

# Elemente der Analysis II

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Beweise, daß die Reihen

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ und}$$

$$\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren.

**Aufgabe 2.** Die Zuordnungen aus Aufgabe 1 definieren offenbar Funktionen

$$\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und heißen *Exponentialfunktion*, *Cosinus*, *Sinus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus*. Begründe ihre Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitungen.

**Aufgabe 3.** Beweise den Verallgemeinerten Mittelwertsatz 5.11 der Vorlesung.

Tip: Wende den Satz von Rolle auf  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) + \lambda g(x)$ , mit geeignetem  $\lambda \in \mathbb{R}$  an. Hierbei wird die Notation der Vorlesung verwendet.

**Aufgabe 4.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Betrachte die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch

$$f(x) = \sin(a+b-x) \cos(x) + \cos(a+b-x) \sin(x), \quad g(x) = \cos(a+b-x) \cos(x) - \sin(a+b-x) \sin(x)$$

gegeben sind.

Zeige, daß  $f$  und  $g$  konstant sind und leite daraus die Additionstheoreme für  $\sin$  und  $\cos$  her.