

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 2.5!

Aufgabe 2. Seien M, N, P Teilmengen einer Menge X . Zeige (wo immer möglich durch „Verfolgen von Inklusionen“, ansonsten „elementeweise“):

(i) $(X \setminus M) \cup M = X$

(ii) $(X \setminus M) \cap M = \emptyset$

(iii) $M \setminus M = \emptyset$

(iv) $M \setminus \emptyset = M$

(v) $M \cup N = M \cup (N \setminus M)$

(vi) $M = (M \setminus N) \cup (M \cap N)$

(vii) $M \cap (N \setminus M) = \emptyset$

(viii) $M \cup N = X \iff X \setminus M \subset N$

(ix) $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \implies M \subset P$

Aufgabe 3.

(i) Bestimme $\mathfrak{P}(\emptyset)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ und $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$.

(ii) Seien M, N Mengen. Zeige:

$$\mathfrak{P}(M \cap N) = \mathfrak{P}(M) \cap \mathfrak{P}(N).$$

(iii) Beweise oder widerlege (für beliebige Mengen M, N):

(a) $\mathfrak{P}(M \cup N) \subset \mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N)$

(b) $\mathfrak{P}(M \cup N) \supset \mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N)$

(c) $\mathfrak{P}(M \cup N) = \mathfrak{P}(M) \cup \mathfrak{P}(N)$

Aufgabe 4. Für beliebige Mengen M, N heißt die Menge

$$M\Delta N := (M \cup N) \setminus (M \cap N)$$

die *symmetrische Differenz* von M und N .

(i) Veranschauliche $M\Delta N$ in einem „Venn-Diagramm“ („Kartoffelbildchen“).

(ii) Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Beweise:

(a) $A_1\Delta B_1 = (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_1)$,

(b) $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$.

(iii) Seien M eine Menge und $A, B, C \subset M$. Zeige:

(a) $A\Delta B \subset M$,

(b) $A\Delta B = B\Delta A$,

(c) $A\Delta\emptyset = A$,

(d) $A\Delta A = \emptyset$,

(e) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Aufgabe 5. Beweisen Sie:

(i) Es existiert keine Menge M mit $\forall X \ X \in M$, d.h. es gibt keine „Menge aller Mengen“.

(ii) Sei M eine Menge. Dann existiert keine Menge \widetilde{M} mit

$$\forall X (X \in \widetilde{M} \iff X \notin M),$$

d.h. es gibt keine „Komplementärmenge von M “.