

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Mit Hilfe des Prinzips des indirekten Beweises zeige man, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

[Das Schulwissen über Teilbarkeit, Primfaktorzerlegung etc. darf bei dieser Aufgabe verwendet werden.]

Tip: Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen; diese seien dann mit p_1, \dots, p_n bezeichnet. Dann ist $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ eine natürliche Zahl, die ...

Aufgabe 2. Formalisieren und negieren Sie die folgenden Aussagen:

- (i) In jeder Kölner Straße gibt es mindestens ein Haus, in dem in jedem Zimmer ein Fenster geöffnet ist.
- (ii) (Parallelenaxiom der ebenen euklidischen Geometrie). Zu jeder Geraden g der Ebene E und jedem Punkt p in E , der nicht auf g liegt, gibt es genau eine zu g parallele Gerade \tilde{g} durch p .

Aufgabe 3. Für die folgenden einstelligen Aussageformen H (mit Einsetzungsklasse Ω) gebe man jeweils die umgangssprachliche Bedeutung der Aussagen $\forall_x H(x)$ und $\exists_x H(x)$ an und untersuche, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind.

- (i) Ω sei die Menge aller Menschen und $H(x) : \iff (x \text{ hat blaue Augen})$.
- (ii) Ω sei die Menge aller natürlichen Zahlen und $H(x) : \iff (x \text{ ist Primzahl})$.
- (iii) Ω sei die Menge aller reellen Zahlen und $H(x) : \iff (x^2 \geq 0)$.
- (iv) Ω sei die leere Menge und $H(x) : \iff (x \text{ ist ein viereckiger Kreis})$.

Aufgabe 4. Betrachte die zweistellige Aussageform H mit Einsetzungsklassen $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, die durch

$$H(x_1, x_2) : \iff (x_1 < x_2)$$

definiert ist.

Man gebe alle acht Möglichkeiten an, aus dieser Formel durch Voranstellen zweier Quantoren eine neue Aussage zu gewinnen. Für jede dieser Aussagen gebe man die umgangssprachliche Bedeutung an und untersuche, ob diese Aussage wahr oder falsch ist.

Aufgabe 5. Beweisen Sie Satz 1.8 (i) „ \Leftarrow “ und (ii)!