nie erfüllt sein.

2.) Zumindest wenn $\widetilde{M}$ sogar von konstanter Krümmung C ist, ist (5.62) nach Satz 4.8(i) auch eine notwendige Bedingung für $f(M) = S_r(q_0)$.

Beweis: Wir gehen ähnlich wie beim Beweis von Hauptsatz 5.4.1 vor und setzen wieder $\psi := \frac{1}{2}\,\delta_{q_0}^2 : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ und $\Psi := \psi \circ f\colon\ M \to \mathbb{R}$. Nach Lemma 4.3 ist Ψ differenzierbar. Wir werden mittels (5.62) begründen , daß für alle $p_0 \in M$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\Psi \text{ besitzt in } p_0 \text{ ein globales Maximum}\\
\Longrightarrow\quad & \Psi(p_0) = \frac{1}{2}r^2 && (5.63)\\
& \wedge \exists_{U\in\mathrm{Umg}(p_0,M)}\, \forall_{p\in U}\, \triangle\Psi(p) \geq 0. && (5.64)
\end{aligned}
$$

Völlig analog zu Beginn des Beweises von Hauptsatz 5.4.1 auf Seite 103 beschrieben, ergibt sich die Behauptung.
Zum Nachweis des Hauptsatzes bleiben daher (5.63) und (5.64) zu zeigen:
Besitze Ψ in $p_0 \in M$ ein globales Maximum.
Zu (5.63):
Wegen der ersten Aussage in (5.62) und der Definition von Ψ ist klar, daß gilt $\Psi(p_0) \leq \frac{1}{2}r^2$.
Angenommen es gälte sogar $\Psi(p_0) < \frac{1}{2}r^2$, d.h. da Ψ in p_0 ein globales Maximum besitzt $\forall_{p\in M}\delta_{q_0}(f(p)) < r$. Wegen der Kompaktheit von M, der Stetigkeit von $\delta_{q_0} \circ f\colon\ M \to \mathbb{R}$, und weil $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ als Immersion nicht konstant vom Wert q_0 sein kann, existierte dann $\widetilde{r} \in]0, r[$ mit $\forall_{p\in M}\delta_{q_0}(f(p)) \leq \widetilde{r}$ und $\delta_{q_0}(f(p_0)) = \widetilde{r}$, also folgte aus Satz 4.5(ii) $|\mathrm{H}(p_0)| \geq \mathrm{k}_C(\widetilde{r})$. Dies bedeutete aber wegen der zweiten Aussage in (5.62) $\mathrm{k}_C(r) \geq \mathrm{k}_C(\widetilde{r})$, und da k_C nach Lemma 3.6(ii) streng monoton fallend ist, folgte $r \leq \widetilde{r}$, im Widerspruch zu $\widetilde{r} \in]0, r[$. Daher ist die Annahme falsch, und (5.63) ist bewiesen.
Zu (5.64):
Analog zur Argumentation auf Seite 104 sieht man ein, daß für $\xi \in \mathfrak{V}_f^{\perp}(p_0)$ mit $\|\xi\| = 1$ beliebieg und eine Basis von Hauptkrümmungsrichtungen $u_1, \ldots, u_m$ zu den Hauptkrümmungen $\varphi_1^\xi(p_0), \ldots, \varphi_m^\xi(p_0)$ von f bzgl. ξ in p_0 gilt

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} \quad \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \varphi_i^\xi(p_0)\xi_{p_0}\rangle \overset{\text{Bem. 4.) zu 1.1.2}}{=} \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p_0)}\psi, \alpha(u_i,u_i)\rangle \;\; < 0,$$

also existiert aus Stetigkeitsgründen $U \in \mathrm{Umg}(p_0, G\xi)$ mit

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,m\}} \quad \langle(\widetilde{\mathrm{grad}}\,\psi)\circ f, \varphi_i^\xi\xi\rangle|_U \;\; < 0. \tag{5.65}$$

