

# Elemente der Analysis III

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.** Bestimme die Funktionalmatrix  $J_\Phi$  der Abbildung

$$\Phi: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

sowie ihre Inverse  $(J_\Phi)^{-1}$ .

**Aufgabe 2.** Man entscheide jeweils, ob die gegebene Funktion  $y$  eine Lösung der Differentialgleichung ist:

(i)  $xy' = 2y, y = 5x^2$ ;

(ii)  $y' = -(1 + \frac{y}{x}), y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$  ( $C \in \mathbb{R}$ );

(iii)  $y' + 4xy = 0, y = 3e^{-x^2}$ ;

(iv)  $y'' - 2y' + 4y = 0, y = e^x \sin(2x)$ .

**Aufgabe 3.** Für die Stromstärke  $I(t)$  eines Wechselstromdynamos gilt die Differentialgleichung

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E}{L} \sin(\omega t)$$

mit positiven Konstanten  $\omega$  (Frequenz),  $R$  (Widerstand),  $L$  (Induktivität) und  $E$ .

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung.

[Tip: Suche eine spezielle Lösung der Gestalt  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  mit  $A, B \in \mathbb{R}$ .]

**Aufgabe 4.** Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$xy'(x) = 4y(x) + x^2,$$

und zeige, daß zu jeder Anfangswertbedingung  $y(x_0) = y_0$  mit  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  unendlich viele auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösungen existieren.

**Aufgabe 5** (Verfaulende Vegetation). In tropischen Regenwäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80% pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich aber neuer „Abfall“ an, sagen wir 7 Gramm pro Quadratcentimeter und Jahr. Stelle eine Differentialgleichung für die Menge  $u(t)$  des Abfalles auf einem Quadratcentimeter auf, löse diese und zeige, daß sich die Abfallmenge im Laufe der Zeit stabilisiert.

Abgabe: Freitag, den 02.07.2010 in den Übungsgruppen