Wir zeigen, daß (5.64) für dieses U gilt:
Seien $p \in U$ beliebig, $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von Hauptkrümmungsrichtungen zu den Hauptkrümmungen $\varphi_1^\xi(p), \ldots, \varphi_m^\xi(p)$ von f bzgl. ξ in p. Wegen $\delta_{q_0}(f(p)) \leq \delta_{q_0}(f(p_0)) = r > 0$ können wir o.B.d.A annehmen, daß U so klein ist, daß $r \geq l = \delta_{q_0}(f(p)) > 0$ gilt. Sei ferner $\gamma\colon [0,l] \to \widetilde{M}$ die nach Satz 3.2 und [7, 10.24(i), 10.14(ii)] eindeutig bestimmte nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\gamma(0) = q_0$ sowie $\gamma(l) = f(p)$, d.h. nach Satz 3.5 (dort $M = \widetilde{M}$ und $r = l$) $\mathrm{grad}_{f(p)}\psi = l\dot\gamma(l)$. Wir definieren

$$s(p) \quad := \quad |\langle \dot\gamma(l), \xi_p\rangle| = |\langle \frac{1}{l}\widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p)}\psi, \xi_p\rangle| \in [0,1]. \tag{5.66}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v_i,v_i)\rangle \\
&= \quad \sum_{i=1}^m \underbrace{\langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p)}\psi, \varphi_i^\xi(p)\xi_p\rangle}_{\overset{(5.65)}{<}\ 0} = -|\sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi(p)\langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p)}\psi, \xi_p\rangle| \\
&\overset{(5.66)}{=} \quad -l\,s(p)|\sum_{i=1}^m \varphi_i^\xi(p)| = -l\,s(p)\,m\,|\mathrm{H}(p)| \\
&\overset{(5.62)}{\geq} \quad -l\,s(p)\,m\,\mathrm{k}_C(r) \overset{0<l\leq r,\text{Lemma 3.6}}{\geq} -l\,s(p)\,m\,\mathrm{k}_C(l).
\end{aligned}$$

Hieraus und aus Satz 3.9 (dort $M = \widetilde{M}$) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l}\triangle\Psi(p) &= \frac{1}{l}\sum_{i=1}^m \mathrm{hess}\,\Psi(v_i,v_i) \\
&\overset{\text{Lemma 4.3}}{=} \quad \frac{1}{l}\sum_{i=1}^m \widetilde{\mathrm{hess}}\,\psi(f_*v_i, f_*v_i) + \frac{1}{l}\sum_{i=1}^m \langle \widetilde{\mathrm{grad}}_{f(p)}\psi, \alpha(v_i,v_i)\rangle \\
&\geq \quad \sum_{i=1}^m \big((\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l))\langle f_*v_i, \dot\gamma(l)\rangle^2 + \underbrace{\|v_i\|^2}_{=1}\mathrm{k}_C(l)\big) - s(p)\,m\,\mathrm{k}_C(l) \\
&= \quad (\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l)) \underbrace{\sum_{i=1}^m \big(\langle f_*v_i, \dot\gamma(l)\rangle^2\big)}_{=\|\dot\gamma(l)\|^2 - \langle \xi_p, \dot\gamma(l)\rangle^2} + m\,\mathrm{k}_C(l) - s(p)\,m\,\mathrm{k}_C(l) \\
&\overset{(5.66),\|\dot\gamma\|=1}{=} \quad (\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l))(1 - s(p)^2) + m\,\mathrm{k}_C(l)(1 - s(p)),
\end{aligned} \tag{5.67}$$

daher genügt es zum Nachweis von (5.64) wegen der Beliebigkeit von $p \in U$ zu zeigen, daß die letzte Zeile immer größer oder gleich Null ist.

1. Fall: $C \geq 0$
Dann folgt nach Lemma 3.6(iii),(iv) wegen $0 < l \leq r < \frac{\pi}{2\sqrt{C}}$: $\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l) \geq 0$ und $\mathrm{k}_C(l) > 0$, also gilt für (5.67)

$$\underbrace{(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l))}_{\geq 0}\underbrace{(1 - s(p)^2)}_{\overset{(5.66)}{\geq} 0} + m\underbrace{\mathrm{k}_C(l)}_{>0}\underbrace{(1 - s(p))}_{\overset{(5.66)}{\geq} 0} \quad \geq \quad 0.$$

2. Fall: $C < 0$
Dann folgt nach Lemma 3.6(v) $\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l) \leq 0$ und $\mathrm{k}_C(l) > 0$, also gilt für (5.67)

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l))(1 - s(p)^2) + m\,\mathrm{k}_C(l)(1 - s(p)) \\
&\quad = \quad (\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l))(1 - s(p))(1 + s(p)) + m\,\mathrm{k}_C(l)(1 - s(p)) \\
&\quad = \quad \underbrace{(1 - s(p))}_{\overset{(5.66)}{\geq} 0}\underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l))}_{\leq 0}\underbrace{(1 + s(p))}_{\overset{(5.66)}{\in} [1,2]}}_{\geq 2\left(\frac{1}{l} - \mathrm{k}_C(l)\right)} + m\,\mathrm{k}_C(l)\Big)}_{\geq \frac{2}{l} + (m-2)\,\mathrm{k}_C(l) \overset{m \geq 2}{\geq} 0} \geq 0\,,
\end{aligned}$$

und der Hauptsatz ist vollständig bewiesen. □

Gilt in der Vor. des letzten Hauptsatzes anstatt (5.62) nur $|\mathrm{H}| \leq \mathrm{k}_C(r)$, so folgt bereits aus Satz 4.5, daß $p_0 \in M$ existiert mit $\delta_{q_0}(f(p_0)) \geq r$.
[Denn wie beim Beweis von (5.63) folgte andernfalls aus der Kompaktheit von M und der Tatsache, daß f eine Immersion ist, die Existenz von $p_0 \in M$ und $\widetilde{r} \in]0, r[$ mit $f(M) \subset B_{\widetilde{r}}(q_0)$ sowie $\delta_{q_0}(f(p_0)) = \widetilde{r}$, also nach Satz 4.5 $|\mathrm{H}(p_0)| \geq \mathrm{k}_C(\widetilde{r})$ und somit $\mathrm{k}_C(r) \geq \mathrm{k}_C(\widetilde{r})$ und $r \leq \widetilde{r}$ im Widerspruch zu $\widetilde{r} \in]0, r[$.]
Der letzte Hauptsatz ermöglicht es, diese Aussage dahingehend zu verschärfen, daß im Falle $\delta_{q_0}(f(p_0)) = r$ bereits $f(M) = S_r(q_0)$ gelten muß:

Satz 5.5.2. ***Vor.:*** *Sei $C \in \mathbb{R}$. Seien M eine kompakte und zusammenhängende m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $\widetilde{M}$ eine vollständige und zusammenhängende $(m+1)$-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, für deren Schnittkrümmung $\widetilde{\mathrm{K}} \leq C$ gelte. Es existiere $r \in \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2\sqrt{C}}[& : & C > 0 \\ \mathbb{R}_+ & : & C \leq 0 \end{array} \right\}$ derart, daß $B_r(q_0)$ ein normaler Ball ist und daß gilt*

$$|\mathrm{H}| \leq \mathrm{k}_C(r), \tag{5.68}$$

(beachte, daß $|\mathrm{H}|$ nach Bemerkung 3.) zu 1.1.2 eine auf ganz M wohldefinierte Funktion ist).
Ferner sei $q_0 \in \widetilde{M}$ beliebig.

Beh.: *Entweder gilt (i)* $f(M) = S_r(q_0)$ *(und in diesem Fall ist* f *sphärisch mit Radius* $\mathrm{s}_C(r)$ *– d.h. nach Definition 5.1* $S_r(q_0)$ *ist isometrisch zu* $S_{\mathrm{s}_C(r)}(0_{E^{m+1}})$*, und* M *ist von konstanter Krümmung* $\frac{1}{\mathrm{s}_C(r)^2}$ *– und* $U_r(q_0)$ *ist isometrisch zu einer offenen Vollkugel vom Radius* r *in* M_C^{m+1}*),*
oder es gilt (ii) $f(M) \not\subset B_{\tilde{r}}(q_0)$*.*

Beweis: Da f Immersion und M kompakt ist, existiert ein minimales $r_0 \in \mathbb{R}_+$ mit $f(M) \subset B_{r_0}(q_0)$. Gilt $r_0 > r$, so liegt (ii) vor, und es ist nichts zu zeigen. Gilt $r_0 \leq r$, so folgt insbesondere $f(M) \subset B_r(q_0)$. Dann ergeben (5.68) und Hauptsatz 5.5.1 die Behauptung von (i). $\square$

Anhang A

Verzeichnis der in dieser Arbeit verwendeten Symbole

Soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, sind die hier aufgeführten Symbole stets folgendermaßen zu verstehen:

In dieser Arbeit werden die folgenden beiden Funktionen definiert:

k_C	siehe 3.6
s_C	siehe 1.3.1

Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M bezeichnet

$\mathfrak{A}_M$	die differenzierbare Struktur von M,
C_M^∞	die Menge aller differenzierbaren Funktionen $U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge U von M,
Gu	den Definitionsbereich von $u \in \mathfrak{A}_M$,
$\mathfrak{p} : TM \to M$	die Fußpunktabbildung,
TM	das Tangentialbündel von M,
T_pM	den Tangentialraum von $p \in M$ an M,
$\mathfrak{V}_M(U)$	die Menge aller differenzierbaren Vektorfelder von M auf einer offenen Teilmenge U von M,
$\mathfrak{V}_M(p)$	die Menge $\bigcup_{U \in \mathrm{Umg}(p,M)} \mathfrak{V}_M(U)$ für $p \in M$,
$\mathfrak{V}_M$	die Menge $\bigcup_{p \in M} \mathfrak{V}_M(p)$.

Ist $V = M$ sogar ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so bezeichnet

$\dashrightarrow : T_pV \to V$	den kanonischen $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus von T_pV nach V für $p \in V$,
$I_p : V \to T_pV$	die Umkehrabbildung von $\dashrightarrow : T_pV \to V$ für $p \in V$.

Für eine differenzierbare Abbildung $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bezeichnet

$f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$	die durch f in $p \in M$ induzierte Abbildung,
$\mathfrak{V}_f(U)$	die Menge aller differenzierbaren Vektorfelder längs f auf einer offenen Teilmenge U von M,
$\mathfrak{V}_f(p)$	die Menge $\bigcup_{U\in \mathrm{Umg}(p,M)} \mathfrak{V}_f(U)$ für $p \in M$,
$\mathfrak{V}_f$	die Menge $\bigcup_{p\in M} \mathfrak{V}_f(p)$.

Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit M bezeichnet

$B_r(q_0)$	den abgeschlossenen Ball vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$ um $q_0 \in M$, siehe 1.2.3(ii),
$\operatorname{div} Y$	die Divergenz von $Y \in \mathfrak{V}_M$,
$\exp$	die Exponentialabbildung von M,
K	die Schnittkrümmung von M,
$G\delta_{q_0}$	die Menge auf der δ_{q_0} differenzierbar ist,
$\operatorname{grad}\Phi$	den Gradienten von $\Phi \in C^\infty_M$,
$\operatorname{hess}\Phi$	die Hesseform von $\Phi \in C^\infty_M$,
$I(\ldots,\ldots)$	die Indexform (von einer Geodätischen), siehe 2.5.3,
J_γ	Menge der Jacobifelder längs einer Geodätischen $\gamma\colon\ [a,b] \to M$, siehe 2.5.1(i),
$\mathfrak{r}$	die Ricci-Krümmung von M, siehe 1.1.1(ii),
R	den riemannschen Krümmungstensor von M,
Ric	das Ricci-Tensorfeld vom Typ $(2,0)$ auf M, siehe 1.1.1(i),
$\mathfrak{s}$	die Skalarkrümmung von M, siehe 1.1.1(iii),
$S_r(q_0)$	die r-Sphäre um $q_0 \in M$ für $r \in \mathbb{R}_+$, siehe 1.2.3(ii),
$U_r(q_0)$	die offene r-Umgebung von $q_0 \in M$, siehe 1.2.3(ii),
δ_{q_0}	die Abstandsfunktion von $q_0 \in M$ für $r \in \mathbb{R}_+$, siehe 1.2.3(i),
ψ	$= \frac{1}{2}\,\delta^2_{q_0}$ für $q_0 \in M$,
$\triangle\Phi$	den Laplace-Operator von $\Phi \in C^\infty_M$,
∇	die Levi-Civita kovariante Ableitung von M,
$\langle\ldots,\ldots\rangle$	die riemannsche Metrik von M.

Für eine isometrische Immersion $f\colon\ M \to \widetilde{M}$ zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten bezeichnet

A_ξ	den zweiten Fundamentaltensor von f bzgl. $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$,
$G\xi$	den Definitionsbereich von $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$,
h_ξ	die zweite Fundamentalform von f bzgl. $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$,
H_ξ	die mittlere Krümmung von f bzgl. $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$, siehe 1.1.2(ii),
$\mathrm{H}_{\xi,j}$	die j-te mittlere Krümmung von f bzgl. $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$, siehe 1.1.2(ii),
$\mathfrak{V}_f^\perp(U)$	Menge aller aller differenzierbaren Normalenfelder längs f auf einer offenen Teilmenge U von M,
$\mathfrak{V}_f^\perp(p)$	die Menge $\bigcup_{U\in \mathrm{Umg}(p,M)} \mathfrak{V}_f^\perp(U)$ für $p \in M$,
$\mathfrak{V}_f^\perp$	die Menge $\bigcup_{p\in M} \mathfrak{V}_f^\perp(p)$,
X	das Richtungsvektorfeld von f (bzgl. $q_0 \in \widetilde{M}$), siehe 1.3.2(i),
α	die vektorwertige zweite Fundamentalform von f,
$\\|\alpha\\|$	die Längenfunktion von α, siehe 1.1.4,
$\rho_{q_0,\xi}$	die Stützfunktion von f bzgl. $q_0 \in \widetilde{M}$ bzgl. $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$, siehe 1.3.2(ii),
θ_C	$= \mathrm{s}_C' \circ \delta_{q_0} \circ f$ für $q_0 \in \widetilde{M}$,
$\varphi_1^\xi \leq \ldots \leq \varphi_m^\xi$	die Hauptkrümmungen von f bzgl. $\xi \in \mathfrak{V}_f^\perp$,
Ψ	$= \frac{1}{2}\delta_{q_0}^2 \circ f$ für $q_0 \in \widetilde{M}$,
$\perp_p(f)$	die Menge $\{w \in T_{f(p)}\widetilde{M} \mid \forall_{v\in T_pM} \langle w, f_*v\rangle = 0\}$ für $p \in M$.

Ferner bezeichnen wir mit

E^m	$\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Metrik,
L^m	$\mathbb{R}^m$ mit der lorentz'schen Metrik,
M_C^m	den m-dimensionalen Standard-Raum konstanter Krümmung $C \in \mathbb{R}$

und im Falle $C > 0$ bzw. $C < 0$ ist $\iota : M_C^m \hookrightarrow E^{m+1}$ bzw. $\iota : M_C^m \hookrightarrow L^{m+1}$ die isometrische Einbettung sowie $N \in \mathfrak{V}_\iota^\perp(M_C^m)$ das Einheitsnormalenfeld mit $\overrightarrow{N} = \sqrt{|C|}\iota$, siehe 1.2.1.

Literaturverzeichnis

[1] Alencar, H. und Colares, A. G.: *Integral formulas for the r-mean curvature linearized operator of a hypersurface*, Ann. Global Anal. Geom. **16** (1998), 203–220.

[2] Cheeger, J. und Ebin, D. G.: *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, 1975.

[3] do Carmo, M. P.: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[4] Eschenburg, J.-H. und O'Sullivan, J. J.: *Jacobi tensors and Ricci curvature*, Math. Ann. **252** (1980), 1–26

[5] Fontenele, F. und Silva, S. L.: *On the scalar curvature of compact hypersurfaces*, Arch. Math. (Basel) **73** (1999), no. 6, 474–480.

[6] Henke, W.: *Vorlesungen über Analysis*, WS 1997/1998 – WS 1998/1999, Universität zu Köln.

[7] Henke, W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, SS 2000 – WS 2000/2001, Universität zu Köln.

[8] Henke, W.: *Seminare über Differentialgeometrie*, WS 2000/2001 – SS 2001, Universität zu Köln.

[9] Jorge, L. P. de M. und Koutroufiotis, D.: *An estimate for the curvature of bounded submanifolds*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 711–725.

[10] Jorge, L. P. de M. und Xavier, F. V.: *An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersions*, Math. Z. **178** (1981), 77–82.

[11] Markvorsen, S.: *A sufficient condition for a compact immersion to be spherical*, Math. Z. **183** (1983), no. 3, 407–411.

[12] Milnor, J.: *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.

[13] Prill, M.: *Der Satz von Omori und Anwendungen auf isometrische Immersionen vollständiger riemannscher Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume mit einer oder mehreren beschränkten Komponentenfunktionen*, SS 1987, Diplomarbeit an der Universität zu Köln.

[14] Spivak, M.: *A comprehensive Introduction to Differential Geometry – Vol. V*, Publish or Perish, 1975.

[15] Veeravalli, A. R.: *A rigidity theorem for compact hypersurfaces with an upper bound for the Ricci curvature*, Geom. Dedicata **74** (1999), no. 3, 287–290.

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Köln, im Oktober 2002